

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.12:531.51

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕЛЕМЕТРИЯ\*)***А. Перес*

Многие релятивистские формулы можно вывести непосредственно из постулата Эйнштейна: «Все физические законы тождественны для наблюдателей в различных инерциальных системах отсчета» — не используя явно преобразований Лоренца. Сюда относятся, в частности, формулы для замедления времени, сложения скоростей, эффекта Доплера и абберации света. Зная картину, которую видит один наблюдатель, можно получить картину, которую в той же точке пространства-времени видит любой другой наблюдатель, независимо от скорости или трехмерной формы наблюдаемого объекта. В частности, видимая форма движущегося объекта не сжимается, а поворачивается.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Использование преобразований Лоренца — стандартный путь получения формул, описывающих релятивистские явления, такие как замедление времени, сложение скоростей, эффект Доплера, абберация света и т. д. Такой метод вывода этих формул достаточно прост, однако в значительной мере формален и не очень ясен с физической точки зрения. В настоящей статье показано, как можно очень просто вывести эти формулы из принципа относительности Эйнштейна: «Все физические законы тождественны для наблюдателей в различных инерциальных системах отсчета». (В частности, одинакова скорость света.)

В разделах 2, 3 и 4 настоящей статьи рассматриваются одно-, двух- и трехмерные задачи соответственно. Для одномерных задач подобный подход был предложен также в работах <sup>1, 2</sup>. Обобщение его на двух- и трехмерные задачи еще нигде не рассматривалось.

## 2. ОДНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В этом разделе выводятся формулы для замедления времени, коллинеарного эффекта Доплера и для сложения параллельных скоростей. Рассмотрим двух наблюдателей  $A$  и  $B$  в двух инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга со скоростью  $v$ .  $A$  посылает по направлению к  $B$  два световых сигнала в моменты времени  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t_0$ . Они отражаются от зеркала, которое держит  $B$ , и возвращаются к  $A$  в моменты

\*) Peres A. Relativistic Telemetry//Am. J. Phys. 1987. V/55, No.6. P. 516—519.— Перевод Е. А. Андрушина.

Ашер Перес работает на физическом факультете Техниона — Израильского Технологического института, г. Хайфа.

времени  $t_2$  и  $t_2 + \Delta t_2$ . Расчет наиболее прост, если считать, что  $A$  покоится (рис. 1). В тот момент времени, когда первый сигнал отражается от  $B$ , наблюдатель  $B$  проходит мимо другого наблюдателя  $A'$ , который находится в покое относительно  $A$ . Часы  $A'$ , синхронизированные с часами  $A$ , показывают время  $t_1$ . Аналогично, когда  $B$  отражает второй сигнал, он проходит мимо еще

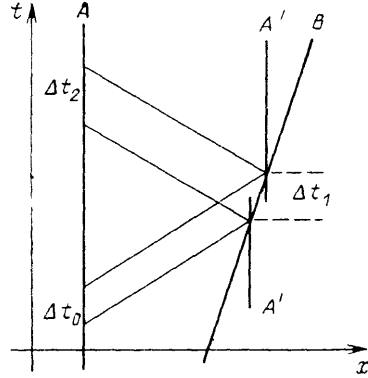


Рис. 1. Двойной эффект Допплера, описываемый в системе отсчета, в которой  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  покоятся, а  $B$  движется относительно них с постоянной скоростью

одного наблюдателя,  $A''$ , также находящегося в покое относительно  $A$ . Синхронизированные с  $A$  часы  $A''$  показывают время  $t_1 + \Delta t_1$ . Элементарные *нерелятивистские* выкладки дают

$$\Delta t_1 = \frac{c}{c-v} \Delta t_0, \quad (1)$$

$$\Delta t_2 = \frac{c+v}{c} \Delta t_1, \quad (2)$$

откуда

$$\Delta t_2 = \frac{c-v}{c+v} \Delta t_0. \quad (3)$$

Отметим, что формула (3) содержит только величины, относящиеся к событиям, которые наблюдает  $A$ , она независима от условий синхронизации. Пока мы не использовали принцип относительности. Формула (3) применима и для акустических сигналов, если  $A$  находится в покое относительно среды, к которой распространяются звуковые сигналы (т. е. скорость звука относительно  $A$  одинакова в обоих направлениях).

Теперь предположим, что  $B$  держит не только зеркало, но и часы, идентичные часам  $A$ . Каков интервал времени  $\Delta t'_1$ , наблюдаемый  $B$ ? (Заметим, что часы  $B$  нельзя синхронизировать с часами  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$ , потому что  $B$  движется относительно них.) Очевидно, мы должны получить соотношение вида

$$\Delta t'_1 = f(v) \Delta t_0, \quad (4)$$

где  $f(v)$  есть доплеровский фактор для начального сигнала, связывающий временные интервалы, измеряемые получателем и отправителем соответственно. Этот фактор есть некоторая функция относительной скорости, которая подлежит определению. Аналогично, для отраженных сигналов

$$\Delta t_2 = f(v) \Delta t'_1. \quad (5)$$

И вот теперь настает кульминационный пункт доказательства: доплеровские факторы в формулах (4) и (5) должны быть одинаковы, поскольку они описывают одно явление — а именно, влияние относительной скорости  $v$  на временные интервалы между парой световых сигналов, измененные отправителем (правая часть формул) и получателем (левая часть формул). Именно здесь мы явно предполагаем, что скорость света (в противоположность, скажем, скорости звука) одинакова для всех наблюдений в инерциальных системах отсчета.

Из формул (4) и (5) следует, что  $\Delta t_2 = f^2(v) \Delta t_0$ , и тогда из формулы (3) получаем

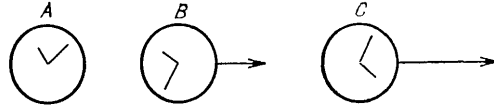
$$f(v) = \left( \frac{c+v}{c-v} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Сравнивая (1), (4) и (6), находим известную формулу для замедления времени

$$\Delta t'_1 = \Delta t_1 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь третьего наблюдателя  $C$ , движущегося со скоростью  $u$  относительно  $B$  и со скоростью  $w$  относительно  $A$  (рис. 2). Каково соотно-

Рис. 2. Наблюдатель  $B$  движется со скоростью  $v$  относительно  $A$ . Наблюдатель  $C$  движется со скоростью  $u$  относительно  $B$  и со скоростью  $w$  относительно  $A$ .



шение между  $u$ ,  $v$  и  $w$ ? Пусть  $A$  посылает пару сигналов по направлению к  $B$  и  $C$ . Пусть  $A$  измеряет временной интервал  $\Delta t_0$ . Тогда  $B$  измеряет интервал

$$\Delta t'_1 = \left( \frac{c+v}{c-v} \right)^{1/2} \Delta t_0. \quad (8)$$

Затем эти сигналы распространяются по направлению к  $C$ , который наблюдает между ними промежуток времени

$$\Delta t'_2 = \left( \frac{c+u}{c-u} \right)^{1/2} \Delta t'_1 \quad (9)$$

или

$$\Delta t'_2 = \left( \frac{c+w}{c-w} \right)^{1/2} \Delta t_0. \quad (10)$$

Для согласования этих формул необходимо считать, что

$$\frac{c+w}{c-w} = \frac{c+u}{c-u} \frac{c+v}{c-v}, \quad (11)$$

откуда следует знакомый закон сложения скоростей

$$w = \frac{u+v}{1+(uv/c^2)}. \quad (12)$$

### 3. ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В этом параграфе с помощью тех же прямых методов рассматриваются неколлинеарный эффект Доплера и формула аберрации света. Я начну с последней.

Для наглядности рассмотрим радиолокатор и ракету, изображенные на рис. 3. Необходимо найти соотношение между углом  $\theta$ , измеряемым в системе отсчета, в которой покоится радиолокатор, и углами  $\theta'$  и  $\theta''$ , измеряемыми в системе отсчета, в которой покоится ракета. Соотношение между  $\theta'$  и  $\theta''$  вытекает непосредственно из рис. 3:

$$v(t' + t'') = ct'' \cos \theta'' - ct' \cos \theta', \quad (13)$$

$$ct' \sin \theta' = ct'' \sin \theta''. \quad (14)$$

Заметим, что обе эти формулы получены в одной и той же системе отсчета, поэтому проблемы синхронизации часов не возникает. Однако постулат относительности учтен в этих формулах, поскольку предполагается, что скорость света одинакова в обоих направлениях.

Разделив (13) на (14), получим

$$\frac{v}{c} \left( \frac{1}{\sin \theta'} + \frac{1}{\sin \theta} \right) = \operatorname{ctg} \theta'' - \operatorname{ctg} \theta', \quad (15)$$

откуда, с использованием элементарных тригонометрических выкладок, следует

$$\frac{\operatorname{tg} (\theta''/2)}{\operatorname{tg} (\theta'/2)} = \frac{c-v}{c+v}. \quad (16)$$

Это хорошо известный закон отражения от движущегося зеркала<sup>3</sup>.

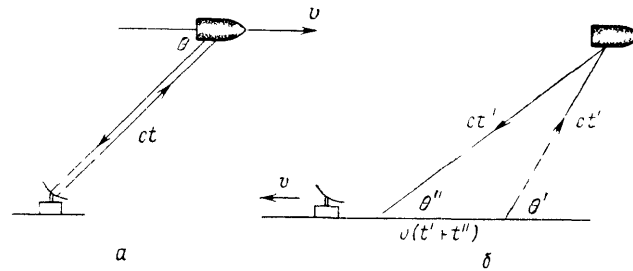


Рис. 3. Радиолокатор посылает сигнал по направлению к ракете и получает отраженный сигнал.  
 а — Описание в системе отсчета, в которой радиолокатор покоится. б — Описание в системе отсчета, в которой покоится ракета

Теперь займемся углом  $\theta$ , который наблюдается при неподвижном радиолокаторе. Сначала рассмотрим сигнал от радиолокатора к ракете. Углы  $\theta$  и  $\theta'$  должны быть связаны соотношением вида

$$\theta = F(\theta', v), \quad (17)$$

где функция  $F$  подлежит определению. Заметим, что в левой части (ЛЧ) формулы (17) стоит угол, измеряемый отправителем, а в правой части (ПЧ) — угол, измеряемый получателем сигнала.

Аналогичное соотношение мы должны получить для отраженного луча

$$\theta'' = F(\theta, v), \quad (18)$$

где  $F$  — та же функция, что и в (17), поскольку описывается то же самое явление: здесь по-прежнему угол отправителя стоит в ЛЧ, а угол получателя стоит в ПЧ. Тогда сравнение с (16) дает хорошо известную релятивистскую формулу аберрации<sup>4</sup>

$$\frac{\operatorname{tg} (\theta''/2)}{\operatorname{tg} (\theta/2)} = \frac{\operatorname{tg} (\theta/2)}{\operatorname{tg} (\theta'/2)} = \left( \frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Это есть единственное решение уравнения  $\theta'' = F(F(\theta', v), v)$ , что легко видеть, если заменить  $\theta'$  на  $\operatorname{tg} \theta'/2$  и т. д. Обратим внимание на сходство формул (19) и (8). Из него следует, что если отдаленная звезда наблюдается с помощью нескольких телескопов, движущихся друг относительно друга (или с помощью одного телескопа на Земле, вращающейся вокруг Солнца<sup>5</sup>), то сравнение различных углов аберрации позволит определить *относительные* скорости телескопов, но не их «абсолютную» скорость по отношению к звезде.

Рассматривая неколлинеарный эффект Доплера (рис. 4), можно также вывести формулу (19). А именно,  $c(t_1 - t_0) = r(t_1)$ . Дифференцирование по  $t_1$  дает

$$c \left( 1 - \frac{dt_0}{dt_1} \right) = \frac{dr(t_1)}{dt_1} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{r} = v \cos \theta, \quad (20)$$

откуда

$$\frac{dt_1}{dt_0} = \frac{c}{c - v \cos \theta}, \quad (21)$$

что представляет из себя обобщение формулы (1). Аналогично, дифференцирование  $c(t_2 - t_1) = r(t_1)$  по  $t_1$  дает

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{c + v \cos \theta}{c}, \quad (22)$$

что представляет из себя обобщение формулы (2). Отсюда следует, что в системе отсчета, в которой ракета покоится

$$\frac{dt'_1}{dt'_0} = \frac{c + v \cos \theta'}{c}. \quad (23)$$

Действительно, формулы (22) и (23) должны иметь тождественную форму, поскольку описывают одну и ту же физическую ситуацию, когда получатель находится в покое. В обоих случаях углы  $\theta$  и  $\theta'$  есть углы между скоростями отправителя сигнала и самого сигнала (сигнал — это отраженный луч на рис. 3, а и излученный луч на рис. 3, б).

Различие между формулами (21) и (23) связано с тем, что (21) получено в системе отсчета, в которой покоится радиолокатор, а (23) — в системе отсчета, в которой покоится ракета. Однопутевой фактор Доплера, который выражает соотношение измеренных собственных интервалов времени отправителя и получателя, есть

$$\frac{dt'_1}{dt'_0} = (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{dt_1}{dt_0} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \frac{dt'_1}{dt'_0} \quad (24)$$

в силу релятивистского замедления времени. Использовано обычное обозначение  $\beta = v/c$ . Мы получаем таким образом<sup>2</sup>

$$\frac{dt'_1}{dt'_0} = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta} = \frac{1 + \beta \cos \theta'}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (25)$$

Для согласования (21), (23) и (24) необходимо, чтобы

$$\cos \theta - \cos \theta' = \beta (1 - \cos \theta \cdot \cos \theta'). \quad (26)$$

что дает еще одно доказательство релятивистской формулы для aberrации (19). С помощью тригонометрических преобразований можно получить фактор Доплера в виде

$$\frac{dt'_1}{dt'_0} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{d\theta'}{d\theta}. \quad (27)$$

#### 4. ТРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Уже в течение длительного времени известно<sup>6-8</sup>, что лоренцево сокращение движущегося объекта «невидимо», потому что оно компенсируется соответствующими запаздываниями сигналов, испускаемыми различными частями объекта. Таким образом, на моментальном снимке движущийся объект будет выглядеть не столько сокращенным, сколько повернутым. Это утверждение справедливо строго только в предельном случае весьма малых или весьма удаленных объектов. Объекты, видимые под конечным углом, определенным образом искажаются. Однако можно показать, что движущийся с любой скоростью сферический объект любого размера всегда кажется круглым<sup>9</sup>.

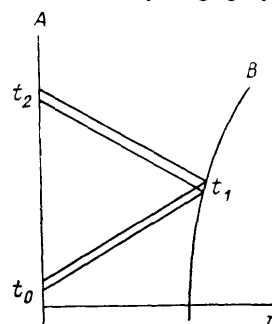


Рис. 4. Общий эффект Доплера.

A (находящийся в покое) посылает пару сигналов, которые отражаются от B, чье расстояние  $r$  от A — произвольная функция времени

Доказательство этих утверждений для малого и удаленного объекта очень просто. На самом деле наблюдатель видит предшествующий световой конус объекта (рис. 5). Видимое изображение или фотографическую запись можно описать двумя углами, полярным углом  $\theta$ , который отсчитывается от произвольного направления, и азимутальным углом  $\varphi$ , который измеряется вокруг этого направления. Когда два движущихся друг относительно друга

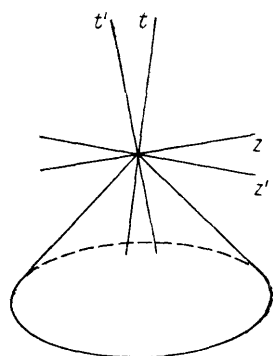


Рис. 5. Общий предшествующий световой конус двух наблюдателей, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Оси  $t$  и  $t'$  — мировые линии наблюдателей. Оси  $z$  и  $z'$  параллельны их относительной скорости. Оси  $x=x'$  и  $y=y'$  перпендикулярны плоскости рисунка

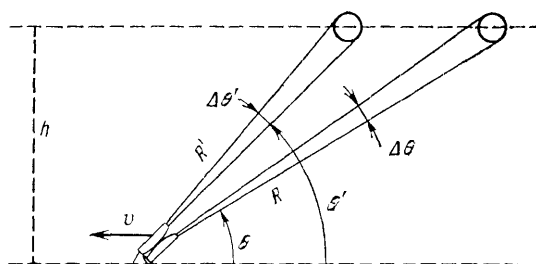


Рис. 6. Кажущееся расстояние до малой сферы известного диаметра  $D$  оценивается двумя наблюдателями, движущимися друг относительно друга со скоростью  $v$ , как  $R = D/\Delta\theta$  и  $R' = D/\Delta\theta'$  соответственно, тогда  $h = H = R \sin \theta = R' \sin \theta'$  оказывается одинаковым для обоих наблюдателей

наблюдателя открывают затворы своих фотоаппаратов в одной и той же точке пространства-времени, они фиксируют одно и то же: оба аппарата получают фотоны от одних и тех же событий в прошлом (предшествующий световой конус Лоренц-инвариантен). Различие изображений на фотопластинках

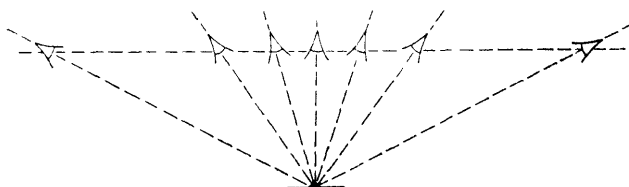


Рис. 7. Таким видят объект (букву  $\mathcal{A}$ ) семь наблюдателей, находящихся в одной и той же точке в один и тот же момент времени, один из них покоится по отношению к объекту и находится прямо под ним, остальные шесть движутся со скоростями  $\pm 0,3 c$  и  $\pm 0,6 c$

связано только с абберацией. Полярные углы  $\theta$  и  $\theta'$  (их удобно отсчитывать от направления относительной скорости  $v$ ) различны и связаны соотношением (19). Азимутальные углы  $\varphi$  и  $\varphi'$ , очевидно, равны в силу симметрии вращения относительно  $v$ .

Угловые размеры в полярном направлении изменяются в отношении  $d\theta'/d\theta$ . Соответствующее изменение в азимутальном направлении есть  $\sin \theta' d\varphi'/\sin \theta d\varphi$ . Два этих отношения равны в силу (27) и  $\varphi' = \varphi$ . Следовательно, видимая форма малого объекта увеличивается без искажения. Более формально, угловое расстояние  $d\alpha$  двух соседних лучей, которое выражается в виде

$$d\alpha^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (28)$$

изменяется следующим образом

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \quad (29)$$

независимо от отношения  $d\theta/d\varphi$ .

Отсюда вытекает одно интересное следствие. Предположим, что известен истинный размер объекта и видимый угол  $d\alpha$  и необходимо определить расстояние до объекта, как на рис. 6. Тогда, если мы проведем через объект линию, параллельную относительной скорости пары наблюдателей, оба наблюдателя получат одинаковое расстояние  $h$  до этой линии.

Таким образом, все наблюдатели видят одинаковое изображение (одинаковую видимую форму), но каждый видит объект в различном направлении из-за аберрации. Им кажется, что объект поворачивается на угол аберрации  $\theta' - \theta$ . На рис. 7 проиллюстрирована эта ситуация для нескольких наблюдателей, движущихся с параллельными относительными скоростями.

#### *Благодарность*

Я благодарен более чем ста слушателям-инженерам моего курса «Физика-1», внимательно выслушавшим изложенные аргументы и потребовавшим подробного разъяснения каждого пункта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Janis A. J. // Am. J. Phys. 1983. V. 51. P. 209.
2. Mermin N. D. // Ibidem. P. 1130.
3. Richtmyer F. K., Kennard E. H., Cooper J. C. // Introduction to Modern Physics.— New York: McGraw-Hill, 1969.— P. 142.
4. Einstein A. // Ann. d. Phys. 1905. Bd 17. S. 891.
5. Bradley J. // Phil. Trans. 1972. V. 35. P. 637.
6. Weisskopf V. F. // Phys. Today. 1960. V. 13, No. 9. P. 24.
7. Terrel J. // Phys. Rev. 1959. V. 116. P. 1041.
8. Komar A. // Am. J. Phys. 1965. V. 33. P. 1024.
9. Penrose R. // Proc. Camber. Phil. Soc. 1959. V. 55. P. 137.