1988 г. Сентябрь *Том 156, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.12:531.18

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЭФФЕКТ САНЬЯКА

А. А. Логунов, Ю. В. Чугреев

Как известно, эффект Саньяка [1], наряду с опытом Майкельсона, измерениями скорости света и т. д. является одним из основополагающих опытов теории относительности. Однако до сих пор в литературе можно встретить как некорректное объяснение этого эффекта с помощью сигналов, двигающихся со скоростями, большими скорости света [2, 3], или ссылками на общую теорию относительности [3], так и объявление эффекта Саньяка «загадочным», не подлежащим непротиворечивому объяснению [4]. Подробнее речь об этом пойдет ниже. Поэтому мы считаем уместным, *исходя из методических соображений и во избежание всевозможных иллюзий, еще раз подчеркнуть чисто спецрелятивистскую природу эффекта Саньяка.* При этом, конечно, никакие сверхсветовые скорости, ни тем более общая теория относительности, нам не понадобятся.

Опишем вначале опыт Саньяка. На диске по углам четырехугольника расположены зеркала. Углы их взаимного расположения таковы, что луч света от монохроматического источника, отражаясь от зеркал, совершает замкнутый цикл и возвращается к источнику. С помощью полупрозрачной пластинки луч от источника можно разделить на два луча, двигающихся в противоположных направлениях этого замкнутого цикла.

Саньяк обнаружил, что если привести диск во вращение, то луч, для которого направление обхода совпадает с направлением вращения, придет к источнику позднее, чем луч, для которого оно противоположно, результатом чего является сдвиг интерференционной картины на фотопластинке. При изменении вращения на противоположное интерференционные полосы смещались в обратном направлении.

Какое объяснение давали этому эффекту? Сам Саньяк получил теоретическое значение величины эффекта путем чисто классического сложения скорости света с линейной скоростью вращения для луча, двигающегося в направлении, противоположном вращению, и соответствующего вычитания для луча, распространяющегося вдоль скорости вращения. Расхождение этого результата с экспериментом порядка процента.

Такое объяснение опыта в том или ином виде сохранилось и в дальнейшем, а зачастую и оно затуманивалось. В качестве примера приведем типичное высказывание на этот счет А. Зоммерфельда в его «Оптике» [3]: «Отрицательный результат Майкельсона ничего не говорит, конечно, о распространении света во *вращающихся* средах. В этом случае нужно было бы привлечь не частную, а общую теорию относительности с ее добавочными членами, соответствующими механическим центробежным силам. Если, однако, принять во внимание, что в последующих опытах (Саньяка и т. п. — авторы) речь идет только о скоростях $v \ll c$ и только об эффектах первого порядка относительно v/c, то можно будет вообще обойтись без теории относительности и вести расчеты чисто классически».

Такое объяснение фактически отвечает духу старых эфирных воззрений и, как справедливо отмечает Х. Ийлмаз [4], не является корректным, поскольку допускает сверхсветовые скорости, а также противоречит релятивистскому закону сложения скоростей.

Для наглядности рассмотрим, следуя Ийлмазу, круговую траекторию распространения лучей в опыте Саньяка, чему соответствует случай бесконечного числа зеркал. Согласно классическому закону сложения скоростей во вращающейся системе отсчета, скорости света будут равны $c \pm \omega r_0$, где ω — частота вращения, r_0 — радиус траектории.

Тогда очевидно, что для величины эффекта получается следующая формула:

$$\Delta_S = \frac{2\pi r_0}{c - \omega r_0} - \frac{2\pi r_0}{c + \omega r_0} \approx \frac{4\pi r_0^2 \omega}{c^2} = \frac{4\omega S}{c^2},$$

хорошо согласующаяся с экспериментом. Здесь S обозначает площадь замкнутого цикла, по которому распространяются лучи.

Мы видим, что этот результат достигнут ценой введения анизотропии скорости света и фактически допущения сверхсветовых скоростей. Эта анизотропия противоречит релятивистскому закону сложения скоростей (даже в первом порядке), а также постоянству скорости света. Другими словами, хотя такая идеология и дает предсказание, совпадающее с правильным (в первом приближении), но она внутренне несостоятельна. Имея в виду этот факт, Ийлмаз назвал эффект Саньяка «загадочным» [4].

Отметим, что измерение скорости света с целью поиска возможной анизотропии собирается провести группа экспериментаторов из Мэрилендского университета под руководством К. О. Элли *).

В настоящей работе мы покажем, что объяснение эффекта Саньяка находится полностью в компетенции специальной теории относительности и для этого не нужна ни общая теория относительности, ни сверхсветовые скорости, ни привлечение каких-либо дополнительных постулатов. Мы подробно рассмотрим, находясь в инерциальной неподвижной системе отсчета, как можно вычислить время между приходом лучей к источнику, а также сделаем это, используя и вращающуюся вместе с установкой неинерциальную систему отсчета. Результаты расчетов, как и следует ожидать, совпадут.

Рассмотрение начнем со случая инерциальной системы отсчета. Запишем интервал в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,d\varphi^2 - dz^2. \tag{1}$$

Пусть, как говорилось ранее, лучи света двигаются в плоскости $z = 0$ по окружности радиуса $r = r_0 = \text{const}$. Для света интервал равен нулю, поэтому мы получаем, что

$$\frac{d\varphi_\pm(t)}{dt} = \pm\frac{c}{r_0}. \tag{2}$$

Индексом «+» помечен луч, двигающийся в направлении вращения, а индексом «—» — луч в противоположном направлении.

С учетом начальных условий $\varphi_\pm(0) = 0$, $\varphi_-(0) = 2\pi$ находим закон изменения углов $\varphi_\pm$ двух лучей в зависимости от времени t:

$$\begin{aligned} \varphi_+(t) &= \frac{c}{r_0}t, \\ \varphi_-(t) &= 2\pi - \frac{c}{r_0}t. \end{aligned} \tag{3}$$

Лучи встретятся в момент t_1, когда $\varphi_+(t_1) = \varphi_-(t_1)$. Подставляя сюда (3), получаем, что

$$\varphi_+(t_1) = \varphi_-(t_1) = \pi.$$

*) Частное сообщение К.О.Элли.

Выбирая теперь момент t_1 в качестве начального и повторяя рассуждения найдем, что следующая встреча лучей произойдет именно в той точке (трехмерного пространства), откуда они были испущены, т. е. в точке с координатами $\varphi = 0$, $r = r_0$, $z = 0$.

Подчеркнем, что этот результат не зависит, очевидно, от угловой скорости вращения системы отсчета, на которой находятся источник и зеркала.

Закон изменения угловой координаты источника, по определению, гласит (начальное условие $\varphi_s(0) = 0$):

$$\varphi_s(t) = \omega t. \tag{4}$$

Следовательно, встреча источника с «+»-лучом произойдет в момент координатного времени t_+, определяемого условием $\varphi_s(t_+) = \varphi_+(t_+) - 2\pi$, т. е.

$$t_+ = \frac{2\pi}{(c\, r_0) - \omega}, \tag{5}$$

а с «—»-лучом в момент координатного времени t_-, определяемого условием $\varphi_s(t_-) = \varphi_-(t_-)$:

$$t_- = \frac{2\pi}{c\, r_0 - \omega}. \tag{6}$$

Из вида соотношений (5), (6) может показаться, что скорость света в рассматриваемом случае анизотропна и отличается от c. Однако это не так. Скорость света у обоих лучей одинакова и равна c, а различное время возвращения к источнику объясняется тем, что за время распространения лучей он переместился на некоторое расстояние, в результате чего они прошли до встречи с ним различные расстояния («+»-луч прошел больший путь).

Найдем теперь промежуток собственного времени между приходом двух лучей для наблюдателя, находящегося на источнике. Он равен, по определению,

$$\Delta = \frac{1}{c}\int\limits_{s(t_-)}^{s(t_+)} ds = \frac{1}{c}\int\limits_{t_-}^{t_+} \frac{ds}{dt}\, dt, \tag{7}$$

где s — интервал. Подставляя в (7) значения интервала в точке источника, с помощью (4) получим

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - r_0^2 d\varphi^2 = c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{r_0^2\omega^2}{c^2}\right),$$

где $\omega^2 r_0^2/c^2 < 1$.

Найдем точную величину эффекта Саньяка *):

$$\Delta = \left(1 - \frac{r_0^2\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} (t_+ - t_-) = \frac{4\pi\omega r_0^2}{c^2\,[1 - (r_0^2\omega^2/c^2)]^{1/2}}. \tag{8}$$

Отметим, что при выводе (8) мы пользовались лишь абсолютными понятиями событий встречи лучей друг с другом и с источником, а не понятием скорости света относительно вращающейся системы отсчета.

Следует особо подчеркнуть, что суть специальной теории относительности составляет постулат о псевдоевклидовости геометрии пространства-времени, а принцип относительности и «постулат постоянства скорости света» являются вторичными, частными следствиями этого фундаментального положения. Именно постулат о псевдоевклидовой геометрии позволяет рассматривать явления в неинерциальных системах отсчета, оставаясь точно в рамках специальной теории относительности. Далее мы продемон-

*) При расчете реалистического эффекта Саньяка, когда траекторией светового луча является ломаная линия, необходимо учитывать деформацию центрифуги под действием центробежных сил.

стрируем это и покажем, что расчеты эффекта Саньяка во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета ничем принципиально не отличаются от соответствующих расчетов в неинерциальной системе. Поэтому общая теория относительности здесь просто ни при чем. Более подробно об этом можно прочитать в [5].

Покажем теперь, что если бы экспериментатор захотел измерить скорость света в обсуждаемом эксперименте относительно неподвижной системы отсчета или относительно вращающейся, он всегда обнаружил бы, что она равна точно c. Вначале напомним, что непосредственно экспериментально проверяема так называемая физическая скорость, которую следует отличать от координатной, имеющей, так сказать, не физический, а математический смысл.

Итак, рассмотрим интервал псевдоевклидова пространства Минковского

$$\mathrm{d}s^2 = \gamma_{ik}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k = \gamma_{00}c^2\,\mathrm{d}t^2 + 2\gamma_{0\alpha}c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^\alpha + \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta, \tag{9}$$

где γ_{ik} — метрический тензор, для которого, по определению, тензор кривизны Римана равен нулю. Мы можем тождественно преобразовать интервал (9) к виду

$$\mathrm{d}s^2 = \left[(\gamma_{00})^{1/2}c\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma_{0\alpha}}{(\gamma_{00})^{1/2}}\,\mathrm{d}x^\alpha\right]^2 - \left(\frac{\gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}}{\gamma_{00}} - \gamma_{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta,$$

который совпадает с видом интервала в обычной инерциальной системе отсчета:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\mathbf{l}^2. \tag{10}$$

Таким образом, роль физического времени играет величина $\mathrm{d}\tau = (\gamma_{00})^{1/2}\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma_{0\alpha}}{c}\mathrm{d}x^\alpha(\gamma_{00})^{1/2}$, равная $\mathrm{d}s/c$ при $\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$, а роль квадрата физического расстояния — величина

$$\mathrm{d}\mathbf{l}^2 = \left(\frac{\gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}}{\gamma_{00}} - \gamma_{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta,$$

равная $-\mathrm{d}s^2$ при $\mathrm{d}\tau = 0$. Из этих определений ясно, что и $\mathrm{d}\tau$ и $\mathrm{d}\mathbf{l}$ можно измерить, так как они выражаются через абсолютную величину — интервал. Из этого следует также, что экспериментально измеряемой скоростью является величина $\mathrm{d}\mathbf{l}/\mathrm{d}\tau$. Поскольку инвариантное определение световых сигналов в специальной теории относительности гласит: $\mathrm{d}s^2 = 0$, то на основании (10) мы находим, что

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}\tau}\right| = c. \tag{11}$$

Этот результат означает, что в какой бы системе отсчета — инерциальной или неинерциальной — экспериментатор не измерял скорость света, ее локальное значение везде по абсолютной величине постоянно и равно c. В случае инерциальной системы отсчета величина $\mathrm{d}\tau$ является полным дифференциалом, и можно говорить о глобальном постоянстве физической скорости света. В то же время координатная скорость света $\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$ может иметь любое значение, за исключением нуля и бесконечности.

Для расчета экспериментально измеряемых времен, расстояний и т. п. нужно наряду с координатами знать и значение компонент метрического тензора γ_{ik}. Таким образом, на основании сказанного мы заключаем, что физическая скорость света относительно неподвижной системы равна

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{d\tau} = \pm c\mathbf{n}_\varphi,$$

где $\mathbf{n}_\varphi$ единичный вектор в азимутальном направлении. Отметим, что в рассматриваемой системе отсчета физическая и координатная скорости света совпадают.

Рассмотрим теперь тот же физический процесс распространения лучей по кругу навстречу друг другу во вращающейся с угловой скоростью ω неинерциальной системе отсчета. Для того, чтобы найти вид интервала в этой системе, совершим преобразование координат:

$$\begin{aligned} \varphi_\text{н} &= \varphi_\text{с} - \omega t_\text{с}, \\ t_\text{н} &= t_\text{с}, \\ r_\text{н} &= r_\text{с}, \\ z_\text{н} &= z_\text{с}. \end{aligned} \tag{12}$$

В новых координатах $t_\text{н}$, $r_\text{н}$, $\varphi_\text{н}$, $z_\text{н}$ получаем (опуская для простоты индекс «н») интервал в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2\, dt^2 - \frac{2\omega r^2}{c}\, d\varphi c\, dt - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \tag{13}$$

Физически реализовать вращающуюся систему отсчета с $r \geqslant c/\omega$ невозможно, так как при $r \to c/\omega$ инертная масса и момент инерции такой системы стремятся к бесконечности. Отметим, что хотя четырехмерная геометрия по-прежнему осталась псевдоевклидовой, геометрия трехмерного пространства, определяемая, как отмечалось, метрическим тензором $\varkappa_{\alpha\beta} = \gamma_{0\alpha}\gamma_{0\beta}/\gamma_{00} - \gamma_{\alpha\beta}$, в данном случае уже отличается от эвклидовой. Для этого вычислим тензор кривизны такого пространства:

$$R^{(3)}_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{\sigma\mu}\varkappa_{\lambda\nu} - \partial^2_{\sigma\lambda}\varkappa_{\mu\nu} - \partial^2_{\mu\nu}\varkappa_{\lambda\sigma} + \partial^2_{\nu\lambda}\varkappa_{\mu\sigma}\right) + \varkappa_{\eta\rho}\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \Gamma^\eta_{\sigma\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\right);$$

здесь $\Gamma^\eta_{\nu\lambda}$ обозначает связность трехмерного пространства:

$$\Gamma^\eta_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\varkappa^{\eta\sigma}\left(\partial_\nu\varkappa_{\sigma\lambda} + \partial_\lambda\varkappa_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\varkappa_{\lambda\nu}\right),$$

где $\varkappa^{\eta\sigma}$ — матрица, обратная к $\varkappa_{\alpha\beta}$. Подставляя в формулу для тензора кривизны эффективную метрику $\varkappa_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,\{1,\ r^2/[1 - (\omega^2 r^2/c^2)],\ 1\}$ и вычисляя связности $\Gamma^\eta_{\nu\lambda}$, найдем, что у него есть всего одна независимая, отличная от нуля компонента

$$R^{(3)}_{r\varphi r\varphi} = \frac{3\omega^2 r^2}{c^2\,[1 - (\omega^2 r^2/c^2)]}.$$

Отсюда видно, что кривизна трехмерного пространства отлична от нуля и координата r не может превышать значения c/ω, поскольку в этом случае коэффициент γ_{00} меняет знак, что физически недопустимо.

Характерным проявлением указанной неэвклидовости и трехмерной геометрии пространства является известный факт о неравенстве 2π отношения длины окружности к ее радиусу:

$$\frac{1}{r}\int\limits_{l(0)}^{l(2\pi)} dl = \frac{2\pi}{[1 - (\omega^2 r^2/c^2)]^{1/2}} > 2\pi.$$

Рассмотрим теперь эффект Саньяка в данной неинерциальной системе отсчета. Вычисления будем проводить по старой схеме. Как и прежде, траекториями лучей света являются окружности радиуса $r_0 = \mathrm{const}$, лежащие в плоскости $z = 0$. Из условия (13) находим с помощью соотношения $ds^2 = 0$ законы изменения угла φ в зависимости от координатного времени t:

$$\frac{d\varphi_\pm}{dt} = -\omega \pm \frac{c}{r_0} \tag{14}$$

С учетом начальных условий $\varphi_+(0) = 0$, $\varphi_-(0) = 2\pi$ получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_+(t) &= \frac{ct}{r_0}\left(1 - \frac{\omega r_0}{c}\right), \\ \varphi_-(t) &= 2\pi - \frac{ct}{r_0}\left(1 + \frac{\omega r_0}{c}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Первая встреча лучей произойдет в момент t_1, когда $\varphi_+(t_1) = \varphi_-(t_1)$, т. е. при значении угловой переменной, равном $\varphi_1 = \pi\,[1 - (\omega r_0/c)]$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что вторая встреча лучей произойдет «на угле»

$$\varphi_2 = 2\pi\left(1 - \frac{\omega r_0}{c}\right), \tag{16}$$

т. е. на угловом расстоянии — $2\pi r_0\omega/c$ от источника.

Закон изменения угловой координаты источника в данной системе тривиален: $\varphi_s = \mathrm{const} = 0$.

Координатный момент времени t_+ встречи «+»-луча с источником находим, как и прежде, из условия $\varphi_s(t_+) = 0 = \varphi_+(t_+) - 2\pi$:

$$t_+ = \frac{2\pi r_0}{c - \omega r_0}, \tag{17}$$

и, аналогично, момент t_-:

$$t_- = \frac{2\pi r_0}{c - \omega r_0}.$$

Интервал собственного времени между двумя событиями прихода лучей в точку, где находится источник, получим с помощью определения (7):

$$\Delta = \frac{1}{c}\int\limits_{t_-}^{t_+} \frac{ds}{dt}\,dt = \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right)^{1/2}(t_+ - t_-) = \frac{4\pi\omega r_0^2}{c^2\,[1 - (\omega^2 r_0^2/c^2)]^{1/2}};$$

Это совпадает с результатом расчета в неподвижной системе. Интересно, что в нерелятивистском приближении формула для величины сдвига интерференционных полос, которая следует из выражения для Δ, справедлива и в среде, то есть не зависит от величины показателя преломления оптического волокна, дисперсии групповой скорости и т. п. [6].

Вычислим физическую скорость света для рассматриваемого процесса. Согласно (10), (14) получаем

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\tau} = \pm c\mathbf{n}_\varphi.$$

Отметим также, что во вращающейся системе отсчета координатная скорость света анизотропна: $d\varphi/dt = -\omega \pm c/r_0$.

Подчеркнем, что приемник не зарегистрирует изменения частоты у лучей, так как на всем пути их распространения метрический коэффициент γ_{00}, ответственный за красное смещение, является постоянным.

В этой связи представляет интерес эффект смещения частоты света в рассматриваемой неинерциальной системе отсчета. Если направить луч света частоты ν_0 от оси вращения по радиусу, то для наблюдателя, находящегося на диске, его частота будет увеличиваться по закону

$$\frac{\nu(r) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{[1 - (\omega^2 r^2/c^2)]^{1/2}} - 1 \underset{r \ll c/\omega}{\approx} \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2 r^2}{c^2} \tag{18}$$

в фиолетовую сторону спектра, что было проверено экспериментально с точностью $10^{-2}\%$ [7].

Таким образом, мы показали, что для объяснения эффекта Саньяка нет необходимости ни модифицировать специальную теорию относительности, ни использовать сверхсветовые скорости, ни прибегать к общей теории относительности, а нужно лишь строго следовать специальной теории относительности.

В заключение авторы выражают благодарность профессору Х. Ийлмазу и профессору К. О. Элли за ценные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Институт физики высоких энергий,
Протвино (Московская обл.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sagnac M. G.//J. de Phys. 1914. T. 4. P. 177.
2. Вавилов С. И. Собр. соч. Т. 4.— М.: Изд-во АН СССР. 1956.
3. Зоммерфельд А. Оптика.— М.: ИЛ. 1953.
4. Yilmaz H.//Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity/Ed. R. Ruffini.— Rome: Elsevier Science Publ., 1986.— P. 1753.
5. Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации.— М.: Наука. 1987.
6. Fiber-Optic Sensors and Related Technologies/Eds S. Ezekiel, H. J. Arditty.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1982.— (Springer Series in Optical Science. V. 32).
7. Hay H. J., Schiffer J. P., Cranshaw T. E., Egelstaff P. A.//Phys. Rev. Lett. 1960. V. 4. P. 165.