1973 г. Сентябрь *Том 111, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12

ДУАЛЬНОСТЬ, ДУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Е. М. Левин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 29
2. Что такое дуальность 30
3. Спектр резонансов в дуальных моделях 32
4. Дуальность плюс отсутствие резонансов в экзотических каналах 37
а) Обменное вырождение (38). б) Дуальность и симметрии (46). 1) Угол смешивания (46). 2) Спектр резонансов (46). в) Трудности в барион-барионном рассеянии (48).
5. Модель Венециано 50
6. Некоторые конкретные реакции в обобщенной модели Венециано 57
а) Мезон-мезонное рассеяние (57). б) Мезон-барионное рассеяние (60). в) Реакция $p+\bar{n} \to \pi_1^+ + \pi_2^+ + \pi^-$ в покое (61). г) Многочастичные реакции в обобщенной модели Венециано (64). д) Реакции дифракционной диссоциации (68)
7. Вакуумный полюс в дуальных моделях 71
8. Инклюзивные реакции 74
9. Заключение 78
Приложения I—II 81
Цитированная литература 83

1. ВВЕДЕНИЕ

Дуальность — одна из немногих новых и оригинальных физических идей, которые появились в физике элементарных частиц в последнее время,— сейчас является общепризнанным языком при обсуждении рассеяния сильновзаимодействующих частиц (адронов). За три года бурного развития (о чем дает представление довольно полный список обзоров, лекций и докладов, появившихся за это время [1]) дуальные модели стали достаточно сложной областью физики адронов, в которой затруднительно разобраться, особенно из-за огромного количества работ чисто технического и формального характера. Поэтому первая цель этого обзора — позволить читателю быстро ознакомиться с основными понятиями и рассуждениями дуальности, ознакомиться настолько, чтобы он самостоятельно получил возможность читать оригинальные работы по этой теме. Кроме того, желание сравнить простые формулы дуальных моделей с конкретным экспериментом или красивый и сравнительно трудный аппарат их часто заставляет забывать (даже специалистов) о том, насколько идеи дуальности согласуются с реальностью, какое они находят подтверждение во всей совокупности современных экспериментальных данных. В связи с этим в обзоре уделено много места сравнению основных предсказаний дуальности с экспериментом, для того чтобы дать возможность читателю решить для себя, стоит ли этим интересоваться вообще, решить, имеют ли идеи дуальности шанс быть правильными, а не только привлекательными.

© «Успехи физических наук», 1973.

Такая двойная цель обзора привела к довольно большому объему его, и в целях прекращения разбухания текста пришлось выбросить всю историю изложенных идей (она достаточно подробно освещена в [1]) и почти совсем не говорить о чисто теоретическом развитии дуальных моделей, без которого нельзя составить правильного и полного впечатления о дуальности (в какой-то мере это искупается ссылками к приложению II, которые дают наиболее краткое пособие по ликвидации безграмотности в этом отношении). Для чтения обзора, помимо знакомства с аналитическими свойствами амплитуды рассеяния адронов, с асимптотикой ее при больших энергиях, с унитарной симметрией, кварками и другими вещами, составляющими привычный быт физики элементарных частиц, желательно также знание основных идей дуальности (например, в объеме [2]).

2. ЧТО ТАКОЕ ДУАЛЬНОСТЬ

Физическая идея дуальности состоит в том, что основную роль в физике сильных взаимодействий играют резонансные взаимодействия элементарных частиц. Более конкретно это означает, что амплитуда рассеяния адронов будет близка к физической при любых энергиях, если представить себе, что все взаимодействие сводится лишь к образованию и распаду резонансов.

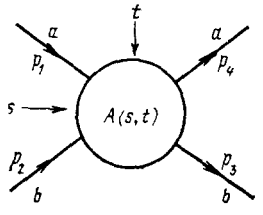


Рис. 1.

$s=(p_1+p_2)^2$, $t=(p_1-p_4)^2=-2p^2(1-z)$, $u=(p_2-p_4)^2=-2p^2(1+z)$, $s+t+u=2m_a^2+2m_b^2$, p — импульс в СЦИ, $A(s,t)=\sum_l (2l+1)\,a_l(s)\times P_l(z)$, $z=\cos\vartheta$, ϑ — угол рассеяния.

Предположим, что это так; тогда амплитуда рассеяния для реакции $a+b\to a+b$ (рис. 1) имеет вид

$$A(s,t)=\sum_i [B_i(s,t)+B_i(u,t)], \qquad (1)$$

где $B_i(s,t)$ — вклад брейт-вигнеровского полюса в эту реакцию ($B_i(u,t)$ — то же в реакции $\bar a+b\to\bar a+b$; $\bar a$ — античастица); s, t, u — обычные мандельстамовские переменные.

$$B_i(s,t)=-\frac{8\pi\sqrt{s}}{p}(2S_i+1)\frac{\Gamma_i^{el}}{S-m_i^2+i\Gamma_i}P_{S_i}(z), \qquad (2)$$

где m_i, S_i, Γ_i, Γ_i^{el} — масса, спин, полная и упругая ширина резонанса соответственно. $P_l(z)$ — полином Лежандра, z — косинус угла рассеяния, p — импульс в СЦИ. Подобный же вид (сумма по всем резонансам) амплитуда имеет и при положительном t (физическая область реакции $a+\bar a\to b+\bar b$). Однако по соображениям кроссинга и аналитичности амплитуды реакций $a+b\to a+b$ и $a+\bar a\to b+\bar b$ должны быть связаны, т. е. амплитуда (1) должна быть равна аналогичной амплитуде реакции $a+\bar a\to b+\bar b$, продолженной в физическую область s-канала ($s>0$, $t<0$). При таком продолжении совокупность полюсов с одинаковыми внешними квантовыми числами (заряд, изотопический спин, странность, четность и т. д.), но с разными спинами (т. е. резонансы, которые лежат на одной траектории $\alpha(t)$) дает вклад при $t<0$

$$R_i(s,t)=\beta_i(t)\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_i(t)}\eta_i(t), \qquad (3)$$

где

$$\eta_i(t)=-\frac{\pm e^{-i\pi\alpha_i(t)}+1}{\sin\pi\alpha_i(t)};$$

η—сигнатурный множитель полюса Редже (положительной сигнатуре соответствует знак $+$, отрицательной — знак $-$), $\beta_i(t) = g_1^{aa}(t)\, g_1^{bb}(t)$ (для реакции $a + b \to a + b$) — вычет реджеона.

Таким образом,

$$A(s, t) = \sum_i [B_i(s, t) + B_i(u, t)] = \sum_i B_i(s, t), \tag{4}$$

или

$$\operatorname{Im} A(s, t) = \operatorname{Im} \sum_i B_i(s, t) = \operatorname{Im} \sum_i R_i(s, t), \tag{5}$$

т. е. сумма резонансов в s-канале реакции должна равняться сумме вкладов реджеонов. Графически это можно изобразить в виде рис. 2. Ясно, что

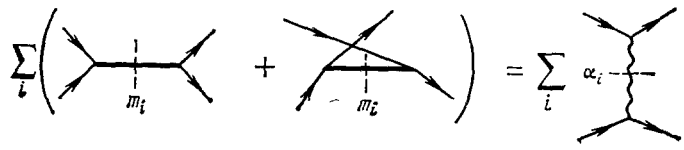


Рис. 2.

равенства (4) и (5) выражают собой некоторую связь, дают условие некоторого «бутстрапа» между резонансами прямого ($a + b \to a + b$) и перекрестного ($a + \bar{a} \to b + \bar{b}$) каналов и дуальная амплитуда (т. е. амплитуда, построенная только в виде суммы по всем резонансам) является решением этого «бутстрапа». Очевидно, что такая амплитуда не удовлетворяет

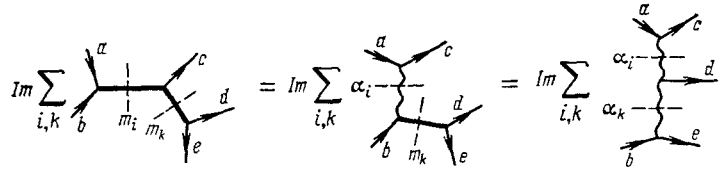


Рис. 3.

условию унитарности и поэтому может рассматриваться лишь как первое приближение к настоящей физической амплитуде рассеяния. Наша вера состоит в том, что это приближение хорошее, т. е. все унитарные поправки малы. Таким образом, речь идет о построении теории возмущений для сильных взаимодействий. Без сомнения, всякие попытки двигаться в этом направлении должны вызывать, с одной стороны, громадный интерес и сочувствие, с другой — вполне обоснованное недоверие и сомнение. Последнее особенно относится к дуальности, поскольку ее идеи основаны только на совпадении с экспериментом, а не являются какими то достаточно выстраданными принципами, без которых вообще невозможно описать современный эксперимент, тем более что сейчас не ясно, является ли дуальный «бутстрап» взаимно согласованным и внутренне непротиворечивым. Однако идеи дуальности привлекают своим конструктивным характером. большой общностью (конечно, дуальность применима не только к бинарным реакциям; на рис. 3 приведено, например, условие дуального «бутстрапа» для реакции $a + b \to c + d + e$), тесной связью с современным экспериментом, и поэтому хочется надеяться, что этот путь не ведет в тупик и согласие с опытом не является случайным.

Необходимо подчеркнуть, что обычное представление амплитуды рассеяния в виде суммы какого-то числа резонансов ($A_{\text{рез}}$) и вклада

полюсов Редже ($A_{\text{ред}}$) (т. е. $A = A_{\text{рез}} + A_{\text{ред}}$) в корне отличается от дуального описания. Эта разница видна на рис. 4.

К сожалению, амплитуда рассеяния полностью не может быть дуальной, так как полюс Померанчука (или вакуумный реджеон), который ответствен за постоянство полных сечений, не может подчиняться дуальному «бутстрапу» (см. рис. 2). Дело в том, что полные сечения реакций, в которых нет резонансов в прямом канале (например, $K^+p \to K^+p$, $pp \to pp$),

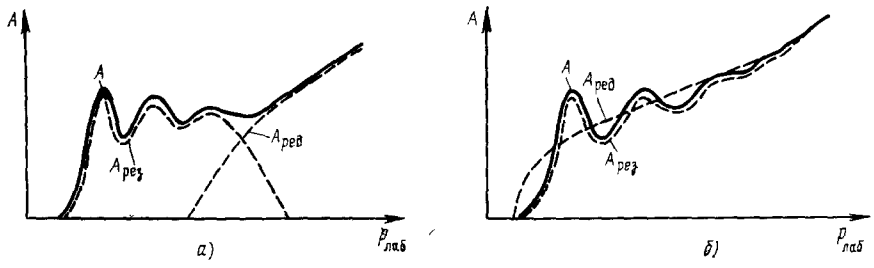


Рис. 4. Амплитуда рассеяния в интерференционной модели (*а*) и в дуальных моделях (*б*) ($A = A_{\text{рез}}, A_{\text{ред}}$).

не стремятся к нулю с ростом энергии, поэтому вклад вакуумного реджеона не должен зависеть от наличия резонансов в прямом канале. Соображение дуальности можно применять либо к процессам, в которых обмен вакуумным полюсом не дает вклада (например, реакции перезарядки), либо к амплитуде рассеяния, из которой вычтен вклад вакуумного реджеона:

$$A_D(s, t) = A(s, t) - P(s, t),$$

где $P(s, t)$ — вклад полюса Померанчука, который имеет вид (3), с положительной сигнатурой (его траектория $\alpha(t)$ при $t = 0$ проходит через 1). Более подробно о вакуумном реджеоне в схеме дуальности см. в гл. 7.

3. СПЕКТР РЕЗОНАНСОВ В ДУАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

Как уже говорилось выше, дуальность — это прежде всего попытка построить хорошее приближение к физической амплитуде рассеяния, ограничиваясь только вкладом всех резонансов. Поэтому совершенно ясно, что именно спектр резонансов, который необходим для решения уравнений (4), играет основную роль в дуальных моделях. Рассмотрим, какие же ограничения, не зависящие от конкретной дуальной модели, накладывают требования дуальности (4) на спектр резонансов.

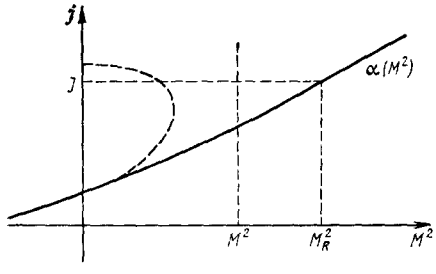


Рис. 5.

а) Прежде всего из (4) следует, что должны существовать резонансы со сколь угодно большой массой (иначе говоря, траектории полюсов Редже $\alpha(t)$ должны неограниченно возрастать с ростом t). Действительно, если все резонансы имеют массу меньше M (т. е. $\alpha(t)$ имеет вид штриховой кривой на рис. 5), то при $s \gg M^2$ резонансов нет и из (5) $\operatorname{Im} A(s, t) = 0$, а не $s^{\alpha(t)}$. Таким образом, $\alpha(t)$ не должны «загибаться», а должны иметь вид сплошной кривой на рис. 5. Такой характер поведения траекторий неплохо согласуется с экспериментом; более того, все известные пока

траектории представляют собой прямые линии (рис. 6). Информацию о траектории $\alpha(t)$ можно получить, во-первых, из того факта, что при $t > 0$ на ней лежат резонансы (область частиц); во-вторых, при $t < 0$

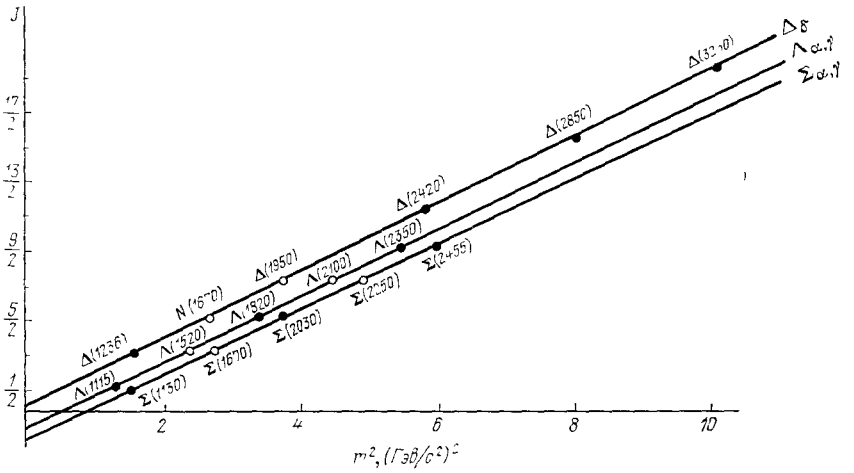


Рис. 6. Δ_δ-, $\Lambda_{\alpha,\gamma}$- и $\Sigma_{\alpha,\gamma}$-траектории [3].

$\alpha(t)$ определяет поведение дифференциального сечения (область рассеяния). Например, Δ_δ-траектория определяет сечение рассеяния $\pi^- p \to \pi^- p$ назад. Данные по траекториям из этих двух областей неплохо согласуются между собой (табл. I). Самая длинная траектория в настоящее время —

Таблица I

Траектории реджеонов (данные [4])

Реджеон	Из рассеяния		Из области частиц		
	$\alpha(0)$	$\alpha'(0)(Гэв/c)^{-2}$	$\alpha(0)$	$\alpha'(0)(Гэв/c)^{-2}$	Вычислена по резонансам
ρ	0,57±0,02	0,95±0,1			
ω	0,4±0,1	0,7±0,3	0,50±0,02	0,92±0,08	ρ, ω, A_2, f
A_2	0,4±0,1	0,6±0,2			
f	0,5±0,2	0,3±2,2			
ρ	0,57±0,02	0,95±0,1	0,46±0,03	0,98±0,05	$\rho(1^-, 765)\, g(3^-, 1660)$
π			0,02	0,75±0,04	$\pi(0^-, 140)\, A_3(2^-, 1640)$
π	0	1,22±0,12	0,02	0,64±0,06	$\pi(0^-, 140)\, \beta(1^{+-}, 1235)$
$B(1^{+-})$					
π	0,15±0,12	0,62±0,23	0,02	0,85±0,1	$\pi(0^-, 140)\, A_1(1^{++}, 1070)$
$A_1(1^{++})$					
$K^*(1^-)$			0,33±0,02	0,84±0,03	$K^*(1^-, 890) K^{**}(2^+, 1420)$
$K^{**}(2^+)$					
K			−0,17±0,01	0,69±0,05	$K(0^-, 495)\, K_A(2^-, 1775)$
K			−0,19±0,02	0,78±0,06	$K(0^-, 495)\, K_A(1^+, 1230)$
$K_A(1230)$					
K			−0,16±0,02	0,66±0,06	$K(0^-, 495)\, K_A(1^+, 1320)$
$K_A(1320)$					
Δ_δ	0,19±0,05	0,87±0,20	0,15	0,90	(См. рис. 6)
$N_\alpha(1/2^+, 5/2^+)$	−0,38±0,04	0,88±0,09	−0,39	1,01	(См. ниже рис. 39)
$N_\gamma(3/2^-, 7/2^-)$			−0,94	0,92	$N(3/2^-, 1520) N(7/2^-, 2190)$
$\Sigma_\alpha(1/2^+, 5/2^+)$	−0,84	1,0	−0,8±0,05	0,90	(См. рис. 6)
$\Sigma_\gamma(3/2^-, 7/2^-)$					
$\Sigma_\delta(3/2^+, 7/2^+)$			−0,25	0,91	$\Sigma(3/2^+, 1385)\, \Sigma(7/2^+, 2030)$
$\Lambda_\alpha(1/2^+, 5/2^+)$			−0,7	0,97	(См. рис. 6)
$\Lambda_\gamma(3/2^-, 7/2^-)$					

это Δ_δ-траектория, на которой лежит самый тяжелый резонанс с массой 3230 *Мэв*. Однако надо отметить, что квантовые числа этого резонанса и резонансов с массами 2850 и 2420 *Мэв* (за исключением изотопического спина) не определены [3]. То же относится и к последним частицам на Λ- и Σ-тракториях. Ситуация среди мезонных траекторий сложнее из-за явно недостаточного значения квантовых чисел мезонных резонансов. В настоящее время можно говорить лишь об одной мезонной траектории в области частиц, а именно о ρ-траектории, на которой лежат мезоны ρ (765) и g (1670); ее параметры неплохо согласуются с данными из области рассеяния (см. табл. I).

б) Хорошо известно, что при рассеянии с большими энергиями существенны угловые моменты $l_0 = pr_0$, где r_0 — радиус сильных взаимодействий, который асимптотически равен $r_0 = (\alpha' \ln s)^{1/2}$ (α' — наклон траектории $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t$), так как асимптотика (согласно (4)) определяется обменом реджеоном. Парциальные волны $a_l(s)$ (см. рис. 1) при $l \gg l_0$ малы и быстро (экспоненциально) падают с ростом l (см. [5]). Рассмотрим рассеяние при большой энергии $s = M_R^2$, где $\alpha(M_R^2) = j$ (см. рис. 5), причем пусть $\alpha(M_R^2)$ растет быстрее, чем $(\alpha' M_R^2 \ln M_R^2)^{1/2}$ (для известных траекторий это условие выполняется) и $j \gg l_0$, тогда

$$\operatorname{Im} a_j(s) = c(j)\, e^{-aj}, \tag{6}$$

где $c(j)$ — степенная функция j, а $a = \sqrt{t_0}/p$, где t_0 — квадрат массы самого легкого резонанса в перекрестном канале ($a + \bar{a} \to b + \bar{b}$), но, с другой стороны (см. (2)),

$$\operatorname{Im} a_j = \frac{8\pi \sqrt{M_R^2}}{p} \frac{\Gamma_i^{\text{el}}}{\Gamma_i}. \tag{7}$$

Сравнивая (7) и (6), получаем, что

$$\frac{\Gamma_i^{\text{el}}}{\Gamma_i} \sim c(j) \exp\left[-\frac{\alpha(M_R^2)}{M_R} \cdot 2\sqrt{t_0}\right] = c(j)\, e^{-bM_R}, \tag{8}$$

если $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha t$ ($b = 2\alpha' t_0^{1/2}$).

Таким образом, относительная вероятность распада в каждый выделенный канал (в нашем случае на канал ab) должна быстро падать с ростом массы резонанса. Это утверждение прекрасно согласуется с данными по барионным резонансам (рис. 7).

в) Однако каким же образом $\operatorname{Im} A(s, t)$ может себя вести как $s^{\alpha(t)}$ при больших энергиях, когда $\operatorname{Im} a_l(s)$ малы? $\operatorname{Im} A(s, t)$ при $s = M_R^2$ равна (см. (1))

$$\operatorname{Im} A(M_R^2 t) = \sum_j \operatorname{Im} a_j(M_R^2) P_j(z) = \beta(t) \left(\frac{M_R^2}{s_0}\right)^{\alpha(t)}. \tag{9}$$

Суммирование ведется, вообще говоря, по всем резонансам с массой M_R и различными спинами. Очевидно, что если в (9) останется только резонанс со спином $j = \alpha(M_R^2)$, то (9) будет нарушено (см. (6)). Противоречия не будет только в том случае, если в сумме (9) будут давать вклад парциальные амплитуды с различными угловыми моментами, в том числе и с $j \leqslant l_0$, для которых $\operatorname{Im} a_j \sim 1$. Иными словами, при каждой массе должно существовать много резонансов с различными спинами, которые лежат на соответствующих траекториях, и этих траекторий должно существовать много. Еще до всякой дуальности при рассмотрении реакций, в которых взаимодействуют частицы с разными массами, было показано, что для аналитичности амплитуды необходимо, помимо главной траектории $\alpha(t)$, существование других траекторий (так называемых дочерних),

которые при $t=0$ отстоят от главной на целое число (рис. 8). Поэтому естественно думать, что вырождение резонансов по массам связано с тем,

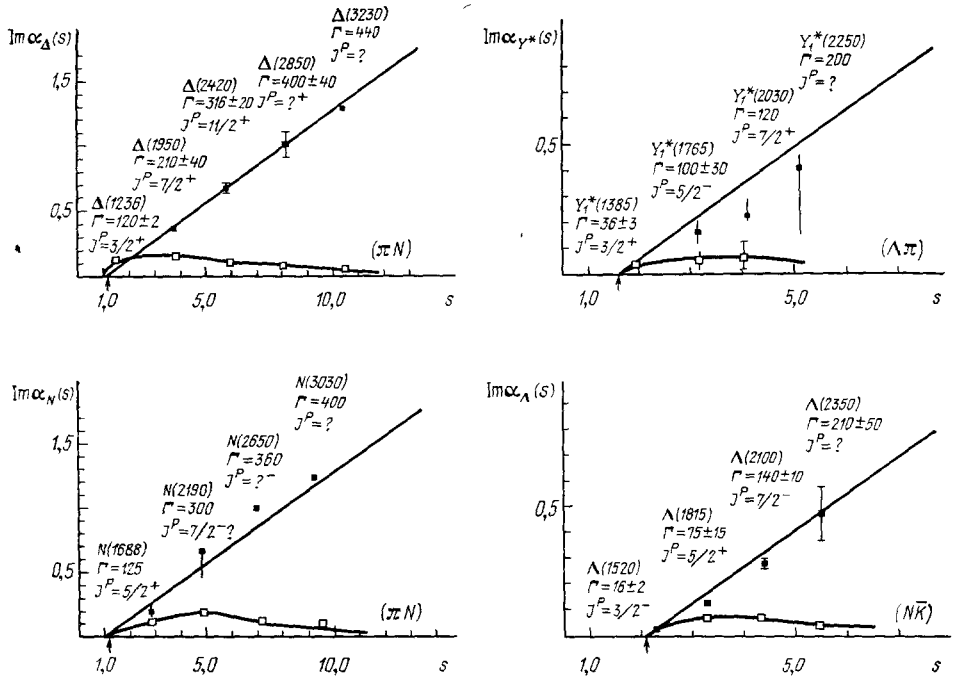


Рис. 7. Полные ширины и ширины распада барионных резонансов в данный канал.

что эти дочерние траектории тоже не заворачиваются и тянутся до бесконечности и именно на них лежат резонансы (рис. 8). Вырождение резонансов по спинам — это наиболее важное и интересное следствие дуальности. К сожалению, мы имеем очень скудный экспериментальный материал и по существу не можем из имеющихся резонансов более или менее уверенно построить ни одной дочерней траектории. Отложим то немногое, что можно сказать по этому поводу, до гл. 5 и отметим только, что факт существования большого количества резонансов и увеличение их числа даже в известном районе масс (хотя относительно достоверности многих из них можно сомневаться) делают такое предположение не невозможным. Особенно интересен факт появления большого числа резонансов с одними и теми же квантовыми числами, но с разными массами, который следует из картины траекторий рис. 8 (см. пунктирную линию на рис. 8, на ее пересечениях с траекториями лежат частицы с одним спином S и разными массами). Из таблиц[3] видно, что сейчас есть три нуклона N $(1/2^+)$ с массами 940, 1470, 1780 *Мэв* и по две частицы $N(3/2^-)$ 1520, 2040, N $(1/2^-)$

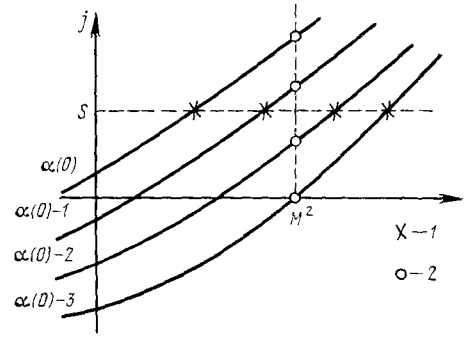


Рис. 8. Главная и три дочерние траектории.

1 — резонансы с одним и тем же спином S и разными массами; *2* — резонансы с одной массой и разными спинами.

1530, 1700, Λ (1/2⁻) 1405, 1670, Λ (3/2⁻) 1520, 1690 *Мэв*. Если это явление не случайно, то оно повышает нашу уверенность в том, что существует вырождение резонансов.

г) Строго говоря, при дуальном подходе учет полной ширины резонансов, т. е. того, что резонансы распадаются на другие частицы, является непоследовательным, так как при этом необходимо предположить, что помимо резонансов существен вклад многочастичных состояний. Однако можно надеяться, что этот вклад, как и все унитарные поправки, будет мал. Естественным параметром малости в этом случае является величина

$$\frac{\Gamma}{\Delta M} \ll 1, \qquad (10)$$

где Γ — ширина резонанса, ΔM — разность масс ближайших резонансов. Из рис. 7 мы видим, что этот параметр не мал, более того — имеет тенденцию к росту (прямые линии на рис. 7) и, по-видимому, (10) нарушается. Окончательно относительно (10) сказать что-либо довольно трудно из-за скудности современного знания резонансов. В частности, все тяжелые резонансы, лежащие на Δ-траектории, ширины которых приведены на рис. 7, получены из фазовых анализов, причем последние делались без учета возможного существования резонансов с одной и той же массой и разными спинами. Если принять их во внимание, то ширины могут довольно сильно измениться и положение с (10) может быть более обнадеживающим. Но даже если (10) не выполняется, это еще не означает, что унитарные поправки велики. Дело в том, что

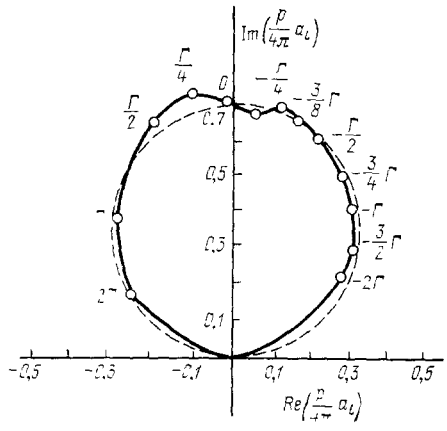


Рис. 9. Диаграмма Аргана для $\frac{p}{4\pi} a_l(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma}{\Delta E + i\Gamma} + \frac{\Gamma}{2(\Delta E + 2i\Gamma)} + \frac{\Gamma}{3(\Delta E + 3i\Gamma)}\right]$,

$\Delta E = \sqrt{s} - \sqrt{s_0}$ (один резонанс на главной траектории и два на дочерних; сплошная линия; штриховая линия соответствует резонансу, с которым легко спутать эту сумму $pa_l/4\pi = 2\,(5/4)\,\Gamma/3\,[\Delta E + i\,(5/4)\,\Gamma]$; значками отмечены значения ΔE).

$$\Gamma = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\alpha(t)}{\alpha'}, \qquad (11)$$

и малость унитарных поправок означает малость Im α (t) по сравнению с Re α (t), т. е. из (11) имеем

$$\Gamma \ll M_R, \qquad (12)$$

что хорошо выполняется. Но в этом случае обнаружение резонансов (особенно лежащих на дочерних траекториях), даже с достоверностью фазового анализа, будет затруднительным (рис. 9), так как при нарушении (10) в данной парциальной волне должно быть много резонансов (см. рис. 8), расстояние между которыми будет меньше их ширины. Последнее замечание, возможно, объясняет, почему мы не видим дочерних траекторий, но в целом ситуация становится очень неопределенной, и утверждение, что амплитуда может быть представлена в виде суммы только резонансов, становится, по существу, не проверяемым, начиная с некоторых энергий (во всяком случае, если ограничиться только бинарными реакциями).

д) Таким образом, спектр резонансов, возможно, не противоречит идее дуальности, но хотелось бы иметь более непосредственное экспери-

ментальное указание на то, что унитарные поправки к дуальной амплитуде малы. В этом отношении интересна работа [7], в которой фазовый анализ πN-рассеяния представлен в новом виде, а именно выделены комбинации парциальных волн s-канала, которые имеют определенный изотопический спин в t-канале $f^T_{j,l}$ (T — изотопический спин, j — полный момент, l — орбитальный момент):

$$f^0_{j,l}(s) = \frac{1}{3}(f^{1/2}_{j,l} + 2f^{3/2}_{j,l}), \tag{13}$$

$$f^1_{j,l}(s) = \frac{1}{3}(f^{1/2}_{j,l} - f^{3/2}_{j,l}). \tag{14}$$

С точки зрения дуальности комбинации (13) и (14) должны вести себя в зависимости от s разным образом. В (14) дают вклад только невакуумные

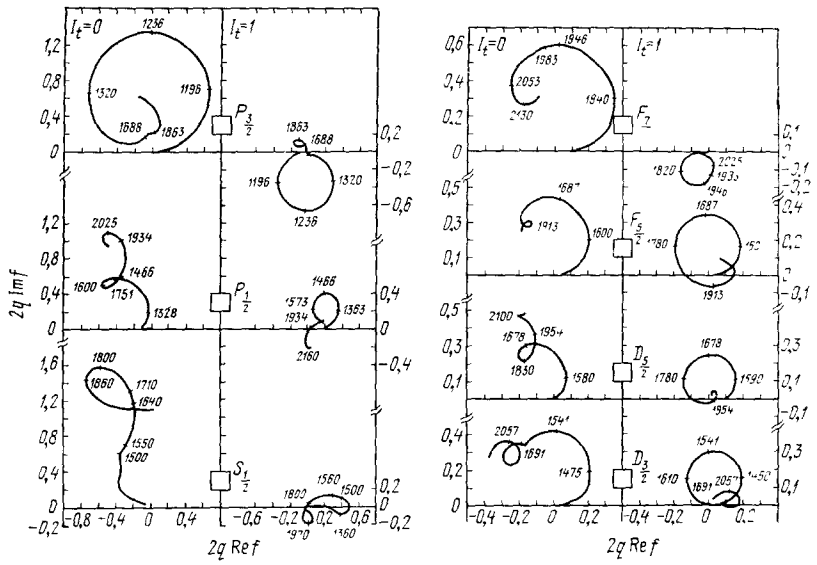


Рис. 10. Диаграммы Аргана для комбинаций амплитуд πN-рассеяния, имеющих определенный изотопический спин в t-канале [7].

полюсы Редже, и поэтому (см. (4)) мы ожидаем для нее чисто резонансного поведения. В (13) дает вклад и вакуумный реджеон, поэтому наличие фона в (13) нас не удивило бы. На рис. 10 приведены диаграммы Аргана для (13) и (14). Видно, что (14) описывает замкнутые петли с очень малым фоном, в то время как в (13) вклад фона велик. Это качественное следствие мало зависит от того или иного фазового анализа и производит довольно сильное впечатление. Во всяком случае, без дуальности непонятно, почему этот фон, который велик в каждой из $f^{1/2}_{j,l}$ и $f^{3/2}_{j,l}$, пропал в (14).

4. ДУАЛЬНОСТЬ ПЛЮС ОТСУТСТВИЕ РЕЗОНАНСОВ В ЭКЗОТИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

Перейдем теперь к более детальным следствиям дуальности и рассмотрим сначала те из них, которые происходят из-за того, что в некоторых каналах реакции отсутствуют резонансы. Остановимся сначала на примере реакции $\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+$ (рис. 11). В s-канале этой реакции нет резонансов, поэтому из (5) следует, что

$$\mathrm{Im} \sum R_i\,(s,t) = \mathrm{Im}\, A\,(s,t) = 0. \tag{15}$$

лл-рассеяние при большой энергии определяется обменом тремя реджевскими траекториями: две из них с положительной сигнатурой (f и f'), на которых соответственно лежат частицы f (1250) и f' (1520) с изотопспином 0 и с положительной G-четностью, и одна траектория

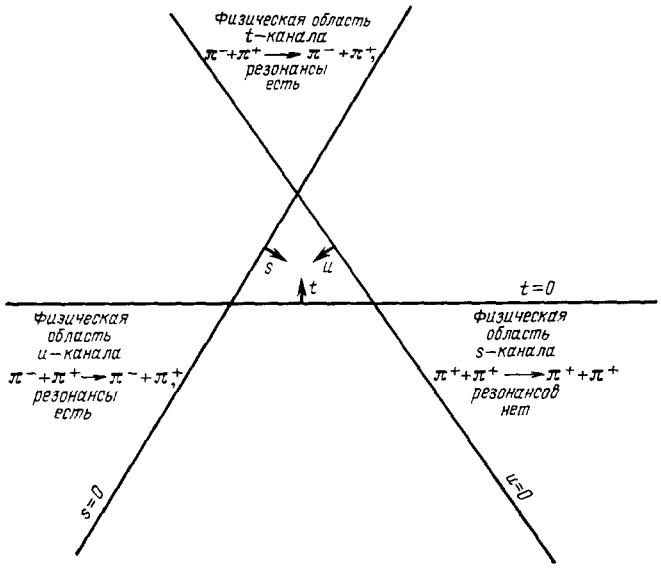


Рис. 11.

с отрицательной сигнатурой (ρ), проходящая через ρ-мезон с массой 760 *Мэв*. (Здесь и в дальнейшем мы будем называть траектории по первой частице, которая лежит на них.)

Из (15) для этой реакции следует

$$\beta_f^{\pi\pi}(t)\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_f(t)}+\beta_{f'}^{\pi\pi}\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{f'}(t)}-\beta_\rho^{\pi\pi}\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\rho(t)}=0. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что (16) имеет два решения:

$$1)\ \alpha_i(t)=\alpha_{f'}(t)=\alpha_\rho(t),\quad \beta_f^{\pi\pi}(t)+\beta_{f'}^{\pi\pi}(t)=\beta_\rho^{\pi\pi}(t); \tag{17}$$

$$2)\ \alpha_f(t)=\alpha_\rho(t),\quad \beta_f^{\pi\pi}(t)=\beta_\rho^{\pi\pi}(t),\quad \beta_{f'}^{\pi\pi}(t)=0. \tag{18}$$

Первое решение соответствует равенству всех траекторий, в том числе $\alpha_f(t)=\alpha_{f'}(t)$, т. е. массы f- и f'-мезонов должны совпадать. Поэтому такое решение возможно только в пределе точной SU_3-симметрии. Если же учесть разницу в массах f- и f'-мезонов, то возможно лишь решение (18), которое определяет способ нарушения SU_3.

а) О б м е н н о е в ы р о ж д е н и е. Из приведенного примера видно, что отсутствие резонансов в некоторых реакциях приводит (при наличии дуальности) к тому, что траектории и вычеты полюсов Редже разных сигнатур равны друг другу [8]. Такое равенство получило название обменного (или сигнатурного) вырождения.

1) Рассмотрим прежде всего, насколько хорошо выполняется и к каким следствиям приводит равенство траекторий реджеонов с разными сигнатурами («слабое обменное вырождение»). Равенство вычетов пока не предполагается. Из исследования большого количества реакций [9, 10] следуют равенства, приведенные в табл. II (по [9]). Для мезонных траекторий они неплохо согласуются с данными из «области рассеяния» (см. табл. I). К сожалению, как уже отмечалось, из «области частиц» эти

траектории восстановить нельзя. Однако если предположить равенства табл. II, то проведенные общие траектории (например, траектория, проходящая через ρ- и f-мезоны) неплохо согласуются с данными из области

Таблица II

Обменно-вырожденные траектории	Реакции
ρf	$\pi\pi \to \pi\pi$
ρA_2 ωf $\varphi f'$	$K\bar{K} \to K\bar{K}$
ωA_2 $A,\ (I=0,2^{--})_{1,8}$ $\pi\,(I=0,1^{+-})_{1,8}$	$\pi\rho \to \pi\rho$
πB $\eta\,(I=0,\ 1^{+-})_{1,8}$ $A_1\,(I=1,2^{-})_1$ $D\,(I=0,2^{--})_{1,8}$	$\bar{K}K^* \to \bar{K}K^*$
ηB	$\rho\rho \to \rho\rho$
$\eta\,(I=0,1^{+-})_{1,8}$ $X_0\,(I=0,1^{+-})_{1,8}$ $D\,(I=0,1^{++})_{1,8}$	$K^*\bar{K}^* \to K^*\bar{K}^*$
K^* (890) K^{**} (1420)	$\pi K \to \pi K$
K (495) K_A (1320) $(I=1/2,2^{--})$ K^* (1240)	$\pi K^* \to \pi K^*$
Δ (3/2+, 7/2+) N (5/2−) N (1/2+, 5/2+) N (3/2−, 7/2−)	$\pi\Delta \to \pi\Delta$
Λ (1/2+, 5/2+) Λ (3/2−, 7/2−) Σ (1/2+, 5/2+) Σ (3/2−, 7/2−) Σ (3/2+, 7/2+) Σ (5/2−)	$\bar{K}N \to N\bar{K}$
Σ (3/2+, 7/2+) Λ (5/2−) Σ (1/2+, 5/2+) Λ (3/2−)	$\pi\Sigma \to \Sigma\pi$
Ξ (1/2+) Ξ (3/2−) Ξ (3/2+) Ξ (5/2−)	$\pi\Xi \to \Xi\pi$
Траектория Ω^- (3/2+) не должна быть связана с системой $(\Sigma\bar{K})$	$\bar{K}\Sigma \to \Sigma\bar{K}$

рассеяния (см. табл. I). Странные барионные траектории очень хорошо совпадают (см. рис. 6), однако вырождение Δ_δ-траектории и N_γ-траектории (на которой лежат частицы $1/2^-$, $5/2^-$ и т. д.) не наблюдается. Правда, равенство этих траекторий следовало из рассмотрения $\pi\Delta$-рассеяния (см. табл. II), и поэтому π_γ-траектория может быть не связана с системой πN, но чем вызвано такое правило отбора, не ясно.

Слабое обменное вырождение приводит к тому, что сечения двух реакций, в которые дают вклад два невакуумных полюса с разной сигнатурой (например, реакции $K^-p \to \pi^-\Sigma^+$, $\pi^+p \to K^+\Sigma^+$, в которые при больших энергиях дает вклад обмен K^* (890) и K^{**} (1420) реджеоны), равны [11].

Действительно, сигнатурные множители (3) несложно переписать для положительной сигнатуры как $e^{-i\pi\alpha(t)/2}\,[-\cos(\pi\alpha/2)]/\sin\pi\alpha$, для отрицательной как $e^{-i\pi\alpha(t)/2}\,i[-\sin(\pi\alpha/2)]/\sin\pi\alpha$, поэтому

$$d\sigma(K^-p \to \pi^-\Sigma^+) = \frac{s^{(2\alpha(t)-2)}}{\sin^2\pi\alpha(t)}\,[|\beta_{K^*}(t)|^2 + |\beta_{K^{**}}(t)|^2] = d\sigma(\pi^+p \to K^+\Sigma^+) \qquad (19)$$

при равенстве траекторий. Соотношение типа (19) в настоящее время можно проверить на реакциях ж,а

$$\left.\begin{aligned} &K^+n \to K^0p\ (K^-p \to \overline{K^0}n),\ K^+p \to K^0\Delta^{++}\ (K^-n \to \overline{K^0}\Delta),\\ &K^-N \to \Lambda\pi\ (\pi^-p \to K^0\Lambda),\ K^-p \to \pi^-\Sigma^+\ (K^+p \to \pi^+\Sigma^+),\\ &K^-p \to \pi^-\Sigma\ (1385)\ (K^+p \to \pi^+\Sigma^+\ (1385)). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Во всех этих реакциях поведение сечений в зависимости от переданного импульса одинаково, но величины сечений различны [11]. Сечение реакций $K^-p \to \pi^-\Sigma$, Σ (1385) вдвое больше $\pi^+p \to K^+\Sigma$, Σ (1385), даже при сравнительно высоких энергиях (для последней реакции в (20) сечения сравнивались при налетающем импульсе от 6 до 16 *Гэв/с*). Говорит ли такое расхождение против обменного вырождения, или же просто в этих реакциях при современных энергиях велик вклад фона, пока не ясно; во всяком случае, если при возрастании энергии соотношение (19) будет по-прежнему нарушаться, то это будет сильным аргументом против обменного вырождения.

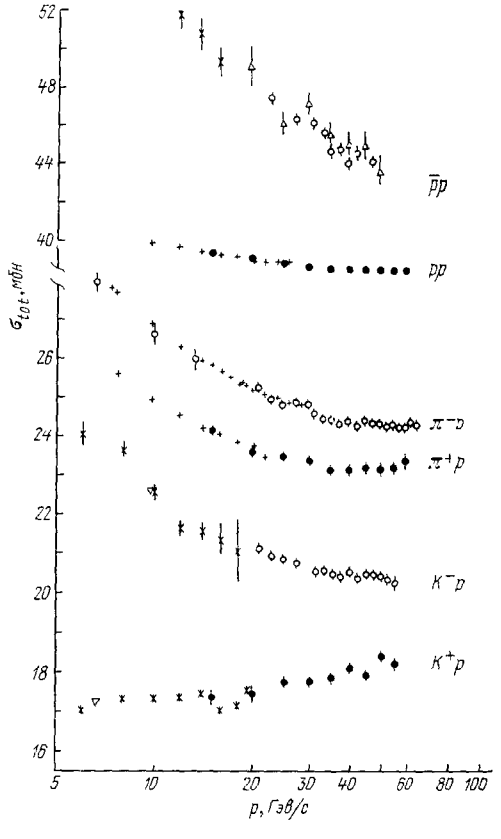


Рис. 12. Зависимость полных сечений от энергии налетающих частиц [12].

2) Равенство вычетов проверить непосредственно довольно трудно, но есть факты, которые указывают на то, что это равенство неплохо соблюдается.

а) Одним из них является поведение полных сечений рассеяния в зависимости от энергии. Полные сечения тех реакций, в которых нет резонансов (например, pp-, pn-, K^+p-, K^+n-рассеяние), а следовательно, вклад всех невакуумных полюсов сокращается (как это происходило в $\pi^+\pi^+$-реакции (16)), должны не изменяться с ростом энергии (так как их сечения обусловлены только вкладом вакуумного полюса, который дает постоянное сечение). Это хорошо выполняется на примере названных реакций (рис. 12), сечения остальных реакций уменьшаются при тех же энергиях. Кроме того, $\mathrm{m}\,A\,(K^+n \to K^0p) = \mathrm{Im}\,A\,(K^+p) - \mathrm{Im}\,A\,(K^+n) = s\,(\sigma(K^+p) - \sigma(K^+n)) = 0$, так как в реакции $K^+n \to K^0p$ нет резонансов. Равенство $\sigma\,(K^+n)$ и $\sigma\,(K^+p)$ неплохо выполняется, во всяком случае разница между ними значительно меньше, чем, например, $\sigma\,(\pi^-p) - \sigma\,(\pi^+p)$ (см. рис. 12).

б) Отметим еще одно качественное следствие соотношений типа (18). Рассмотрим такое значение переданного импульса ($t = t_0$), при котором $\alpha_f\,(t_0) = 0$. В этой точке сигнатурный множитель (η_i в (3)) для реджеонов с положительной сигнатурой (для f-траектории, в частности) обращается в бесконечность, что соответствовало бы существованию частицы с отрицательной массой. Так как этого не может быть, то $\beta_f^{\pi\pi}\,(t)$ должен обращаться в нуль при $t \to t_0$. Но из равенства (18) следует, что и $\beta_\rho^{\pi\pi}\,(t)$ [13] обращается в нуль в той же точке. Без дуальности такое поведение $\beta_\rho^{\pi\pi}$ совершенно не обязательно, так как для ρ-траектории $\eta\,(t)$ не обращается

в бесконечность (отрицательная сигнатура). «Зануление» вычетов приводит к таким интересным следствиям, как минимумы в дифференциальных сечениях. Причем эти минимумы (или, как их называют, «дипы») должны наблюдаться в тех реакциях, где есть резонансы в прямом канале (например, в $\pi^{\pm}p$-, $\bar{p}p$-, $K^{-}p$-рассеянии), но их не должно быть в реакциях, в которых нет резонансов($K^{+}p$, pp). Действительно,

$$\frac{d\sigma}{dt} = |P(s, t)|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,P(s, t)\,\mathrm{Im}\sum_i R_i + |\sum_i R_i|^2, \qquad (21)$$

где суммирование ведется по всем невакуумным реджеонам, а $P(s, t)$ считается чисто мнимым. Для реакций pp, $K^{+}p$ $\mathrm{Im}\sum_i R_i = 0$, так как в них нет резонансов (5); $|\sum_i R_i|^2$ мало (порядка $1/S$), поэтому дифференциальное сечение этих реакций определяется вкладом вакуумного реджеона. Для $\bar{p}p$, например, ситуация иная. $\mathrm{Im}\sum_i R_i \neq 0$, и интерференционный член (который порядка $1/s^{1/2}$) дает не нулевой вклад при всех t, за исключением точки $t = t_0$, в которой он обращается в нуль из-за зануления вычетов. Поэтому дифференциальные сечения этих реакций при $t \to t_0$ должны иметь характерные минимумы.

Таблица III

Реакции	Есть ли минимум в $\frac{d\sigma}{dt}$?	Редже-полюсы, дающие вклад
$\pi^{-}p \to \pi^{0}n$	Да	ρ
$\pi N \to \rho N$	»	ω
$\pi N \to \pi\Delta$	»	ρ
$\gamma\rho \to \pi^{0}p$	»	ω
$\pi N \to \omega N$	Нет	ρ
$\gamma N \to \pi^{+}N$	»	ρ
$\gamma p \to \eta p$	»	ρ
$\pi N \to \omega\Delta$	»	ρ
$\pi^{-}p \to \eta n$	»	A_2
$\pi^{-}p \to \eta\Delta$	»	A_2
$K^{-}p \to \overline{K^{0}}n$	»	$\rho + A_2$
$K^{+}p \to K^{0}\Delta^{++}$	»	$\rho + A_2$
$K^{+}p \to K^{+}p$	»	$P + f - \omega$
$\bar{p}p \to \bar{p}p$	»	$P + f - \omega$
$\bar{p}p \to \bar{p}p$	Да	$P + f + \omega$
$K^{-}p \to K^{-}p$	»	$P + f + \omega$

Такое поведение сечений действительно наблюдается на опыте (рис. 13). Интересно отметить, что дуальность вовсе не требует обращения в нуль всех вычетов при $\alpha(t_0) = 0$. Так, например, в реакции $\pi\pi \to \omega\omega$ во всех каналах есть резонансы, и поэтому нет необходимости требовать равенства вычетов реджеонов с разной сигнатурой; следовательно, вычет $\beta_{\rho}^{\pi\omega}$ не обязан стремиться к нулю при $t \to t_0$. Поэтому не во всех реакциях мы должны ожидать минимумы при $t \to t_0$ [15]. Действительно, если взглянуть на табл. III, то минимумы встречаются только тогда, когда в реакции имеются два мезона с изотопспином 1 (т. е. в соответствующем мезон-мезонном рассеянии есть экзотические каналы, как, например, в $\pi\pi$), а в случае, когда один из мезонов имеет изотопический спин 0, их нет (например, в $\pi N \to \omega N$ вычет $\beta_{\rho}^{\pi\omega} \neq 0$ при $t = t_0$ и минимума нет). Такое

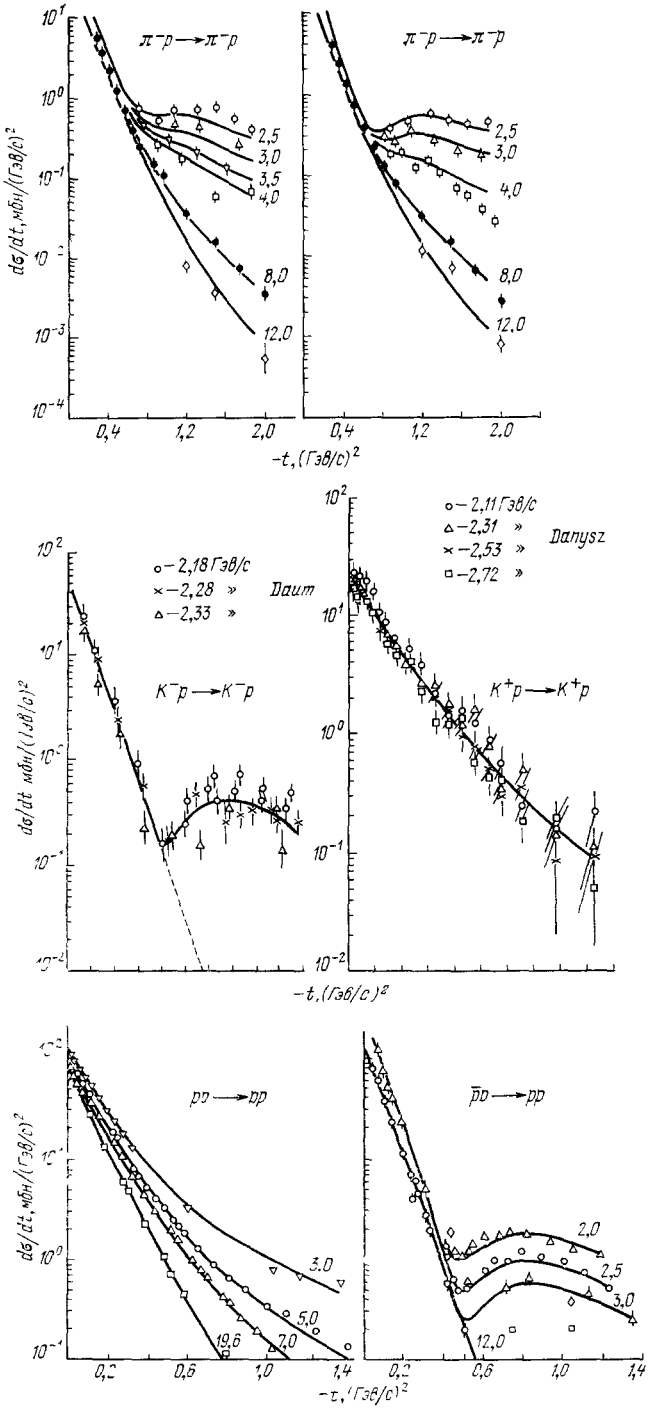


Рис. 13. Поведение дифференциальных сечений $\pi^{\pm} p$, $K^{\pm} p$, pp, $\bar{p}p$ в зависимости от t [14].

поведение сечений может вызвать некоторое удивление, поскольку вычет $\beta_\rho^{NN}(t=t_0)=0$, и это приводит к обращению в нуль вклада ρ-реджеона в реакцию $\pi N \to \omega N$ (и остальные реакции второй группы в табл. III). Однако вблизи $t=t_0$ сечение этих реакций можно написать в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim |a|^2 + 2(\alpha(t))^n \hat{R}_\rho(s,t)\, a + (\alpha(t))^{2n} |\hat{R}_\rho(s,t)|^2, \qquad (22)$$

где a — вклад фона *), а $\hat{R}(s,t)$ — вклад реджеона, причем из вычета выделена степень «зануления» вычета при $t=t_0$. Ясно из (22), что если фон достаточно велик и медленно меняется с изменением t, то только в случае $n=2$ при $t=t_0$ в дифференциальном сечении будет минимум. Такое поведение может осуществляться, только если при $t=t_0$ обращаются в нуль переходы в $N\overline{N}$ и мезон-мезонную систему (т. е. только для реакций первой группы в табл. III). В реакциях $K^-(K^+)\,p \to \overline{K^0}(K^0)\,n(\Delta^{++})$ нет минимума, так как аналогично (19)

$$\frac{d\sigma}{dt} = s^{2\alpha-2}\left(\frac{\beta_\rho(t)^2}{\sin^2 n\alpha} + a\frac{\beta_\rho(t)}{\sin \pi\alpha} + a^2\right) \qquad (23)$$

при $t \to t_0$ не обращается в нуль как $\alpha^2(t)$. Реакции последней группы в табл. III мы уже обсудили выше. Таким образом, дуальность позволяет качественно объяснить характерные особенности поведения дифференциальных сечений.

в) Обсудим теперь предсказания для поляризации нуклонов (P) в реакциях рассеяния псевдоскалярных мезонов на нуклонах

$$P = \frac{\operatorname{Im}\{f^s_{\Delta\lambda=1}(s,t)\, f^{s*}_{\Delta\lambda=0}(s,t)\}}{d\sigma/dt}, \qquad (24)$$

где $f^s_{\Delta\lambda}(st)$ — амплитуда с изменением спиральности $\Delta\lambda$ в s-канале.

Рассмотрим сначала реакции $K^-p \to Kp^-$ и $K^+p \to K^+p$ и посмотрим, какова связь между поляризациями в этих реакциях при больших энергиях. Предположим, что вакуумный реджеон при всех t дает чисто мнимый вклад (т. е. пренебрежем зависимостью $\alpha_P(t)$ от t); тогда (24) будет определяться произведением вклада вакуумного реджеона и $\operatorname{Re}\sum_i R_i$, где R_i — вклад невакуумных полюсов Редже (для реакции Kp это f-, A_r-, ρ-, ω-реджеоны). Для реакций $K^+p \to K^+p$ и $K^-p \to K^-p$

$$\operatorname{Re}\Sigma R_i = S^{\alpha(t)}[\beta_j(t) + \beta_{A_2}(t)]\operatorname{Re}[\eta_f(t) \mp \eta_\rho(t)]. \qquad (25)$$

причем $\mp$ в скобках относится соответственно к первой и второй реакции. Так как

$$\operatorname{Re}[\eta_f(t) \mp \eta_\rho(t)] = \begin{cases} -2/\sin\pi\alpha(t) & \text{для знака} -, \\ -2\cos\pi\alpha(t)/\sin\pi\alpha(t) & \text{для знака} + \text{(см. (3))}, \end{cases} \qquad (26)$$

то, подставляя (26), (25) в (24), имеем

$$P(K^-p) = P(K^+p)\cos\pi\alpha_\rho(t). \qquad (27)$$

Таким образом, при $t \to 0$ ($\alpha_\rho(0) \approx 1/2$) $P(K^-p)$ должна стремиться к нулю быстрее, чем $\sqrt{t}$, при $t=t_0$ ($\alpha(t_0)=0$) — сравниваться с $P(K^+\rho)$, при $t=t_0'$ ($\alpha(t_0')=-1/2$, $t_0' \sim -1$ (*Гэв/с*)^2) — обращаться опять в нуль, а при $t > t_0'$ — иметь другой знак, чем $P(K^+p)$. На рис. 14 мы видим именно такое поведение поляризации [16]. Аналогичное поведение следует и для

*) Этот фон может быть связан либо с поправками к дуальности, например с вкладом двухреджеонных ветвлений (при этом он будет лишь логарифмически падать с ростом энергии), либо с дуальными вкладами, которые быстро вымирают при увеличении энергии (например, (su)-член в модели Венециано; см. ниже гл. 6, п. б)).

поляризаций в pp- и $\bar{p}p$-рассеянии, что также хорошо согласуется с экспериментом [16].

Остановимся теперь на поведении поляризации вблизи $t = t_0$ ($\alpha_\rho(t_0) = 0$). Будем считать по-прежнему, что вакуумный полюс дает

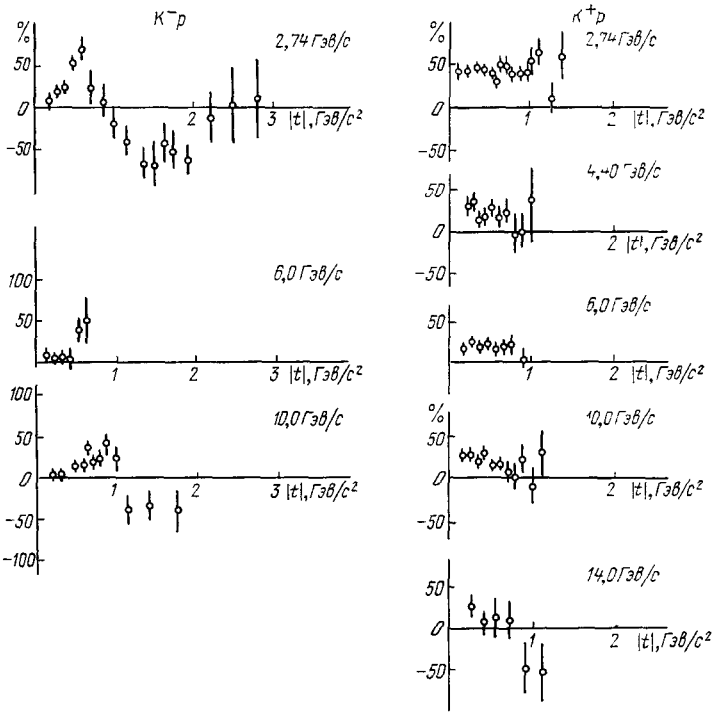


Рис. 14. Зависимость поляризации нуклонов в $K^-p \to K^-p$ и $K^+p \to K^+p$ от переданного импульса t [14].

чисто мнимый вклад и, более того, что он дает вклад лишь в $f^S_{\Delta\lambda=0}$ (сохраняет S-канальную спиральность; более подробно см. в гл. VII). Тогда P в основном определяется выражением

$$P_S = \frac{P(s,t)\,\mathrm{Re}\, f^s_{\Delta\lambda=1}}{|P(s,t)|^2} \tag{28}$$

и в $\mathrm{Re}\, f^s_{\Delta\lambda=1}$ дают вклад лишь невакуумные реджеоны. Если рассмотреть разность $P(\pi^+p) - P(\pi^-p)$ (или $P(K^+p) - P(K^-p)$, то она определяется только невакуумными реджеонами с отрицательной сигнатурой (для $P(\pi^+p) - P(\pi^-p)$)—только ρ-реджеоном), причем

$$P(\pi^+p) - P(\pi^-p) = \frac{\beta_\rho(t)\,\mathrm{tg}\,(\pi\alpha(t)/2)}{P(s,t)}. \tag{29}$$

Так как при $t = t_0$ $\beta_\rho(t_0) \sim \alpha(t_0)$, $\mathrm{tg}\,(\pi\alpha(t_0)/2) \sim \alpha(t_0)$, то в (29) при $t = t_0$ должен проявляться нуль второго порядка (с точки зрения дуальности [17]), что хорошо согласуется с экспериментом (рис. 15). Для аналогичных сумм поляризаций остается вклад реджеонов с положительной сигнатурой (f-реджеон для πp-рассеяния) и

$$P(\pi^+p) + P(\pi^-p) = \frac{\beta_f(t)\,\mathrm{ctg}\,(\pi\alpha(t)/2)}{P(s,t)}. \tag{30}$$

При $t = t_0$ $\beta_t \sim \alpha(t)$, $\operatorname{ctg}[\pi\alpha(t)/2] \sim 1/\alpha(t)$, и поэтому (30) не должно обращаться в нуль при $t = t_0$ [17] (см. рис. 15).

Таким образом, обменное вырождение приводит к такой параметризации вычетов полюсов Редже, которая хорошо согласуется (качественно) как с поведением упругих сечений, так и с данными по поляризации.

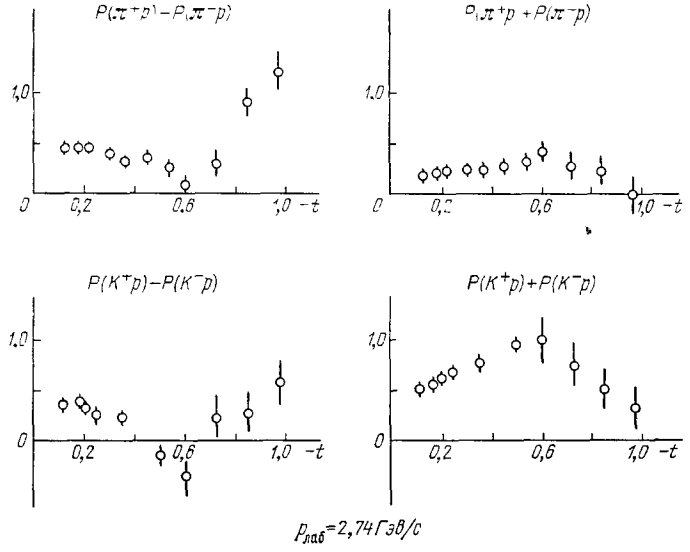


Рис. 15. $P(K^+p) \pm P(K^-p)$, $P(\pi^+p) \pm P(\pi^-p)$ в зависимости от переданного импульса [18].

Это, конечно, не означает, что при более количественном подходе дуальность сама по себе обеспечит удовлетворительное согласие с экспериментом. Более того, учет ветвлений, связанных с перерассеянием, т. е. с обменом двумя или более реджеонами, один из которых обязательно вакуумный (рис. 16), необходим для объяснения таких явлений, как пересечение $d\sigma(K^-p)/dt$ и $d\sigma(K^+p)/dt$ при $t \approx -0{,}2$ (*Гэв/с*)^2 [19], для (ответа на вопрос, почему положение минимумов в разных реакциях различно, а в некоторых даже зависит от энергии (например, в $\bar{p}p$ минимум при $t_0 = -0{,}5$ (*Гэв/с*)^2, в $\pi^\pm p$ при $t = -0{,}6$ (*Гэв/с*)^2, а в K^-p при $t_0 = -0{,}85$ (*Гэв/с*)^2, причем его положение изменяется с ростом энергий от $t_0 = -0{,}7$ до $-1{,}16$ (*Гэв/с*)^2 [14]). В этом отношении любопытен также тот факт, что минимумы во всех реакциях табл. III можно объяснить также с помощью перерассеяния (см. рис. 16), даже не предполагая зануление вычетов реджеонов при $t = t_0$. При этом надо только учесть, что при обработке всех реакций с учетом рис. 16 было замечено, что при полном изменении S-канальной спиральности ($\Delta\lambda$), равном 0 (для отрицательной сигнатуры), получается минимум при $t = t_0 \sim -0{,}2$ (*Гэв/с*)^2, при $\Delta\lambda = 1$ $t_0 \approx 0{,}6$ (*Гэв/с*)^2, при [20] $\Delta\lambda = 2$ $t_0 \sim -2$ (*Гэв/с*)^2, поэтому в дифференциальных сечениях реакций, в которых преобладает амплитуда с $\Delta\lambda = 1$, будет минимум при $t_0 = -0{,}6$ (*Гэв/с*)^2, а в остальных нет. Если принять соображение дуальности, то в пределе полной SU_3-симметрии получается отношение F/D для связи мезонов с нуклонами такое, что f- и ω-траектории не изменяют $\Delta\lambda$ в нуклонной вершине, в то время как для ρ и A_2 доминирует $\Delta\lambda = 1$. В $\pi N \to \omega N$ дает вклад ρ-полюс, в вершине $\rho\omega\pi$ есть только $\Delta\lambda = 1$, в вершине $\rho N\bar{N}$ доминирует также $\Delta\lambda = 1$, так что общее изменение спиральности в этой реакции равно 0 и 2 и минимума нет. В $\pi^+p \to \rho^+p$ основной вклад дает обмен ω-реджеоном и, следовательно, $\Delta\lambda = 0$ в вершине $\omega\bar{N}N$, общее $\Delta\lambda = 1$ и минимум есть [18]. К такому рассмотрению критична реакция $\pi^-N \to A_2^0N$, которая идет за счет обмена ρ-реджеоном и, следовательно, общее $\Delta\lambda = 2$ и не должно быть минимума. В то же время, согласно последовательному дуальному объяснению, такой минимум должен быть, так как в реакции $\pi\pi \to A_2A_2$ есть экзотические каналы.

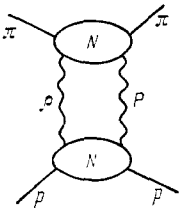


Рис. 16.

Такая возможность другого объяснения экспериментальных фактов заставляет с осторожностью относиться к оценке успеха предсказаний дуальности, хотя их качественный характер, их универсальность при рассмотрении такого большого числа фактов являются достаточно впечатляющими.

б) Дуальность и симметрии. Посмотроим теперь, каков должен быть спектр резонансов, каково должно быть нарушение симметрии для того, чтобы выполнялись условия (4), если при этом предположить, что существуют группы резонансов, близких по массам, соответствующие мультиплетам SU_3 (об SU_3 см., например, [21]).

1) *Угол смешивания.* Рассматривая ππ- и KK-рассеяние, из условий, аналогичных (16), мы получим

$$\beta_{f'}^{\pi\pi}(t)=0,\ \beta_{A_2}^{KK}(t)=\beta_f^{KK}(t). \tag{31}$$

Напомним, что наблюдаются нонеты мезонов с приблизительно одинаковой массой, причем два из этих мезонов имеют одинаковые квантовые числа ($Y=S=T=0$), для векторных мезонов (1^-) это ω- и φ-мезоны, для тензорных (2^+) — f (1260) и f' (1515). Соотношение (31) позволяет различать эти частицы по распадам в систему ππ : f' (1515) не распадается на ππ[22] ($\beta_{f'}^{\pi\pi}(t)=0$ при всех $t<0$ и, следовательно, и при всех $t>0$; в частности, при $t=m_{f'}^2$). Согласно SU_3 наличие в нонетах двух вырожденных состояний приводит к перестройке волновых функций даже при нарушении SU_3 в нулевом порядке. Это характеризуется обычно с помощью угла смешивания (ϑ):

$$\begin{aligned}|f'\rangle &= \sin\vartheta\,|f_1\rangle+\cos\vartheta\,|f_8\rangle,\\ |f\rangle &= \cos\vartheta\,|f_1\rangle-\sin\vartheta\,|f_8\rangle,\end{aligned} \tag{32}$$

где f_1 и f_8 — состояние синглета и октета SU_3. Используя (31), (32) и значение коэффициентов Клебша — Гордана для SU_3 [23], имеем

$$\begin{aligned}\frac{g_8}{\sqrt{5}}\cos\vartheta-\frac{g_1}{\sqrt{8}}\sin\vartheta&=0,\\ \frac{g_1}{\sqrt{8}}\cos\vartheta+\frac{g_8}{\sqrt{20}}\sin\vartheta&=-\sqrt{\frac{3}{20}}\,g_8;\end{aligned} \tag{33}$$

g_1 и g_8 — константы связи синглета и октета SU_3 с октетом псевдоскалярных мезонов. Из (33) $\operatorname{tg}\vartheta=1/\sqrt{2}$. Такой же угол смешивания получается в модели кварков (см., например [24]). Это не удивительно, так как в ней тоже запрещен распад $f'\to 2\pi$. Рассмотрев реакции $\pi^+\pi^+\to\rho^+\rho^+$, $K^+K^+\to K^{*+}K^{*+}$, мы получим точно такой же угол смешивания для векторных мезонов. Одинаковые углы смешивания хорошо согласуются с массовыми формулами. Таким образом, дуальность дает результат, который ранее считался успехом модели кварков [24]. Более того, равенства $\alpha_\rho(t)=\alpha_\omega(t)=\alpha_{A_2}(t)=\alpha_f(t)$ приводят к массовым формулам $m_\omega^2=m_\rho^2$, $m_{A_2}^2=m_f^2$, которые также получались в модели кварков и хорошо выполняются.

2) *Спектр резонансов.* Весь богатый экспериментальный материал по резонансам позволяет сформулировать довольно простое правило относительно их квантовых чисел: наблюдаются только те резонансы, которые предсказываются простейшей моделью кварков. В этой модели все мезоны состоят из пары кварк—антикварк, а барионы из трех кварков (подробнее в [24]). Отсюда следует, что не существует барионных резонансов с $Q>2$ и $S=0$; $|Q|>1$ и $S=\pm1$; $S>1$ и $S<-2$, а мезонных с $|Q|>1$ и $|S|>1$.

Теперь можно сформулировать общий подход к исследованию спектра резонансов в дуальности. Предположим, что *никакое* из запрещенных (экзотических) состояний не имеет резонансов, а все разрешенные имеют. Тогда из требований дуальности (из уравнений, аналогичных (16), для всех экзотических каналов) можно вывести ограничения на вычеты и траектории. Удобнее полученные результаты привести на языке SU_3. Для мезонов [25];

а) траектории и вычеты полюсов Редже с одними и теми же P_r и G_r должны быть равны ($P_r = (-1)^j P$, $G_r = (-1)^j C$, где P — четность, C — зарядовая четность, j — спин резонанса);

б) должны существовать мезоны с $j^{CP} = 0^{-+}, 1^{--}, 2^{++}, 1^{++}, 0^{++}$, т. е. те, которые получаются в модели кварков при классификации частиц по L — S-возбуждениям системы кварк — антикварк [24].

Для барионов [26]:

а) для $P_r = +1$ ($P_r = (-1)^{j-1/2} P$) октеты ($\{8\}$) с $j^P = 1/2^+, 5/2^+, 9/2^+ \ldots$ (α-траектории) должны быть вырождены с $\{1 + 8 + 10\}$ с $j^P = 3/2^-, 7/2^-$ (γ-траектория), причем все октеты имеют $F = 1/2$ (где $F = F/(F+D)$) для связи с октетом псевдоскалярных мезонов;

б) для $P_r = -1$ $\{8 + 10\}$ с $j^P = 3/2^+, 7/2^+$ (δ-траектория) должна быть вырождена с $\{8\}$ $j^P = 1/2^-, 5/2^-$ (β-траектория), причем $F = -1/2$;

в) дуальность определяет отношение F/D для связи нонетов векторных и тензорных мезонов с нуклонами [27], для амплитуды без изменения спиральности ($\Delta\lambda = 0$) чистая F-связь, для $\Delta\lambda = 1$ $F/D = -1/3$.

Прежде всего поясним на простом примере, как из дуальности возникает необходимость в той или иной частице. Рассмотрим реакцию

$$\pi^+(p_1) + \pi^+(p_2) = \rho_1^+(p_3) + \rho_2^+(p_4). \tag{34}$$

Амплитуду ее можно записать в виде

$$A(st) = A_1(\rho_1 p_1)(\rho_2 p_2) + A_2\{(\rho_1 p)(\rho_2 q) + (\rho_2 p_1)(\rho_1 q)\} + A_3(\rho_1 q)(\rho_2 q) + A_4(\varepsilon_{\mu\lambda\sigma\nu}\rho_1\mu p_{2\nu} p_{3\lambda}\rho_{1\sigma})(\varepsilon_{\mu\lambda\sigma\nu}\rho_{1\mu}\rho_{2\lambda}^{*}\rho_{3\nu}\rho_{2\sigma}), \tag{35}$$

где $q = p_1 - p_3$.

Реджеоны с $P_r = +1$ (в частности, ω, ρ, A_2 и f) дают вклад только в A_4 [28], в A_1, A_2, A_3 дают вклад только реджеоны с $P_r = -1$ (π-мезон, например). Однако в (34) нет резонансов; следовательно, $\mathrm{Im}\, A_1 = 0$ из (5), но этого не может быть, если учитывать обмен только π-реджеоном. Поэтому, помимо π-реджеона, мы должны потребовать, чтобы был реджеон с тем же P_r, но с другой сигнатурой. Такой траекторией является траектория, проходящая через 1^{+-}, и она должна быть вырождена с π-траекторией.

Обсудим спектр барионов.

1) N_α и N_γ должны вырождаться с Δ_γ; в [3] есть резонанс Δ (1670, $3/2^-$), который может лежать на Δ_γ-траектории, но он связан с системой πN значительно слабее N (1520; $3/2^-$).

2) На траектории N_β мы имеем резонанс (1670; $5/2^-$) (рис. 6), однако остальных частиц на этой траектории не обнаружено. Особенно это заметно по сравнению с Δ_δ-траекторией (самой длинной в настоящее время). Отсутствие резонанса с $j = 1/2$ на N_β-траектории (масса ~ 700 *Мэв*) можно объяснить занулением вычета в этой точке, то тогда в этой же точке из-за обменного вырождения должен обратиться в нуль и вычет Δ_δ-траектории при $\alpha_\Delta = 1/2$. Из сечений $\pi^\pm p$-рассеяния и перезарядки $\pi^+ p \to \pi^0 n$ можно сделать вывод, что фаза между амплитудами с изотопическим спином 1/2 и 3/2 при рассеянии назад равна 60°, что исключает появление фактора $\alpha_\Delta - 1/2$ в вычете Δ-реджеона [4a].

3) Должен существовать октет $3/2^+$, вырожденный с декаплетом, причем его связь с мезон-барионным каналом не может быть слишком слабой (например, Σ этого октета должна быть подавлена в два раза по сравнению с $\Sigma(1385)$). Такого октета не найдено; правда, существует резонанс $7/2^+$ с массой 1990 *Мэв*, вырожденный с Δ (1950—$7/2^+$), однако не ясно, почему отсутствует октет $3/2^+$. (Заметим, что занулить вычет множителем $\alpha - 3/2$ аналогично N_β $(1/2)^-$ в этом случае нельзя, так как это будет означать, что Δ (1236) не распадается на πN из-за обменного вырождения.)

Таким образом, ситуация с вырождением в мезон-барионном рассеянии совершенно не удовлетворительна. Возможно, это связано с тем, что при анализе мы предполагали справедливость SU_3. В частности, если считать [29], что $\Lambda_{\alpha\gamma}$ и $\Sigma_{\alpha\gamma}$ не вырождены между собой (как это должно быть в точной SU_3), то решение дуальных уравнений (4) не приводит к необходимости существования октета $3/2^+$. Если вообще не предполагать SU_3, то траектории N_γ, N_β могут быть связаны с каналом πN сколь угодно

слабо (однако в канал $\pi\Delta$ они должны распадаться так же, как N_α и Δ_σ; см. табл. II).

Однако, с другой стороны, предсказанные отношения F/D для октетов хорошо согласуются со всей совокупностью экспериментальных данных [30, 31]. Кроме того, только при сохранении SU_3 вычет N_2-реджеона зануляется при $u_0 = -0{,}2$ $(Гэв/c)^2$ $(\alpha_{N_\alpha}(u_0) = -1/2)$ (так как в πN-рассеянии нет экзотических каналов, но они есть в реакции K^+p) и обеспечивает минимум при $u = u_0$ в рассеянии назад [4а]. Поэтому вполне возможно, что дело тут не в SU_3, а в нарушении самой дуальности. В частности, если предположить, что в канале $B\bar{B} \to M\bar{M}$ велик вклад не только резонансов [9], то для мезон-барионного рассеяния не требуется существования траектории $\{8, 3/2^+\}$, вырожденной с $\{10, 3/2^+\}$, не фиксируются F/D в октетах, N_α и N_γ не связаны между собой, т. е. тоже ликвидируются все трудности. Таким образом, при рассмотрении мезон-барионного рассеяния возникает альтернатива: либо SU_3 существенно нарушается, либо дуальность противоречит экспериментальным данным по спектру барионных резонансов.

К сожалению, это не единственная трудность дуального подхода. В частности при рассмотрении реакции $\rho^+\rho^+ \to B^+B^+$ (B-мезон, 1^{+-}) аналогично (16) мы получаем, что

$$\alpha_\eta(t) = \alpha_\pi(t) \text{ и } \beta^{\rho B}_{x_0} = 0. \tag{36}$$

Это означает, что $m^2_\eta = m^2_\pi$ и угол смешивания в нонете 0^- такой же, как в нонете векторных мезонов, что, конечно, противоречит эксперименту. Есть ли какой-нибудь выход из этой трудности? В настоящее время есть основание думать, что существуют нонеты 1^{++} A_1 (1070), K_α (1243), D (1288) D' (?)) и 1^{+-} (B (1235), K (1320), H,'H (1000))[3]. Если предположить, что с α_π будут вырождены не α_B и α_H, а α_{A_1} и α_H (при этом с α_η соответственно вырождены α_B и α_D), тогда условия дуальности не требуют равенства m_π и m_η и определенного угла смешивания, однако при этом все резонансы, лежащие на траекториях $\alpha_\pi = \alpha_{A_1} = \alpha_H$, не должны распадаться на систему $\bar{K}K^*$ (890) [32]. Значит, условия дуальности могут быть согласованы со спектром наблюдаемых частиц (даже для мезон-мезонного рассеяния), только если появляются новые правила отбора, не связанные с внешними квантовыми числами. Это требует экспериментальной проверки.

в) Трудности в барион-барионном рассеянии. Предыдущее рассмотрение показало, насколько полезными могут быть идеи дуальности, однако последовательное согласование дуальности с отсутствием экзотических состояний оказалось невозможным [33]. Для того чтобы пояснить характер возникающих противоречий, рассмотрим, например, реакцию $p + n \to \Delta^{++} + \Delta^-$. Эта реакция не имеет резонансов и в прямом канале (нет резонансов с барионным числом 2), и в перекрестном (т. е. $\bar{\Delta}^{++} + n \to \bar{p}\Delta^-$, где должны давать вклад мезонные резонансы с двойным зарядом, которых нет). Поэтому условия (4) означают, что должна обращаться в нуль вся амплитуда этой реакции, а не только ее мнимая часть. Из этого следует, в частности, что вычеты f- и A_2-реджеонов, которые дают вклад в эту реакцию, должны обращаться в нуль. Это, однако, противоречит экспериментальным данным по реакциям $\pi N \to \pi\Delta$, $KN \to K\Delta$, $\pi N \to \eta\Delta$, которые хорошо согласуются с обменом векторными и тензорными реджеонами [4б]. Таким образом, требования дуальности противоречат экспериментальным данным. Поэтому, для того чтобы спасти дуальность, необходимо существование экзотических резонансов, причем проще всего предположить, что такие резонансы существуют в системе $B\bar{B}$ (для реакции $pn \to \Delta^{++}\Delta^-$ достаточно предположить, что есть резонанс в системе $\Delta^{++}\bar{n}$ ($S = 0$, $Q = 2$)). Напомним, что такие резонансы помогли бы нам избавиться и от плохого спектра барионных резонансов. Экспериментально такие резонансы не обнаружены, и их поиск является очень важным для идей дуальности.

Возникает в связи с этим вопрос, нельзя ли сформулировать какие-то правила, которые позволили бы определить, к каким процессам можно применять последовательно требования дуальности? В работах [34, 35] предложены простые графики для изображения принципа дуальности и определения, в каких каналах есть экзотические резонансы. По существу в этих правилах учтено то, что наблюдаются резонансы, разрешенные простой моделью кварков. Эти правила следующие:

1) Изображаем барион в виде трех параллельных линий, направленных в одну сторону (три кварка QQQ), а мезоны в виде двух противоположно направленных линий (кварк и антикварк $Q\bar{Q}$).

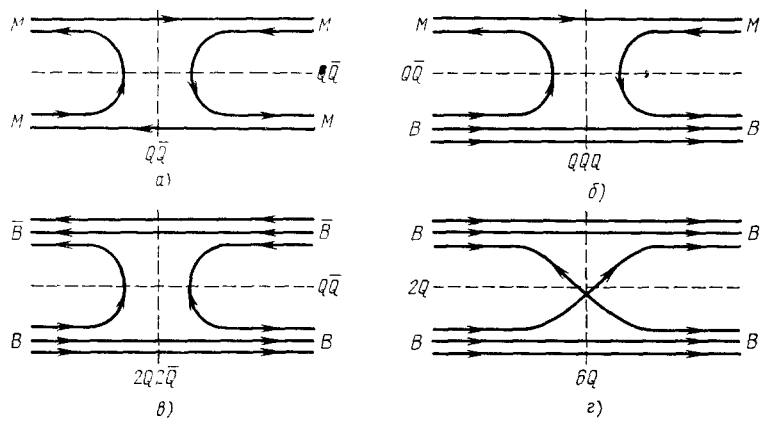


Рис. 17. Кварковые дуальные диаграммы для $MM \to MM$ (*а*), $MB \to MB$ (*б*), $\bar{B}B \to \bar{B}B$ (*в*) и $BB \to BB$ (*г*).
M — мезон, B — барион.

2) Процесс рассеяния изображается в виде перераспределения линий, соответствующих внешним частицам (рис. 17). Тогда, если можно для какой-нибудь реакции нарисовать планарный график (т. е. график, в котором линии не пересекаются), для которого в промежуточном состоянии есть либо $Q\bar{Q}$, либо QQQ, то эта реакция дуальна в смысле условий (4). Если в промежуточном состоянии находится большее число линий (даже если график планарен), то мнимая часть амплитуды равна нулю. Из этих правил, в частности, получаем, что BB- и $\bar{B}B$-процессы не подчиняются принципу дуальности, так как для них какое-нибудь деление обязательно содержит четыре линии (рис. 17), в то же время для мезон-мезонного и мезон-барионного рассеяния можно применять соображение дуальности (рис. 17).

Смирившись с тем, что для BB-рассеяния нельзя говорить о дуальности, попробуем тем не менее что-либо сказать об этих процессах, исходя из MM- и MB-рассеяния. Ясно, что по крайней мере при больших энергиях это можно сделать, используя свойство факторизации вычетов полюсов Редже. Так, например, рассматривая реакции $\pi^+\pi^+$-, K^+K^+-, K^+K^0-, K^+p-рассеяния, мы найдем, что

$$g_\rho^{\pi\pi} = g_f^{\pi\pi},\quad g_\omega^{KK} = g_{A_2}^{KK} = g_f^{KK},\quad \text{а}\quad g_\rho^{pp} = g_{A_2}^{pp},\quad g_\omega^{pp} = g_f^{pp} \tag{36'}$$

(относительно обозначений см. [3]). (36′) приводит к тому, что сечение pp-рассеяния постоянно, не имеет минимумов по переданному импульсу и сохраняет остальные предсказания первого раздела этой главы.

Полное рассмотрение подобных ограничений [36] показало, что если предположить равенство отношений F/D для векторных и тензорных мезонов, то для BB- и BD-рассеяния (B — член октета, D — декуплета) мнимая часть амплитуды равна нулю при большой энергии. Иначе говоря, из дуальности для MB- и MM-рассеяния следует, что в системе BB и BD нет резонансов (по крайней мере при большой энергии). Если при

этом $F/D = 1/2$, то и в системе $B\bar{B}$ экзотических резонансов тоже нет. Однако для $B\bar{D}$-, $D\bar{D}$-рассеяния в экзотических каналах получается вклад, который не может быть ничем ликвидирован; следовательно, именно в этих каналах надо предположить существование резонансов, желая «спасти дуальность».

Таким образом, мы видим, что дуальность приводит к очень интересным и согласующимся с экспериментом следствиям (обменное вырождение, отношение F/D для SU_3-мультиплетов, угол смешивания), однако при рассмотрении барион-барионного рассеяния мы встречаем трудности, из которых нет выхода (при сохранении требований дуальности), если только не существуют экзотические резонансы.

Приступая к описанию более конкретных дуальных моделей, мы должны уже нести с собой груз неувязок общих принципов в BB-рассеяние и ощущение того, что строгая формулировка дуальности не соответствует действительности.

5. МОДЕЛЬ ВЕНЕЦИАНО

До сих пор мы рассматривали те ограничения, которые необходимы для того, чтобы условия дуальности (4) соблюдались. Однако остается пока неясным, возможно ли построить амплитуду рассеяния, которая бы удовлетворяла всем требованиям дуальности. Венециано предложил [37] конструировать амплитуды из сумм

$$V(s, t) = \sum C_{mk}^{p} \frac{\Gamma(m-\alpha(s))\,\Gamma(k-\alpha(t))}{\Gamma(p-\alpha(s)-\alpha(t))}. \tag{37}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $\alpha(s)$ и $\alpha(t)$ — траектории, на которых лежат резонансы в s- и t-каналах реакции. В частности, амплитуда рассеяния скалярных частиц с $Q = S = T = 0$ имеет вид

$$A(s, t) = -[V(s, t) + V(u, t) + V(s, u)]. \tag{38}$$

Если траектории линейны, т. е.

$$\alpha(t) = a + bt, \tag{39}$$

то амплитуда (38) имеет только полюсы по всем переменным и правильную реджевскую асимптотику, т. е. удовлетворяет условиям (4). Остановимся подробнее на основных свойства (37) и (38).

а) *Спектр траекторий.* В модели Венециано (МВ) при условии (39) вычет в полюса $s = s_0$ ($\alpha(s_0) = n$), если ограничиться первым членом ($p = m = k = 0$) в (37), равен

$$V(s, t)_{s\to s_0} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha(s)} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha(t))}{\Gamma(-n-\alpha(t))} \to$$

$$\to \frac{\alpha(t)(\alpha(t)+1)\ldots(\alpha(t)+n)}{(\alpha(s)-n)\,n!} = \frac{1}{s-s_0} Q_n(t), \tag{40}$$

где $Q_n(t)$ — полином n-й степени по t. Так как $t = -2p^2(1-z)$, то Q_n — полином n-й степени и по z, а следовательно,

$$Q_n(t) = \sum_{l=0}^{n} C_l P_l(z). \tag{41}$$

(41) и (40) означают, что в (38) с массой s_0 существуют резонансы со всеми значениями спина от 0 до n, т. е. в МВ существует множество траекторий, которые параллельны друг другу и сдвинуты на единицу (рис. 18; кружками отмечены частицы со спинами от 0 до n при $\alpha(s_0) = n$ и $n = 3$). Таким образом, в МВ спектр дочерних траекторий, о которых шла речь выше

(в гл. III), имеет вполне конкретный вид (рис. 18), и он является самым существенным в МВ. К сожалению, именно о дочерних траекториях ничего почти нельзя сказать в настоящее время. Интересна попытка [38] расклассифицировать по траекториям все бозонные резонансы, которые сейчас известны (т. е. которые так или иначе вошли в таблицы [3]). На рис. 19 изображена ρ-мезонная траектория и ее дочерние. Видно, что картина производит сильное впечатление, резонансы легли на почти параллельные прямые и пер сечение с осью J отличается у них на 1. Но, к сожалению, из этой совокупности резонансов только ρ-мезон, да, пожалуй, g (1700) является твердо установленными, и даже на рис. 19 есть одно пустое место: нет дочериего резонанса к f (1250) с квантовыми числами 1^- и массой 1300 *Мэв*. Кстати, именно этого же мезона не хватает для описания данных по электромагнитному формфактору нуклона [39].

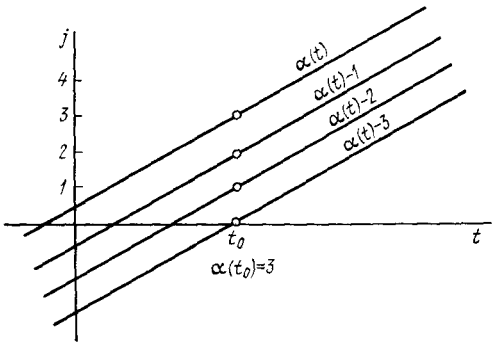


Рис. 18. Спектр траекторий в модели Венециано (главная и три дочерние).

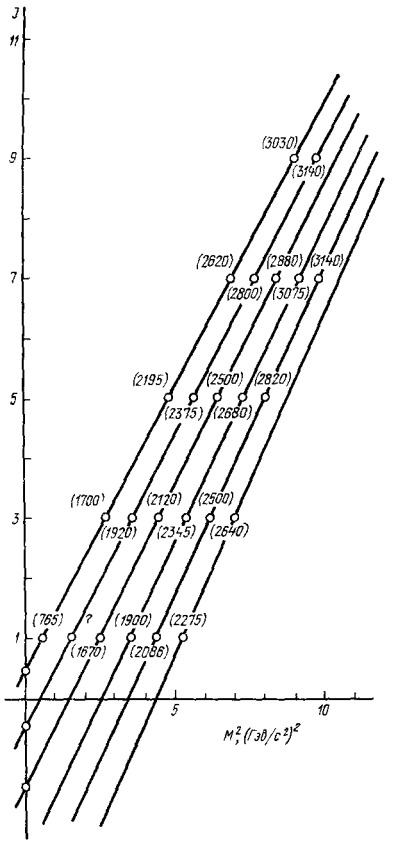


Рис. 19. ρ-траектория и дочерние к ней [38], проведенные через резонансы, которые так или иначе вошли в [3].

б) Если предположить спектр траекторий МВ, то можно показать, что аклоны (параметр в (39)) всех траекторий должны быть равны. Действительно, рассмотрим, например, реакции

$$\pi^+\pi^0 \to \pi^+\pi^0,\ \pi^+\pi^0 \to \bar{K}^0K^+,\ K^+\bar{K}^0 \to K^+\bar{K}^0. \tag{42}$$

В реакции (42) в прямом канале дают вклад резонансы, лежащие на ρ-траектории (в последней — еще и A_2-траектории), однако в t-канале присутствуют разные траектории (f-реджеон — для первой и последней, K^* — для средней). Возьмем некоторый резонанс на ρ-траектории в s-канале, тогда по условию факторизации (рис. 20) вычет в этом полюсе для реакций (42) связан условием

$$r(\pi^+\pi^0 \to \pi^+\pi^0)\, r(K^+\bar{K}^0 \to \bar{K}^0K^+) = r^2(\pi^+\pi^0 \to \bar{K}^0K^+). \tag{43}$$

Однако из (40) легко получить, что в разложении (41) коэффициент C_n для реакции $a + b \to c + d$ равен $(2b_tp_{ab}p_{cd})^n$, где $\alpha_t = a_t + b_tt$.

Таким образом, для (42)

$$\left.\begin{aligned} r(\pi^+\pi^0 \to \pi^+\pi^0) &= (2b_f p_{\pi\pi} p_{\pi\pi})^\eta, \\ r(K^+\bar{K}^0 \to K^+\bar{K}^0) &= (2b_f p_{KK} p_{KK})^n, \\ r(K^+\bar{K}^0 \to \pi^+\pi^0) &= (2b_{K^*} p_{KK} p_{\pi\pi})^n. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Следовательно, условие (43) может выполняться лишь при $b_f = b_{K^*}$. Ясно, что, рассмотрев реакции $\pi\pi \to N\bar{N}$, $NN \to N\bar{N}$, мы получим равенство наклонов мезонных и барионных траекторий. Конечно, предыдущее рассуждение связано с конкретным видом формулы (37). На самом же деле равенство наклонов следует только из дуальности и спектра дочерних траекторий в МВ. Дело в том, что этих двух условий достаточно, чтобы амплитуда рассеяния представлялась в виде бесконечной суммы типа (37) [40], а для обсуждения равенства (43) совершенно не обязательно ограничиваться только одним членом в (37). Равенство наклонов всех траекторий находится в хорошем согласии с экспериментом.

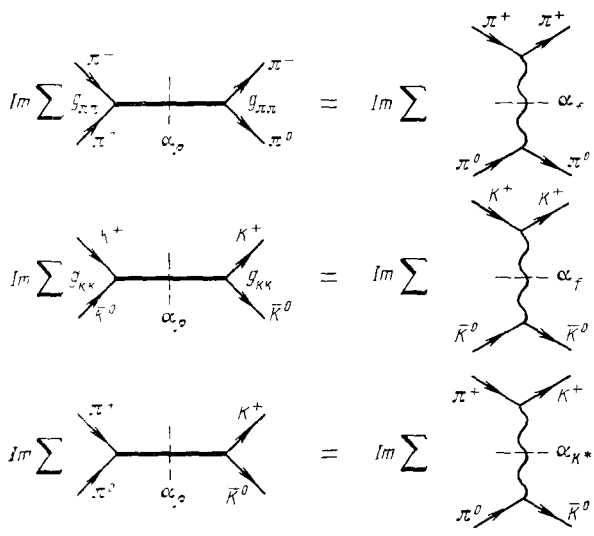


Рис. 20.

Во всяком случае, все имеющиеся траектории полюсов Редже могут быть описаны прямыми с наклонами от $0{,}8/m_N^2$ до $0{,}9/m_N^2$ (m_N — масса нуклона) (см. табл. I).

в) Равенство наклонов — чрезвычайно интересный результат, поэтому хочется более тщательно осознать, какие необходимы гипотезы для его получения, не является ли оно следствием общих принципов дуальности, а не только МВ. Для этого рассмотрим реакции (42) при достаточно большой энергии (s). Причем найдем вклад резонанса со спином $j^2 \sim sb_f \ln s \sim sb_{K^*} \ln s$ в мнимую часть парциальной волны (конечно, этот резонанс будет лежать на дочерней траектории, если $\alpha(t) > \sqrt{t}$ при больших t), тогда см. рис. 20 и [56])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im} a_j(\pi\pi \to \pi\pi) &= r^j(\pi\pi \to \pi\pi) = G_1 j^{a_f} \exp\left(-\frac{j^2}{sb_f \ln s}\right), \\ \operatorname{Im} a_j(K\bar{K} \to K\bar{K}) &= r^j(K\bar{K} \to K\bar{K}) = G_2 j^{a_f} \exp\left(-\frac{j^2}{sb_f \ln s}\right). \\ \operatorname{Im} a_j(\pi\pi \to K\bar{K}) &= r^j(\bar{\pi}\pi \to K\bar{K}) = C_3 j^{a_{K^*}} \exp\left(-\frac{j^2}{sb_{K^*} \ln s}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Из (45) видно, что (43) нарушаются, т. е. как будто бы мы получили противоречие. Выход из этой ситуации простой: необходимо предположить, что на дочерней траектории лежит не один резонанс с данным спином и фиксированными внешними квантовыми числами, а должно существовать дополнительное вырождение. В этом случае левые части равенств должны быть умножены на число этих резонансов (N) и из (43) следует

$$\frac{N(\pi\pi \to \pi\pi)\, N(\bar{K}K \to K\bar{K})}{N^2(\pi\pi \to K\bar{K})} = cj^{2(a_f - a_{K^*})} \exp\left[-2\left(\frac{1}{b_{K^*}} - \frac{1}{b_f}\right)\frac{j^2}{s \ln s}\right]. \qquad (46)$$

Так как $N(\pi\pi \to K\bar{K})$ — число резонансов, которые распадаются в систему $\pi\pi$ и $K\bar{K}$ одновременно,

$$N(\pi\pi \to K\bar{K}) \leqslant N(\pi\pi \to \pi\pi) \text{ и } N(K\bar{K} \to K\bar{K}) \tag{47}$$

и (46) $\leqslant 1$. Тогда:

1) Или $b_{K^*} > b_f$, и в этом случае только очень малая часть (экспоненциально малая при большом j) от общего числа резонансов распадается на $\pi\pi$ и $K\bar{K}$ одновременно. Поскольку это число не может быть меньше 1, то можно сказать что в каждую из систем $\pi\pi$, KK^- распадается очень большое (экспоненциально большое при больших j) число резонансов.

2) Или, если $b_{K^*} = b_f$, то

$$a_{K^*} \leqslant a_f. \tag{48}$$

Вырождение на каждом уровне может быть степенным. Таким образом, равенство наклонов соответствует минимальному вырождению дочерних состояний. Именно это минимальное вырождение обеспечивается в МВ.

Заметим, что условие (48) означает, что все траектории, дающие вклад в неупругие реакции, должны быть расположены ниже тех, которые дают вклад в упругие реакции. В частности, это приводит к тому, что странные резонансы, лежащие на траектории $\alpha_{K^*}(t)$, должны быть тяжелее нестранных; барионные резонансы, которые соответствуют траекториям, описывающим рассеяние назад типа $\pi N \to N\pi$ (неупругий процесс), должны быть тяжелее мезонных; резонансы π-мезонной траектории, дающие вклад в реакции типа $\pi\pi \to \rho\rho$, должны быть тяжелее (при одинаковом спине) резонансов, лежащих на траекториях ρ, f, A_2, ω, дающих вклад в $\pi\pi$- и $\rho\rho$-рассеяние и т. д. Все эти следствия хорошо согласуются с тем, что мы знаем (см. табл. I), и, несмотря на ощущение очевидности этого утверждения, оно интересно и нетривиально, особенно в той части, которая относится к барионным и π-мезонной траектории. Для странных частиц этот результат совпадает с обычной гипотезой утяжеления странного кварка [24].

г) Все предыдущее относилось к реакциям типа $a + b \to c + d$. В то же время, как уже отмечалось в гл. 2, условия дуальности могут быть сформулированы не только для таких простых процессов, но и для реакций с многими частицами (см. рис. 3). Оказывается, что можно написать амплитуду многочастичных процессов, которая имеет только полюсы по всем каналам и реджевскую асимптотику по всем переменным, т. е. удовлетворяет дуальным условиям. В этой амплитуде число резонансов на дочерних траекториях с одинаковой массой и спином (при большом спине j) порядка

$$\exp(c\sqrt{j}), \tag{49}$$

если считать число частиц, на которые распадается данный резонанс, сколь угодно большим [41].

Таким образом, в обобщенной модели Венециано (ОМВ) для многочастичных процессов парциальные волны порядка единицы при $l \sim (sb_s \ln s)^{1/2}$ (т. е. волны, существенные в рассеянии) образуются как сумма большого числа резонансов (49), каждый из которых распадается в данную систему с очень малой вероятностью [8]. Конечно, сейчас нет никаких экспериментальных указаний на то, что это действительно так.

д) Рассмотрим теперь, какие существуют экспериментальные указания на конкретный вид (37). Вернемся еще раз к какому-нибудь слагаемому (37). Две Г-функции в числителе обеспечивают полюсы по обеим переменным (s и t), Г-функция в знаменателе устроена так, что она имеет полюс как раз при таких значениях s и t, при которых имеют полюсы обе Г-функции числителя, т. е. она заботится о том, чтобы не было одновременно полюса и по s, и по t; кроме того, благодаря ей вычет в полюсе по s представляет полином по t (40). Знаменатель каждого члена в (37) обращается в бесконечность (имеет полюс) при

$$-\alpha(s) - \alpha(t) = -n \quad (n \text{ — любое целое число}),$$

$n = a_s + a_t + b\,(t + s)$, а так как $t + s + u = \sum_i m_i^2$, отсюда следует, что знаменатель становится бесконечным на линии постоянного U на мандельстамовской плоскости. При тех значениях s и t, при которых числитель не имеет полюсов, наша амплитуда должна обращаться в нуль. Такое поведение (37) должно приводить к появлению минимумов в дифференциальных сечениях при тех значениях переменных, которые соответствуют

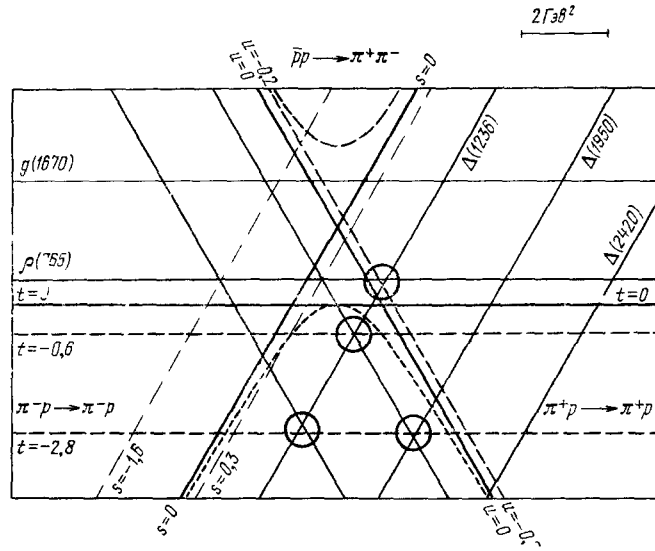


Рис. 21. Мандельстамовская плоскость для πp-рассеяния.

прямым, проходящим через точки пересечения полюсов (см. рис. 21), а если мы изучаем какой-нибудь распад, то должны наблюдать минимумы («дырки») на далитц-плоте этой реакции, причем они должны располагаться по прямой [42]. На рис. 21 отмечены пунктиром значения переменных, при которых мы ожидаем минимум в дифференциальном сечении ($t = -0{,}6$, $-2{,}8$ $(Гэв/c)^2$, $u = -0{,}2$ $(Гэв/c)^2$) для π^+p-рассеяния, для π^-p только минимумы при $t = -0{,}6 - 2{,}8$ $(Гэв/c)^2$. Эти минимумы не связаны с большой энергией, и то, что их положение совпадает с положением минимумов в дифференциальном сечении, которые следуют из обменного вырождения при больших s (см. гл. V) при $\alpha\,(t_0) = 0$, связано просто со случайностью, а именно с малой массой π-мезона (для реакции $\pi N \to \pi\Delta$, например, их положение, совершенно отлично от $\alpha\,(t_0) = 0$, а именно $t = -0{,}2 - -1{,}95$ $(Гэв/c)^2$). Рис. 22 подтверждает такое поведение дифференциального сечения. Минимум появляется почти от порога реакции при $t = -0{,}35$ $(Гэв/c)^2$, а затем движется в сторону больших t и застывает при $t = -0{,}6$ при $P_\pi = 0{,}8$ $Гэв/c$ [44]. Еще более впечатляюще выглядят минимумы на далитц-плоте для аннигиляции $\bar{p}n \to 3\pi$. На рис. 23 приведен далитц-плот этой реакции и хорошо видны минимумы в центре его и три минимума при фиксированном значении $m^2_{\pi^+\pi^+}$ (как и должно быть по условию (50)). В данном случае требует объяснения тот факт, что нет двух минимумов, соответствующих $-\alpha_s - \alpha_t = -4$ (один минимум соответствует $-\alpha_s - \alpha_t = -3$, три минимума $-\alpha_s - \alpha_t = -5$). Может быть дело в том, что эта реакция описывается формулой типа (37) только в покое, если же протон имеет импульс, то описание значительно усложняется.

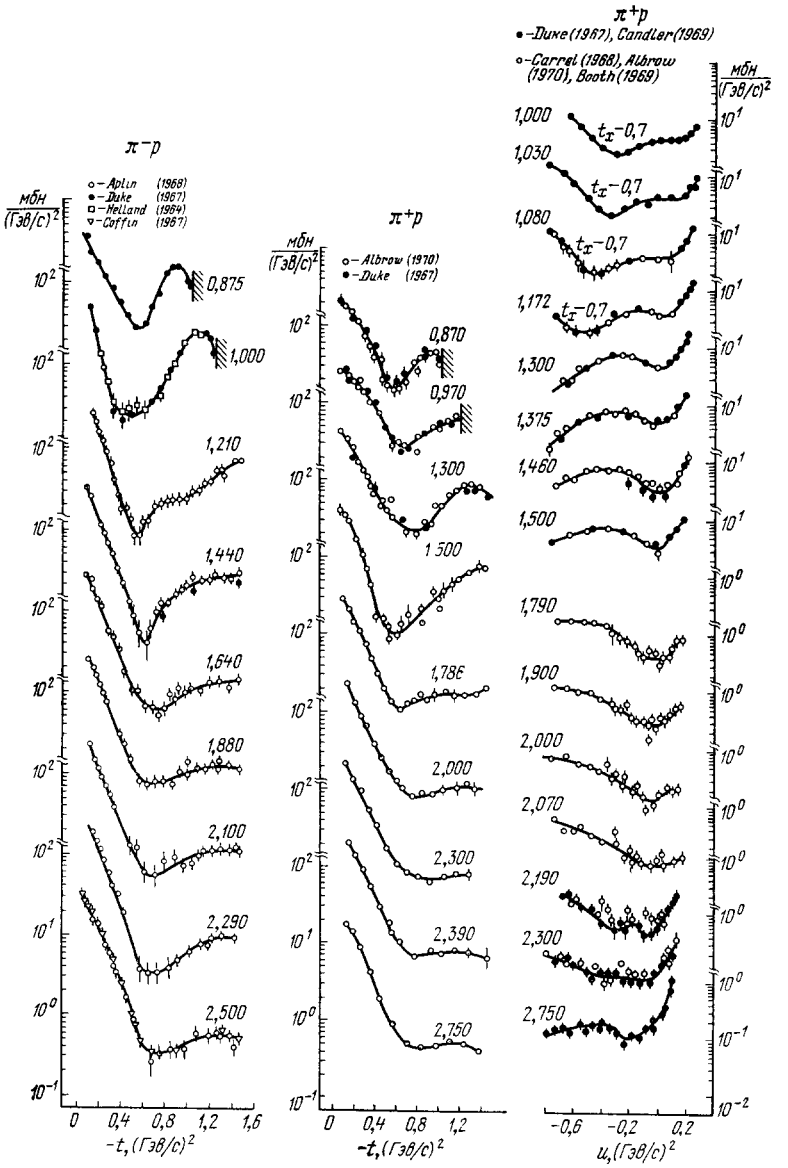


Рис. 22. Дифференциальные сечения $\pi^- p \to \pi^- p$ и $\pi^+ p \to \pi^+ p$ при низких энергиях ($P_\pi < 3$ *Гэв/с*) [43].

Все попытки, которые делались в этом отношении [45], хотя и не привели к полному совпадению с экспериментом, но отсутствие двух минимумов объяснили (рис. 24).

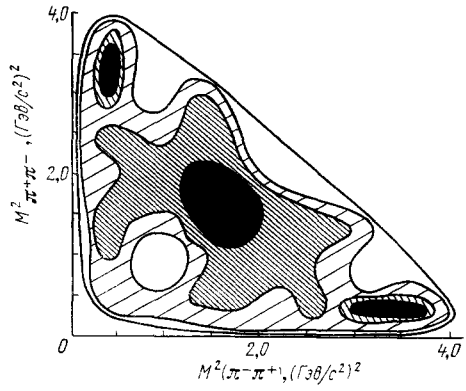


Рис. 23. Далитц-плот реакции $p\bar{n} \to 3\pi$ при $P_p = 1{,}2$ *Гэв/с* [45].

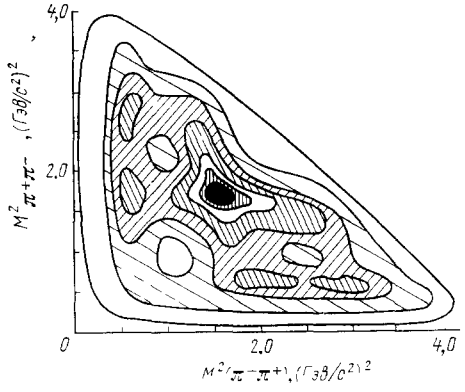


Рис. 24. Теоретический далитц-плот реакции $p\bar{n} \to 3\pi$ [45].

Однако хотелось бы более четко сформулировать, в пользу каких предположений, лежащих в основе МВ, говорит появление этих минимумов. Прежде всего это показывает, что приближение «узких резонансов» неплохо работает (в МВ мы пренебрегаем наличием ширины резонансов). Действительно, если мы имеем по двум переменным (s и t) по полюсу, то между ними будет находиться нуль амплитуды [46], так как A (s, t) вблизи этих полюсов имеет вид

$$\frac{g_1}{s-m_1^2} \cdot \frac{g_2}{t-m_2^2} = \frac{g_1(t-m_2^2)+g_2(s-m_1^2)}{(s-m_1^2)(t-m_2^2)}. \tag{50}$$

и нуль будет при $g_1(t-m_2^2)+g_2(s-m_1^2)=0$. То же обстоятельство, что нули на далитц-плоте лежат на одной прямой, свидетельствуют в пользу конкретной формулы (37), в которой $g_1 = g_2$. Однако отсутствие двух «дырок» в $p\bar{n} \to 3\pi$ может быть, в частности, объяснено и другой системой нулей [46]. Поэтому для проверки МВ необходимо больше экспериментального материала по реакциям $p\bar{n} \to 3\pi$, в частности при бо́льших энергиях.

е) Рассмотрим теперь другую характерную особенность МВ, а именно поинтересуемся распределением по массе какого-нибудь экзотического канала (например, в реакции $p\bar{n} \to \pi^+\pi^+\pi^-$ по массе $(\pi^+\pi^+)$). В этом канале нет резонансов, тем не менее МВ предсказывает распределение, существенно отличное от фазового объема в области малых масс (см. рис. 27, *б*, на котором виден почти резонансный пик в этой области). Понять, почему это происходит, довольно просто. Реакцию $p\bar{n} \to \pi^+\pi^+\pi^-$ будем описывать суммой типа (37), где $s = m^2_{\pi_1+\pi^-}$, $t = m^2_{\pi_2+\pi^-}$, $u = m^2_{\pi^+\pi^+}$ и $s+u+t = 3m_\pi^2 + (2m_N)^2$. Г-функция в знаменателе будет зависеть только от u, причем она резко растет с ростом u (в данном реакции она приближается к полюсу при максимальных u), что и приводит к пику в области малых u. Естественно, что при рассмотрении реакций $p\bar{n} \to 5\pi$, 7π . . ., когда амплитуда будет интегрироваться по большему числу переменных для получения распределения по массам этот пик будет смазываться (что тоже наблюдается на опыте [47]). Такое поведение спектров само по себе тоже скорее говорит в пользу общего дуального подхода и наличия «узких» резонансов, чем конкретно за МВ, хотя и характеризует предполагаемый вид амплитуды несколько с другой стороны, чем расположение нулей. В частности, для системы нулей [46] вряд ли можно ожидать такого характер-

ного максимума во всех реакциях. Поэтому вместе взятое характерное распределение в $\pi^+\pi^+$-системе и наличие минимумов на далитц-плоте является сильным аргументом (хотя и далеко не окончательным) в пользу конкретной формулы Венециано.

6. НЕКОТОРЫЕ КОНКРЕТНЫЕ РЕАКЦИИ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЕНЕЦИАНО

а) Мезон-мезонное рассеяние. В этой главе мы остановимся на описании некоторых конкретных процессов в ОМВ и прежде всего рассмотрим мезон-мезонное рассеяние, применение к которому идей дуальности пока не встречало никаких затруднений. Ограничимся взаимодействием псевдоскалярных мезонов [48] и возьмем $\pi\pi$-рассеяние в качестве примера. Простейшая амплитуда этого процесса в ОМВ имеет вид [49] ($A^T_{S(t)}$ — амплитуда с изотопическим спином T в s (t)-канале)

$$\left.\begin{aligned} A^0_s &= -\frac{1}{2}g^2[3(V(s,t)+V(s,u))-V(t,u)],\\ A^1_s &= -g^2[V(s,t)-V(s,u)],\\ A^2_s &= -g^2[V(t,u)], \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} A^0_t &= -\frac{1}{2}g^2[3(V(s,t)+V(u,t))-V(s,u)],\\ A^1_t &= -g^2[V(s,t)-V(u,t)],\\ A^2_t &= -g^2[V(s,u)], \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где $V(x,y)=\dfrac{\Gamma(1-\alpha(x))\,\Gamma(1-\alpha(y))}{\Gamma(1-\alpha(x)-\alpha(y))}$.

(51) и (52) обладают некоторыми простыми свойствами.

1) Амплитуда рассеяния имеет по всем каналам только полюсы (траектории линейны), причем вычеты в них вещественны и представляют собой полиномы по z степени n ($\alpha(s)=n$) (см. (40) и (41)).

2) В экзотическом канале ($T=2$) нет резонансов ($V(tu)$ имеет полюсы по u и t, а не по s).

3) В (51) и (52) учтены кроссинг-симметрия и бозе-статистика π-мезонов. Действительно, если мы рассмотрим амплитуду A^0_s, то в нее должны давать вклад полюсы лишь с четным спином (так как π-мезоны — бозоны), для A^1_s, наоборот (только с нечетным). Так как вклад полюса

$$A^0_s = -\frac{3g^2}{2}\cdot\frac{1}{s-s_0}\{Q_n(t)+Q_n(u)\} \tag{53}$$

(см. (40)) и поскольку переменная u для этой реакции получается из t заменой $z\to -z$ (см. рис. 1), в (53) дают вклад только четные степени z, а следовательно, по (41) при данной массе будут резонансы только с четным спином.

4) Формула (52) имеет правильную асимптотику при $s\to\infty$ ($u\to-\infty$ $t<0$ фиксировано). Из формул приложения I нетрудно получить, что

$$A^0_t(st) = -\frac{3}{2}g^2\Gamma(1-\alpha_t)\left[\frac{\sin\pi(\alpha_s+\alpha_t)}{\sin\pi\alpha_s}(\alpha_s)^{\alpha_t}+(-\alpha_u)^{\alpha_t}\right]-$$
$$-g^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\pi\alpha_s}(\alpha_s)^{1-D+\alpha_t}\frac{1}{\Gamma(1+D+\alpha_t)}, \tag{54}$$

где $D=\alpha_s+\alpha_t+\alpha_u=3a+4bm^2_\pi$.

Если предположить, что $\alpha(s)$ имеет мнимую часть растущую с ростом s, но $\mathrm{Im}\,\alpha(s)/\mathrm{Re}\,\alpha(s)\to 0$ при $s\to\infty$ (или будем искать асимптотику не

при вещественных s, а по лучу в комплексной плоскости), тогда вклад $V(s, u)$ становится мал ($\sim e^{-\mathrm{Im}\alpha(s)}$) и

$$A_t^0(s, t) = -\beta(t)\frac{e^{-in\alpha_t}+1}{\sin\pi\alpha(t)}(bs)^{\alpha(t)}, \tag{55}$$

а

$$\beta(t) = g^2\frac{\pi}{\Gamma(\alpha(t))}.$$

Формула (55) соответствует обмену полюсом Редже с положительной сигнатурой (см. (3)), в данном случае f-реджеоном. Аналогично можно показать, что в A_t^1 при $s \to \infty$ будет давать вклад реджеон с отрицательной сигнатурой (ρ-реджеон). Как и следовало ожидать, оба этих реджеона вырождены, их вычеты $\beta(t)$ в (55) стремятся к нулю при $\alpha(t) \to 0$. Для правильной асимптотики необходимо было предположить рост $\mathrm{Im}\,\alpha_s$ при увеличении s, а следовательно, в МВ резонансы должны иметь все бóльшие ширины. Возвращаясь к обсуждению гл. 4, мы видим, что в этом случае ситуация с определением этих резонансов становится очень неопределенной.

5) Можно показать, что вычеты всех резонансов в (51) (в том числе и дочерних) положительны при [49]

$$a \geqslant 0{,}496. \tag{56}$$

Это означает, что при (56) коэффициенты в (41) все положительны. Само утверждение (56) было получено из рассмотрения вычетов на первых двух дочерних траекториях [49]. Однако можно показать, что и на остальных траекториях при выполнении (56) будут все вычеты положительны [50]. Вопрос о положительности вычетов крайне важен, так как только в этом случае имеет смысл рассматривать (51) как хорошее приближение к действительности и считать, что унитарные поправки малы.

Таким образом, (52) и (51) удовлетворяют требованиям дуальности. Интересно посмотреть, как они согласуются с экспериментом. К счастью, мы можем кое-что указать из эксперимента относительно ππ-взаимодействия [51]. Однако прямо (51) сравнивать с опытом нельзя, поскольку в (51) все полюсы находятся на вещественной оси, т. е. для сравнения с опытом нужно учесть наличие у резонансов ширины. Таким образом, по существу пишется формула, имеющая тот же спектр резонансов и те же соотношения между их вычетами, что и в (51), но в каждый резонанс произвольно вставляется полная ширина. Поскольку не для всех резонансов она известна, то для нее используется некоторая аппроксимирующая формула, от вида которой, естественно, будут зависеть результаты. В работе [49] для α_s бралось выражение

$$\alpha_\rho(s) = 0{,}483 + 0{,}885s + 0{,}28i\sqrt{s-4\mu^2}\,\theta(s-4\mu^2). \tag{57}$$

Остановимся на характерных чертах амплитуды (51). (Заметим, что один параметр g^2 в (51) определяется, например, из ширины ρ-мезона).

1) Фазы ππ-взаимодействия в $T_s = 0$ положительны и малы на пороге, в $T_s = 2$ малы и отрицательны [49]. Ход их с энергией совпадает с одним из фазовых анализов ππ-взаимодействия [52].

2) Длины рассеяния ππ в МВ совпадают с длинами, полученными в алгебре токов [53, 54] (при этом ширина ρ-мезона равна 100 *Мэв*). При обычной нормировке [49] на ширину ρ-мезона 110 *Мэв* длины получаются равными [48] $a_0 = 0{,}20/m_\pi$, $a_2 = -0{,}05/m_\pi$ (в алгебре токов [53] $a_0 = 0{,}15/m_\pi$, $a_2 = -0{,}043/m_\pi$). Однако надо отметить, что величины a_0, a_2 существенно зависят от $\alpha(0) = a$ и при $a = 0{,}52$ (вместо 0,485) $a_0 \sim 1/m_\pi$, но положительность a_0 не зависит от этого. Поскольку есть указание, что $a_0 < 0$ [55], то если оно подтвердится, формула (51) будет противоречить эксперименту.

3) Спектр резонансов и упругие ширины резонансов приведены на рис. 25. Все ширины довольно малы, и при неопределенности классификации бозонных резонансов трудно сравнить их с экспериментом. Однако видны некоторые качественные особенности этого спектра:

а) Должен существовать скалярный резонанс (0^+) с массой ρ-мезона (σ) и шириной, значительно большей ρ:

$$\Gamma_\sigma/\Gamma_\rho \sim \frac{9}{2}. \qquad (58)$$

Этот резонанс, видимо, есть (ε-мезон в таблицах [3]). Кроме того, наличие такого резонанса и соотношение между ширинами (58) требуются киральными симметриями [56].

б) Должен быть мезон $1^{(-)}$ с массой f-мезона ($\sim$1300 *Мэв*) и с шириной порядка ширины ρ. Такой мезон не был обнаружен, и его отсутствие является существенным противоречием (51) с опытом.

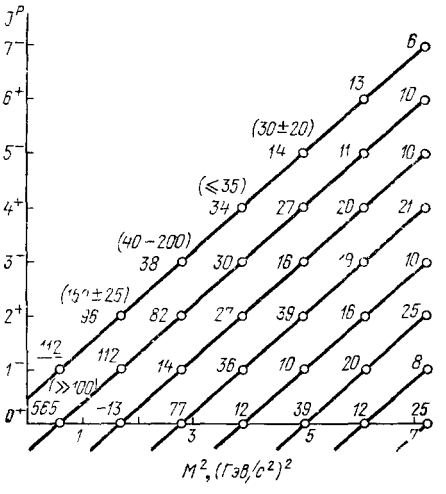


Рис. 25. Спектр резонансов и их упругие ширины в амплитуде ππ в модели Венециано [49].

В скобках указаны полные ширины мезонных резонансов по [3], $\alpha_\rho(t) = 0{,}48 + 0{,}90t$.

в) Упругие ширины резонансов быстро падают с ростом массы, что неплохо согласуется с данными по бозонным резонансам в Q-, S-, T- и u-областях [3], если, конечно, не изменится экспериментальная ситуация в этих мало исследованных областях.

Отметим одну замечательную особенность амплитуды (50): она удовлетворяет условию самосогласованности Адлера [54, 57] при

$$\alpha_\rho(m_\pi^2) = \frac{1}{2}. \qquad (59)$$

Условие Адлера является следствием сохранения аксиального тока в пределе $m_\pi \to 0$ [54] и требует обращения амплитуды ππ в нуль при равном нулю четырехимпульсе одного из π-мезонов. Заметим, что если $p_\mu = 0$ одного из π-мезонов, то $s = t = u = m_\pi^2$ для ππ-рассеяния. Мы видим, что при условии (59) аргумент Г-функции в знаменателе обращается в нуль, а она сама в бесконечность, что и приводит к занулению амплитуды (51) [42]. Условие (59) вместе с требованием $\alpha_\rho(m_\rho^2) = 1$ позволяет найти $\alpha_\rho(s)$, которая при этом равна (57) (без мнимой части, конечно). Аналогичное условие для πK-амплитуды приводит к

$$\alpha_{K^*}(m_\pi^2) = \frac{1}{2}. \qquad (60)$$

Из условий (59) и (60) и аналогичных им условий для других процессов [58] следуют массовые формулы вида

$$\left.\begin{array}{rcl} \underset{(0{,}211)}{m_{K^*}^2} - m_\rho^2 = \underset{(0{,}245)\,(0{,}242)}{m_{K^{**}}^2 - m_{A_2}^2} = m_K^2 - m_\pi^2, \\ \underset{(1{,}14)}{m_{A_1}^2} = \underset{(1{,}168)}{2m_\rho^2 - m_\pi^2}, \\ \underset{(1{,}53)}{m_\Delta^2} = \underset{(1{,}463)}{m_N^2 + m_\rho^2 - m_\pi^2}. \end{array}\right\} \qquad (61)$$

В скобках приведены экспериментальные значения разностей в $(Гэв)^2$ из таблиц [3]. Видно, что (61) неплохо согласуется с экспериментом. Мне хотелось бы обратить внимание на вторую формулу в (61), которая в свое время была получена в алгебре токов и вызвала большой интерес [59].

Отсутствие мезона 1^- с массой 1300 *Мэв* (ρ') на опыте заставляет попробовать усложнить формулу (51), взяв еще несколько слагаемых в (37). Необходимо отметить, что положительность вычетов дочерних резонансов ограничивает эту возможность только еще одним добавочным слагаемым, т. е. можно изменить (51), взяв

$$V(s,\ t)=\frac{\Gamma(1-\alpha_s)\,\Gamma(1-\alpha_t)}{\Gamma(1-\alpha_s-\alpha_t)}+\beta\frac{\Gamma(1-\alpha_s)\,\Gamma(1-\alpha_t)}{\Gamma(2-\alpha_s-\alpha_t)}. \tag{62}$$

Однако если мы потребуем, чтобы не было резонанса ρ', то из (62) получим, что σ-мезон будет входить с отрицательным вычетом. Максимально возможный вариант (соответствующий $\Gamma_\sigma=0$) соответствует $\Gamma_{\sigma'}=\Gamma_\rho/4$. Таким образом, существование ρ' в $\pi\pi$-системе необходимо в МВ. В то же время изменение (62) амплитуды (51) даже при сравнительно малых β позволяет получить довольно большие отрицательные длины a_0 (при $\Gamma_\sigma=0$ $a_0=-1{,}6/m\pi$). Таким образом, МВ способна описать многие характерные черты $\pi\pi$-взаимодействия, находится в неплохом соответствии с алгеброй токов, но требует существования ρ' в системе 2π.

б) Мезон-барионное рассеяние. Более непосредственный экспериментальный интерес имеет реакция

$$\pi\,(q_1)+N\,(p_1)\to\pi\,(q_2)+N\,(p_2). \tag{63}$$

Описание πN-рассеяния в МВ было дано в [60, 61]. Приведем самый простой вариант, в котором учитываются только барионные резонансы, лежащие на N_α- и Δ_δ-траекториях [60]:

$$\left.\begin{aligned}
&M=\bar u\,(p_1)\,\{A\,(s,\ t)+(\hat q_1+\hat q_2)\,B\,(s,\ t)\}\,u\,(p_2),\\
&A^I=\frac{\beta_{fN}}{\pi}\,[c^{fN}_{1,\,3/2}\,(t,\ s)+c^{fN}_{1,\,3/2}\,(t,\ u)+c^{NN}_{3/2\ 3/2}\,(s,\ u)]+\frac{\beta_{t\Delta}}{\pi}\,[N\to\Delta],\\
&B^I=\frac{\beta_f}{\pi}\,\{[B^{fN}_{1,\,1/2}\,(t,\ s)+B^{f\Delta}_{1,\,1/2}\,(t,\ s)+B^{N\Delta}_{1/2\ 1/2}\,(s,\ u)]+[s\to u,\ u\to s]\},\\
&A^\rho=\frac{\beta_\rho}{\pi}\,\{[c^{\rho N}_{1,\,3/2}\,(t,\ s)+c^{\rho\Delta}_{1,\,3/2}\,(t,\ s)+c^{N\Delta}_{3/2\ 3/2}\,(s,\ u)]+[s\to u,\ u\to s]\},\\
&B^\rho=\frac{\beta_{\rho N}}{\pi}\,[B^{\rho N}_{1,\,1/2}\,(t,\ s)+B^{\rho N}_{1,\,1/2}\,(t,\ u)+B^{NN}_{1/2\ 1/2}\,(s,\ u)]+\frac{\beta_{\rho\Delta}}{\pi}\,[N\to\Delta],
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где

$$B^{a,\,b}_{i,\,k}(xy)=\frac{\Gamma(\imath-\alpha_a(x))\,\Gamma(k-\alpha_b(y))}{\Gamma(\imath+k-\alpha_a(x)-\alpha_b(y))},$$

$$C^{a,\,b}_{i,\,k}(xy)=\frac{\Gamma(\imath-\alpha_a(x))\,\Gamma(k-\alpha_b(y))}{\Gamma(\imath+k-1-\alpha_a(x)-\alpha_b(y))};$$

f и ρ обозначают амплитуды с изотопическим спином 0 и 1 в t-канале реакции; для изотопических амплитуд в s-канале имеем

$$\left.\begin{aligned}
M_s^{1/2}&=-(M^f+2M^\rho),\\
M_s^{3/2}&=(M^f-M^\rho).
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Амплитуда (64) имеет только полюсы и правильную реджевскую асимптотику, так же как и амплитуда $\pi\pi$ в МВ, но в отличие от нее она обладает двумя существенными недостатками:

1) Из требования, чтобы резонансы лежащие на N_α (Δ_δ)-траектории, давали вклад только в $M_s^{1/2}$ ($M_s^{3/2}$), нетрудно получить, что должны быть равны

$$\alpha_f=\alpha_\rho,\quad \alpha_{N_\alpha}=\alpha_{\Delta_\delta}, \tag{66}$$

$$\beta_{t,\,\Delta}=-2\beta_\rho,\quad \beta_{\rho\Delta}=-1/2\beta_t,\quad \beta_{fN}=\beta_\delta,\ \beta_{\rho N}=\beta_f. \tag{67}$$

Первое из (66) соответствует обычному обменному вырождению, второе же не следует из общих принципов дуальности (см. гл. 3) и не согласуется с экспериментальными данными (табл. I).

2) В (64) при одной и той же массе (за исключением массы нуклона и Δ-резонанса) должны существовать резонансы с одним и тем же спином, но с разной четностью. Проще всего в этом убедиться, рассмотрев асимптотику (например, $M_s^{3/2}$) при фикси-

рованном s и больших u (что соответствует рассеянию назад). Из (64) и (65) вид ее будет

$$M^3_{su\to\infty} \to \bar{u}(p_1)(\hat{q}_1+\hat{q}_2)\,u(p_2)\,\eta_\Delta u^{\alpha_\Delta(t)-1/2}, \tag{68}$$

вместо

$$\bar{u}(p_1)(\hat{q}+q)\,u(p_2)\,\eta_\Delta u^{\alpha_\Delta(t)-1/2}, \tag{69}$$

где $q = p_1 + q_1$, как это должно быть при обмене траекторией с положительной четностью [62]. Такое вырождение по четности в спектре барионных резонансов не наблюдается. Формулу (64) можно изменить таким образом, что удвоение такого рода начнется с больших масс [61]. Однако (по крайней мере пока) не написана (и нет идей, как ее написать) формула, в которой бы учитывались прямолинейные траектории и не было бы удвоения по четности.

Несмотря на эти существенные недостатки (64), обработка экспериментальных данных дала (два свободных параметра определяются из константы связи π-мезона с нуклонами и ширины Δ-резонанса) [63, 64]:

1) Хорошее описание πN-рассеяния вперед как по величине, так и по характеру поведения в зависимости от переданного импульса.

2) Правильное поведение сечения $\pi^- p \to \pi^0 n$ в области минимума $t \sim -0{,}6$ $(Гэв/c)^2$ (рис. 26). Это представляет интерес, так как при больших энергиях в эту реакцию дает вклад только обмен ρ-реджеоном, вычет которого обращается в нуль при $t \sim -0{,}6$ $(Гэв/c)^2$. Отличное от нуля сечение обычно объясняется вкладом ветвлений [45, 16], однако удовлетворительное описание этой реакции с помощью (64) говорит в пользу того, что, возможно, при современных энергиях заполнение минимума происходит из-за нереджевского фона, быстро убывающего с ростом энергии (в (64) роль этого фона играют (su)-члены).

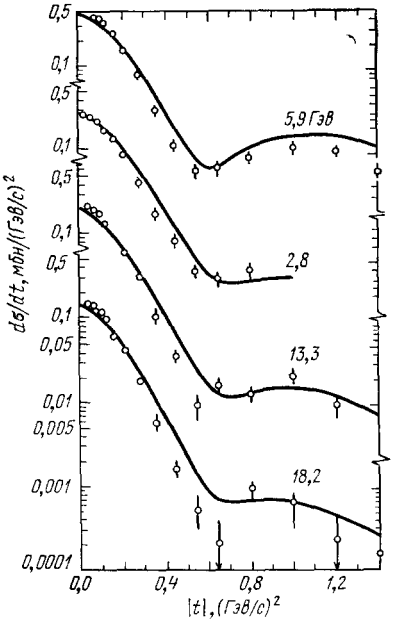


Рис. 26. Дифференциальное сечение $\pi^- p \to \pi^0 n$ в зависимости от переданного импульса.

3) Большую ($\sim$0,5) положительную поляризацию в $\pi^- p \to \pi^0 n$-рассеянии при $t \sim -0{,}6$ $(Гэв/c)^2$ (что также объясняется интерференцией вклада ρ-реджеона и (su) члена в (64)). Такая поляризация согласуется с новыми данными [16] и пока не получается при другом описании.

4) Сечение рассеяния назад, на порядок меньшее экспериментального, хотя поведение в зависимости от переданного импульса формула (64) передает неплохо. Видимо, все недостатки (64) сказались наиболее полно при описании рассеяния назад.

Таким образом, при описании πN-рассеяния МВ имеет весьма ограниченные успехи, которые сами по себе любопытны. Однако пока нет возможности оценить, насколько они связаны с дуальностью, так как до сих пор не написана формула, правильно отражающая наблюдаемый спектр барионных резонансов.

в) Реакция $p + \bar{n} \to \pi_1^+ + \pi_2^+ + \pi^-$ в покое. В этой реакции система $p\bar{n}$ находится в состоянии 0^- с изотопическим спином 1, т. е. по квантовым числам совпадает с π-мезоном, однако масса этого состояния значительно больше массы π-мезона ($\alpha_\pi(m^2_{\bar{n}p}) = 3$ вместо $\alpha_\pi(m^2_\pi) = 0$). Поэтому этот процесс не описывается выражением (51), а мы должны

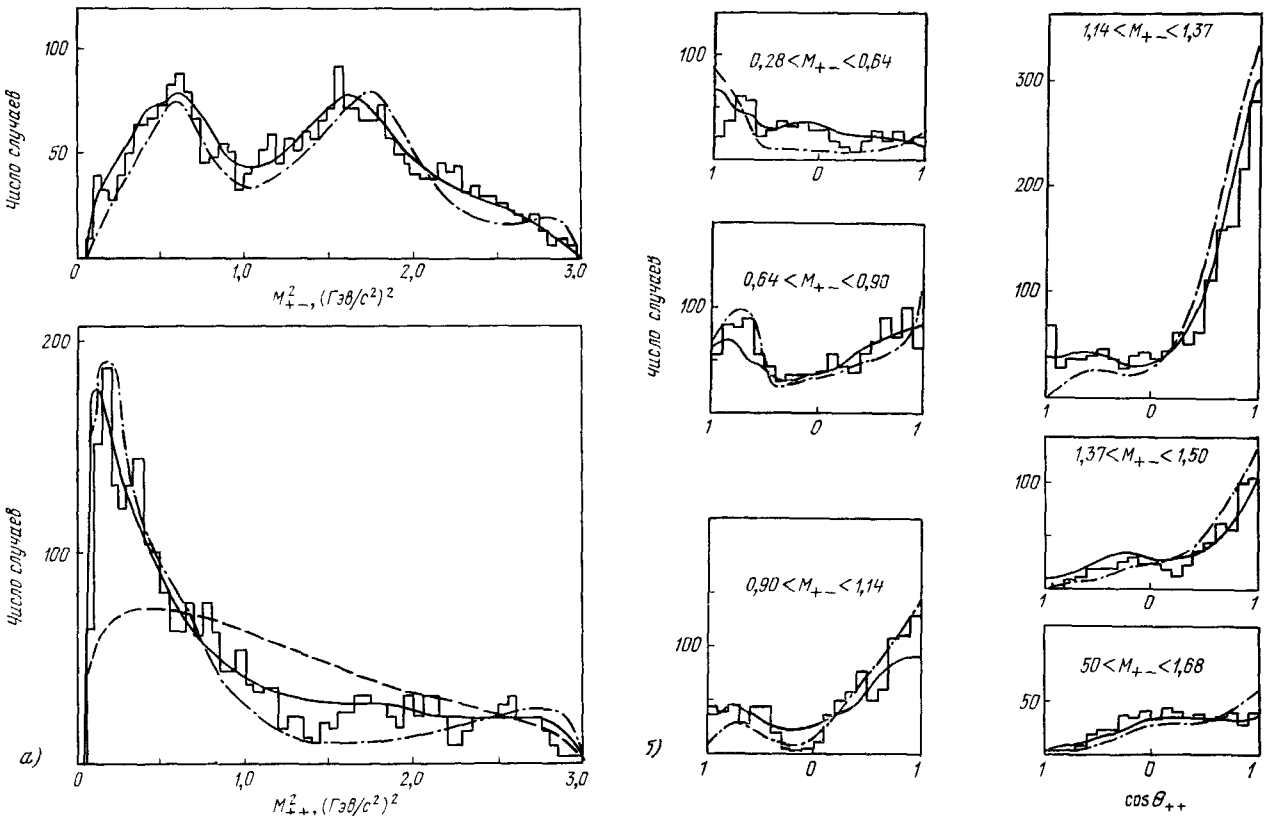


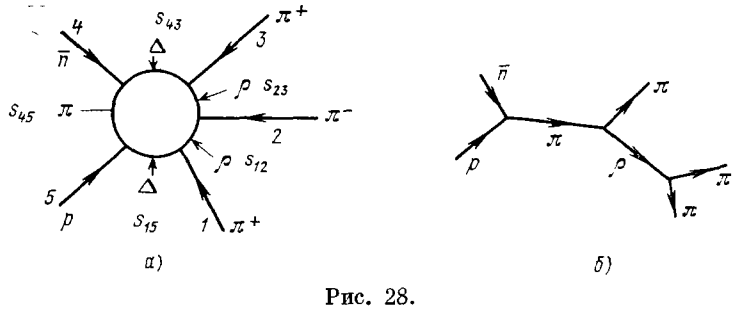
Рис. 27. Массовые (*а*) и угловые (*б*) распределения в реакции $\bar{p}n \to 3\pi$ в покое.
Сплошные кривые — по [67], штрих-пунктирные — по [65], штриховая кривая — фазовый объем.

вернуться к формуле (37), причем из кроссинг-симметрии для π-мезонов $m = k$ в (37), роль S играет $m^2_{\pi_1^+\pi^-}$, $t = m^2_{\pi 2^+\pi^-}$. Коэффициенты $C^p_{m,k}$ в (37), вообще говоря, определяются из вида амплитуды $p\bar{n} \to 3\pi$ при произвольной энергии, но формулы такого рода для многочастичных реакций наталкиваются на свои трудности (см. следующий раздел), поэтому интересно посмотреть, как экспериментальные данные могут быть описаны формулой (37) с произвольными коэффициентами. В настоящее время имеется довольно много попыток такого описания [42, 65–67], которые отличаются друг от друга в выборе $C^p_{m,k}$. В [42] отличен от нуля C^2_{11}, в [65] наилучший результат получается при

$$C^1_{11} = 1, \quad C^2_{11} = 1{,}89, \quad C^2_{22} = C^3_{22} = 0, \quad C^3_{33} = 0{,}57; \tag{70}$$

при этом траектория бралась в виде (57). В [67] учитывалась также возможность того, что полные ширины дочерних резонансов больше (для наилучшей подгонки в 3,5 раза) ширин резонансов на главной траектории. При этом $C^1_{11} = 1$, $C^2_{11} = -5{,}9$, $C^2_{22} = -5$, $C^3_{22} = 2{,}5 \pm 1{,}8$, $C^4_{22} = 5{,}9$, $C^3_{33} = -0{,}35 \pm 0{,}12$. Несмотря на такой широкий разброс значений коэффициентов, согласие с опытом получается во всех подгонках неплохое. На рис. 27 приведены результаты работы [65, 67]. Характерный спектр системы $\pi^+\pi^+$ мы уже обсуждали выше (гл. 5). Заметим, что хорошее согласие получилось не только для распределения по массам, но и угловые спектры (которые весьма чувствительны к различным небольшим добавкам) описываются очень неплохо. Поэтому тем больший интерес представляет сравнить результаты предыдущего анализа с рассмотрением реакции $\bar{p}n \to 3\pi$, как пятичастичной реакции, удовлетворяющей условиям рис. 3.

Такой подход был развит в [68] и, несмотря на свою ограниченность, привел к очень интересным результатам. На рис. 28, *а* приведены необходимые обозначения, а также



а) *б*)

Рис. 28.

те траектории, которые учитывались при этом подходе. Основные допущения заключались в том, что в системе $p\bar{n}$ учитывались только π-траектория, а в системе πN — только Δ-траектория. Тогда амплитуда $p\bar{n} \to 3\pi$ можно записать через B_5-функции, которые являются решением условий рис. 3 (см. приложение II), в следующем виде [68]:

$$A(s, t) = \beta \left[\alpha^\rho_{12} B_5 \left(\alpha^\rho_{12}, \alpha^\rho_{23} - 1, \alpha^\Delta_{34} - \frac{1}{2}, \alpha^\pi_{45}, \alpha^\Delta_{15} - \frac{3}{2} \right) + \right.$$
$$\left. + c \left(\alpha^\Delta_{34} - \frac{1}{2} \right) B_5 \left(\alpha^\rho_{12} - 1, \alpha^\rho_{23} - 1, \alpha^\Delta_{34} - \frac{1}{2}, \alpha^\pi_{45}, \alpha^\Delta_{15} - \frac{1}{2} \right) \right] \bar{u}_p \gamma_5 u_n, \tag{71}$$

где $\alpha^\rho_{ik} = \alpha_\rho(s_{ik})$.

Формула (71) имеет все необходимые полюсы по каждому каналу и правильную асимптотику (но при $c = 0$ по энергии s_{12} неправильное поведение $s_{12}^{\alpha_\Delta - 1}$). При $s_{45} = (2m_N)^2$ нетрудно получить из (71) ряд (37); при этом получаем, что $C^p_{mn} = 0$ при $p > 4$. Если, кроме того, потребовать, чтобы (71) занулялся в центре далитц-плота (экспериментальный факт глубокого минимума в этой области был уже отмечен), то мы

получаем для C^{ν}_{mm} следующие значения $C^{11}_{1}=1$, $C^{2}_{11}=1{,}8$, $C^{2}_{22}=0{,}26$, $C^{3}_{22}=0$, которые по существу не отличаются от системы (70) и, следовательно, хорошо описывают эксперимент. Более того, так как (71) при определенных значениях парных энергий s_{ik} ($s_{45}=m^2_{\pi}$, $s_{12}=m^2_{\rho}$) полностью определяется графиком рис. 28, *б*, для которого известны все константы, то возможно определить и нормировочный множитель β в (71), т. е. предсказать сечение процесса $p\bar{n}\to 3\pi$ [69]. Предсказанное значение (18 *мбн*) и экспериментальное (10 *мбн*) неплохо согласуются между собой. Если в πN-системе вместо Δ взять N-траекторию, то результаты существенно не изменятся.

Вся обработка этой реакции представляет превосходный пример, типичный для ОМВ. С одной стороны, неоднозначность формулы типа (71), конкретный вид которой определен в основном из соображений простоты как в выборе траекторий, так и в представлении амплитуды через минимальное число B_5-функций, а с другой стороны — очень хорошее согласие с экспериментом, которое позволяет думать, что в таких формулах отражено что-то существенное. В этом отношении интересны попытки описать эту реакцию с помощью модели, учитывающей рождение нескольких резонансов [70]. При этом, однако, такое же хорошее согласие с экспериментом, как в ОМВ, было достигнуто только после учета рождения дочерних резонансов. Как уже отмечалось, существование дочерних резонансов является наиболее существенной чертой дуального подхода, поэтому сказать, что успех ОМВ в этой реакции связан с тем, что она правильно отражает спектр наблюдаемых резонансов, было бы очень сильным утверждением. Во всяком случае, у нас есть основания думать, что это так, рассматривая реакцию $p\bar{n}\to 3\pi$ в покое.

г) Многочастичные реакции в обобщенной модели Венециано. В этом разделе остановимся более подробно на реакциях

$$a+b\to c+d+e, \tag{72}$$

примером которых, в частности, был процесс $p\bar{n}\to 3\pi$. Основой для описания реакций (72) является решение дуальных условий (рис. 3), приведенное в приложении II (B_5-функция). Привлекательной чертой этого подхода является то, что выражение амплитуды процессов (72) через B_5-функции позволяет записать кроссинг-симметричное выражение от пяти переменных, имеющее правильные полюсы и асимптотику по каждому из них.

Однако при рассмотрении конкретных реакций возникает ряд трудностей.

1) Прежде всего, все реакции, которые измеряются в эксперименте, включают по крайней мере два фермиона. Но для фермионов нет в настоящее время модели, которая была бы свободна от удвоения по четности и правильно учитывала бы изотопический спин нуклонов (см. раздел б) этой главы).

2) Общие правила написания дуальных амплитуд (приложение II) для многочастичных процессов существуют только для частиц, расположенных на траекториях с $\alpha(0)<0$, причем с положительной G-четностью. В то же время реальные траектории реджеонов (табл. I) имеют или $\alpha(0)>0$, или отрицательную G-четность (для π-реджеона, например). Поэтому вид дуальной амплитуды для каждого процесса пишется из соображений простоты (как это было при написании (71)).

3) Все формулы в ОМВ пишутся в приближении нулевой ширины всех резонансов, что явно противоречит эксперименту. Поэтому при сравнении с опытом вводится полная ширина для резонансов, которая аппроксимируется довольно произвольной формулой (см. рис. 2 и (57)) причем все резонансы с данной массой и разными спинами имеют одинаковую

ширину при таком подходе. Это противоречит даже самой МВ, так как в МВ упругая ширина σ-мезона при такой параметризации получается больше ее полной ширины (см. рис. 25).

4) Для большинства измеряемых процессов в каком-нибудь канале дает вклад вакуумный полюс, учитывать который мы не умеем в ОМВ и вклад которого мы должны выписывать отдельно. Поэтому мы должны, строго говоря, ограничиться только реакциями, в которые обмен полюсом Померанчука не дает вклада (например, $K^-p \to \pi^+\pi^-\Lambda$). Однако таких реакций немного.

5) Обычно на две выбранные частицы могут распадаться резонансы, лежащие на различных траекториях (например, на πN распадаются резонансы, лежащие на N- и Δ-траекториях). Учет всех траекторий приводит

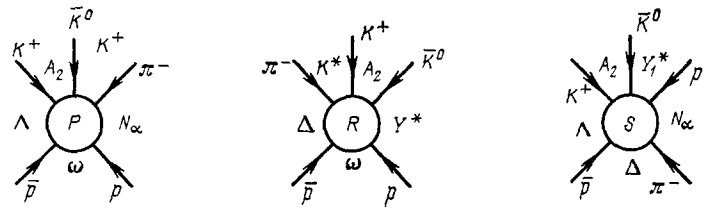


Рис. 29. Дуальные диаграммы, дающие вклад в реакции (73) — (77), и траектории, которые учитывались при обработке [71].

к значительному усложнению анализа многочастичных реакций. Поэтому ограничиваются только несколькими (чаще одной) траекториями по тем или иным экспериментальным соображениям, точность которых невелика.

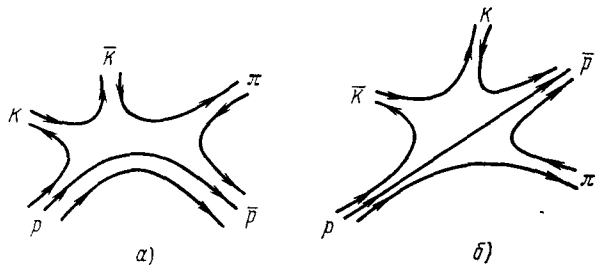


Рис. 30. Кварковые диаграммы для P-(а) и R (S)-диаграммы (б) рис. 29.

Несмотря на эти существенные ограничения, применение ОМВ к реакциям (72) дало удивительные результаты. В качестве примера рассмотрим процессы [71]

$$K^+p \to K^0\pi^+p, \tag{73}$$

$$K^-p \to \bar{K}^0\pi^-p, \tag{74}$$

$$\pi^-p \to K^0K^-p, \tag{75}$$

$$\pi^+p \to \bar{K}^0K^+p, \tag{76}$$

$$p\bar{n} \to K^-K^+\pi^+, \tag{77}$$

которые представляют собой различные каналы одной и той же пятичастичной амплитуды. В (73) — (77) вклад вакуумного полюса мал (здесь справедливо так называемое правило Грибова — Моррисона [72], согласно которому такая подавленность существует в том случае, если в одной из вершин происходит изменение P_τ частицы ($P_\tau = (-1)^j P$, P — внутренняя четность частицы, j — ее спин)). Все нуклоны считались бесспиновыми [73]. Из всех различных конфигураций по правилам кварковых диаграмм (гл. 4, раздел в)) в этих реакциях работают только три (рис. 29; их кварковая структура отражена на рис. 30). На рис. 29 изображены также те

траектории, вклад которых учитывается в [71] (там же содержится подробное обсуждение разумности этого выбора). Каждая конфигурация рис. 29 записывается в виде (например, для P)

$$(P) = \varepsilon_{\mu\nu\delta\sigma} p_\pi^\mu p_K^\nu p_{\overline{K}}^\delta p_p^\sigma B_5 \left(1 - \alpha_{K^*}, 1 - \alpha_{A_2}, \frac{1}{2} - \alpha_\Lambda, 1 - \alpha_\omega, \frac{1}{2} - \alpha_N\right). \quad (78)$$

(78) имеет все полюсы при правильных массах, и ε-фактор учитывает тот факт, что мезонные траектории начинаются с p-волновых резонансов (спинами барионов пренебрежем).

Относительная величина P-, S-, R-вкладов (см. рис. 29) должна быть: $R : S = 1 : 1$ для того, чтобы обмен Δ-реджеоном имел правильную сигнатуру (аналогично вкладу $V(s, t) + V(u, t)$ в (51)); $P : S = 1 : 1$ для того, чтобы правильную сигнатуру имел обмен N_α-реджеоном. Таким образом, амплитуда реакций (73)—(77) в ОМВ записывается в виде

$$A = \beta [(P) + (S) + (R)]. \quad (79)$$

Итак пять реакций описываются формулой (79) с одним параметром β (который в [71] определялся из величины сечения $K^+p \to K^0\pi^+p$ при $p_{K^+} = 5$ *Гэв/с*). В этом проявляется самая замечательная черта ОМВ — явная ее кроссинг-симметричность, что приводит к различным многочисленным

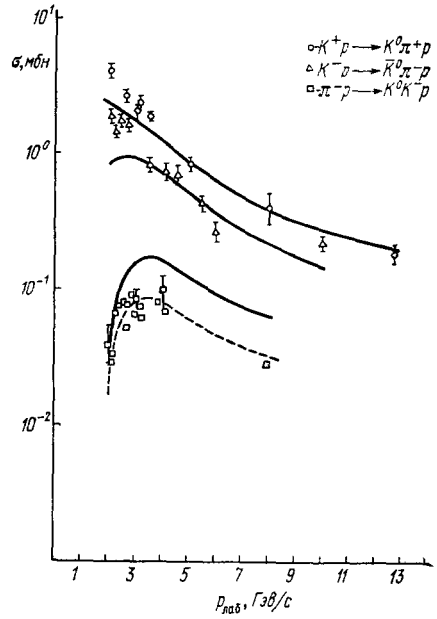


Рис. 31. Полные сечения реакций $K^\pm p \to K^0(\overline{K}^0)\pi^\pm p$ и $\pi^- p \to K^0 K^- p$ [71]. Штриховая кривая — теоретическое предсказание, уменьшенное в два раза.

Таблица IV

Многочастичные реакции, которые обрабатывались в ОМВ

Реакция	Импульс налетающей частицы, *Гэв/с*	Литература
$K^+p \to K^0\pi^+p$ $K^-p \to \overline{K}^0\pi^-p$ $\pi^-p \to K^0K^-p$	2,3—13	71,74
$K^-p \to \overline{K}^0\pi^-p$	3; 10	75
$K^-p \to K^-\pi^+n$	10	76
$K^\pm p \to K^\pm\pi^0 p$	1—10	77
$K^+p \to K^+p\omega$	4; 6; 9;	78
$K^-p \to \overline{K}^0\pi^-p$	3,3	79
$K^-n \to \pi^-\pi^0\Lambda$	3	80
$\pi^-p \to \pi^-K^+\Lambda$	3—6	80
$\pi^-p \to \pi^0K^0\Lambda$	3—6	80
$K^-n \to K^{*-}\pi^-p$	4; 5	81
$K^-n \to \overline{K}^0\pi^-n$	3	82
$K^+n \to K^0\pi^+n$	3	82
$K^-p \to \pi^+\pi^-\Lambda$	3—10	73
$K^-p \to K^{*-}\pi^+n$		83

следствиям. Сравнение (79) с опытом приведено на рис. 31 — 33. Интересно отметить, что сечение реакций (73) и (74) на порядок больше сечения (75), что и получилось из (79). Расхождение в 2 раза для сечения (75) с экспериментом при всех сделанных предположениях не кажется удивительным, особенно если обратить внимание на то, что (79) неплохо описывает характер поведения этого сечения. Остальные распределения также неплохо

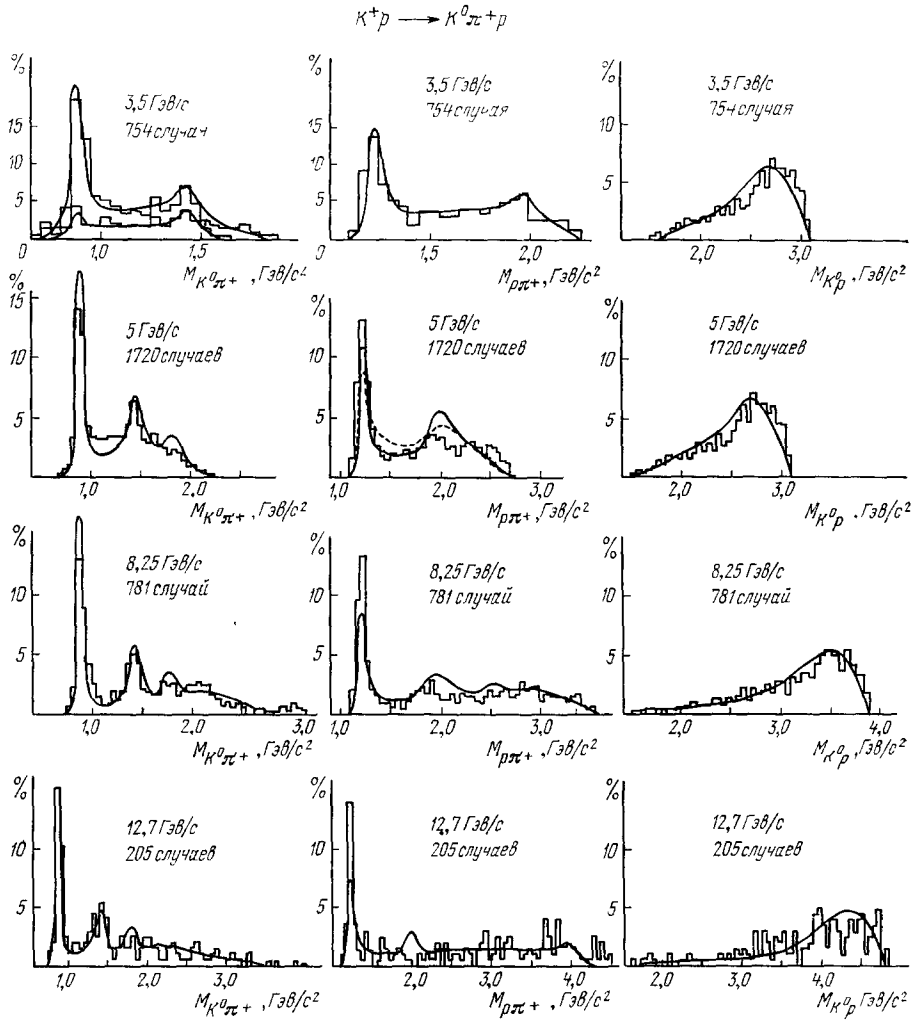


Рис. 32. Массовые спектры реакции $K^+p \to K^0\pi^+p$ [71].

согласуются с экспериментальными (рис. 32 и 33), причем не только в описании вкладов резонансов (их формы и относительной «силы»), но и тех каналов, в которых резонансов нет (см. распределение по массе Kp на рис. 32). Примерно такое же хорошее согласие наблюдается и в остальных реакциях (табл. IV).

Следовательно, несмотря на общие различные предположения и искусственность развитого подхода, ОМВ добилась удивительных

успехов в описании многочастичных процессов, что, по-видимому, в основном связано с явным учетом кроссинг-симметрии в ОМВ (раньше этого не могли делать).

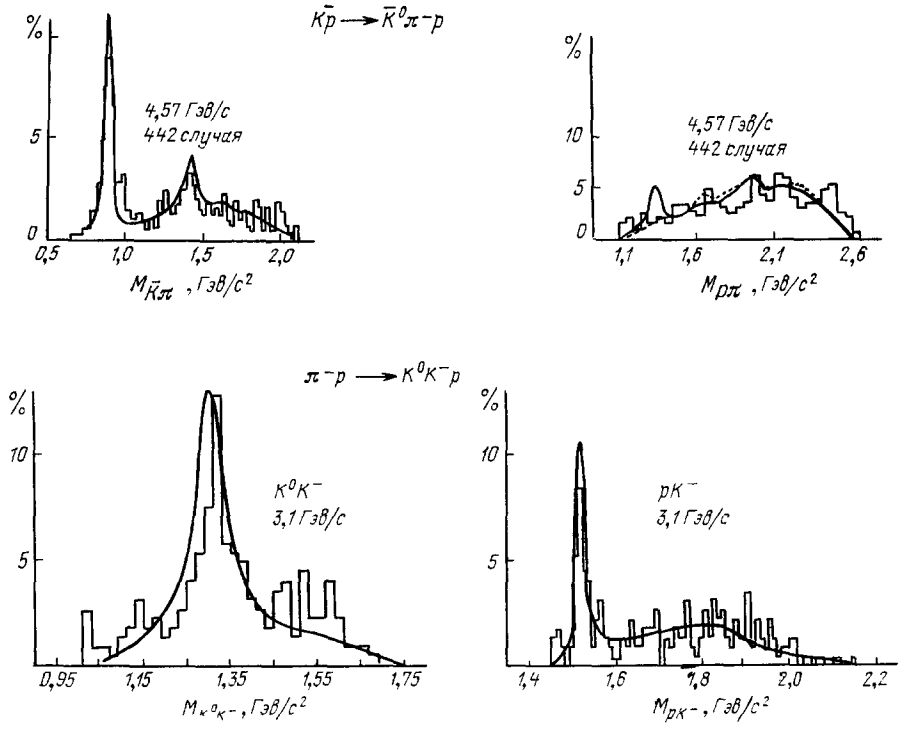


Рис. 33. Массовые спектры реакций $K^-p \to \bar{K}^0\pi^-p$, $\pi^-p \to K^0K^-p$ [71].

д) Реакции дифракционной диссоциации. В реакциях типа

$$NN \to N\,(\pi N), \tag{80}$$
$$\pi N \to \pi\,(\pi N), \tag{81}$$
$$KN \to K\,(\pi N), \tag{82}$$
$$\pi N \to (3\pi)\,N, \tag{83}$$
$$\gamma N \to (2\pi)\,N, \tag{84}$$
$$\gamma N \to (K\bar{K})\,N, \tag{85}$$
$$KN \to (K2\pi)\,N \tag{86}$$

при больших энергиях существен обмен вакуумным реджеоном, поэтому соображения дуальности к этим процессам неприменимы. Однако в [84] была предложена модель, которая неплохо описывает характерные черты этих процессов; идея [84] состоит в том, чтобы амплитуду реакции

$$a + b \to a + (d + c) \tag{87}$$

представить в виде (рис. 34)

$$A(s, t) = g(t_{aa})\, s^{\alpha_P(t_{aa})}\, V_{Pb\to cd}\eta(t_{aa}), \tag{88}$$

где $s = (p_a + p_c)^2$, а $V_{Pb} \to cd$ дается формулой Венециано для амплитуды гипотетической реакции $P + b \to c + d$ (P — вакуумный реджеон, который рассматривается как скалярная частица); например, для (85)

$$V_{P\gamma\to\pi^+\pi^-} = [B_4(1-\alpha_\rho^{\bar{s}}, -\alpha_\pi^t) + (\bar{s} \to u)], \tag{89}$$

где $\bar{s} = (p_d + p_c)^2$, $t = (p_b - p_d)^2$.

(88) отличается от используемой в [84-87]. В ней учитывается тот факт, что вакуумный реджеон движется с изменением t_{aa}, и, кроме того, она имеет правильную асимпто-

тику при больших s и $\bar{s}$. Вид (88) не однозначен; в частности, можно написать $s^{\alpha(t_{aa})}$ где $s = (p_a + p_b)^2$, а в (89) заменить $\alpha^t_\pi \to \alpha^t_\pi - \alpha^t_P$. Однако на сравнение с экспериментом эти видоизменения не сказываются сильно. (88) применялась для описания реакций (80) [84], (81) [85], (85) [85], (86) [87], (84) [88] (для последней реакции V заменялось на B_5), и получены весьма ободряющие результаты (рис. 35—38).

При этом интересно отметить:

1) Хорошее описание формы ρ-пика в (84) (ее асимметрии) (рис. 37).

2) В реакции (84) подавлены все другие резонансы (кроме ρ), и, может быть, именно этим объясняется тот факт, что в этой реакции не виден ρ′ (1^-, 1300 *Мэв*), который по МВ необходим в системе ππ (рис. 37).

3) Зависимость распределения по t_{aa} от массы системы (cd) (рис 38). В частности, если эту зависимость аппроксимировать $\frac{d\sigma}{dt} = e^{bt}$, то b для реакции (80) равен 11 $(Гэв/c)^{-2}$ при малых массах πN и 5 $(Гэв/c)^{-2}$ при больших. Такую зависимость нетрудно понять, так как V (рис. 34) зависит от t_{pp} только из-за условия $\bar{s} + t + \bar{u} = t_{pp} + m^2_\pi + 2m^2_N$; поэтому при больших $\bar{s}$ V вообще от t_{pp} не зависит и вся зависимость определяется $g\,(t_{aa})$ (рис. 34). Сам факт, что при больших массах наклон составляет половину наклона упругого pp-рассеяния (в $\bar{p}p$ $b \approx$ $\approx 10\ (Гэв/c)^{-2}$) является аргументом в пользу такого рассмотрения. При малых s зависимость V от t_{aa} есть, что и дает увеличение наклона.

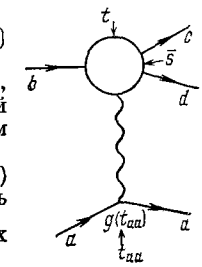


Рис. 34.

4) (88) объясняет хорошо известный экспериментальный факт: в реакции (80) при малых t_{pp} в основном рождается резонанс N (1/2⁺, 1470), а при увеличении t_{pp} увеличивается вклад резонанса N (3/2⁻, 1550), поскольку в данной модели амплитуда

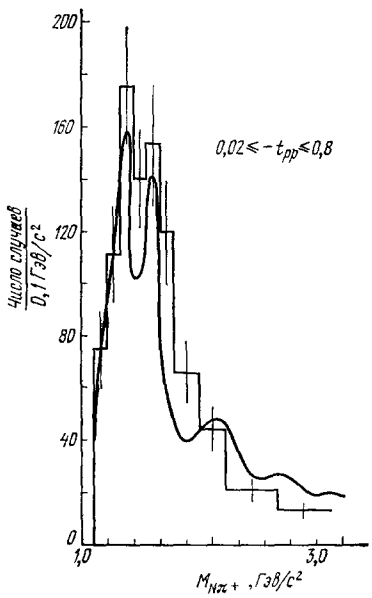


Рис. 35. Распределение по массе (π^+N)-системы в реакции $pp \to p\,(N\pi^+)$ [84].

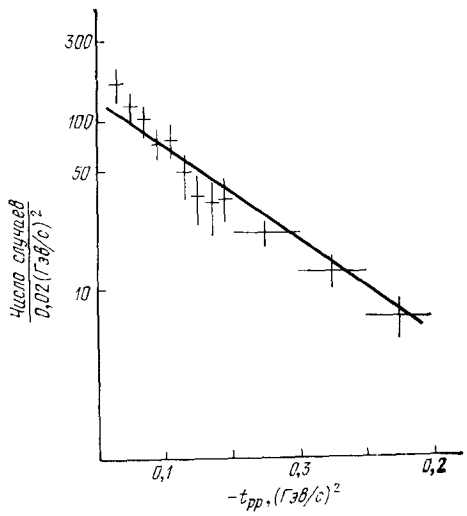


Рис. 36. Распределение по переданному импульсу от протона к протону в $pp \to p\,(N\pi^+)$ [84].

рождения N (1/2⁺, 1470) быстрее падает с ростом t_{pp}, нежели амплитуда рождения N (3/2⁻, 1550), масса которого больше. Заметим, что N (1/2⁺, 1470) в МВ является дочерним резонансом к N_α-траектории (рис. 39), т. е. в этой реакции мы видим некоторое проявление существования дочерних резонансов.

Таким образом, (88) неплохо описывает эксперимент, и этот успех позволяет надеяться на то, что учет вакуумного полюса в схеме дуальности может быть тоже успешным; в частности, можно попытаться написать в ОМВ выражение для амплитуды рассеяния вакуумных реджеонов на частице (N на рис. 16, где вместо ρ взять тоже P) [89] и тем самым определить поправки к чисто полюсному графику в упругом рассеянии, если дальнейшие попытки применения (88) оправдают себя.

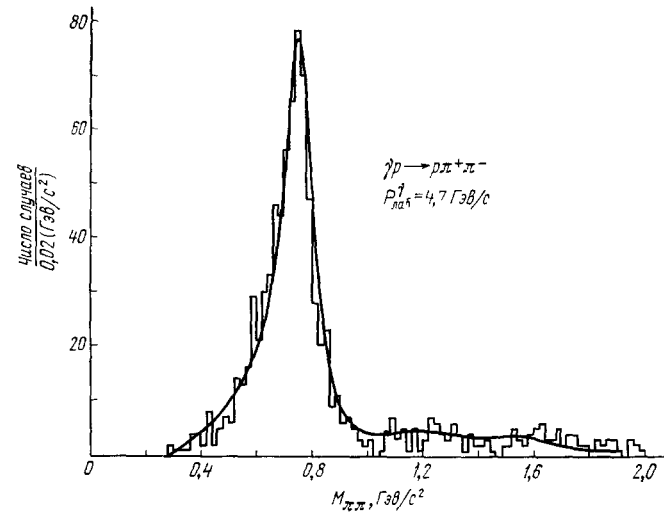


Рис. 37. Распределение по массе ($\pi^+\pi^-$) в реакции $\gamma p \to p\,(\pi + \pi^-)$ [8b].

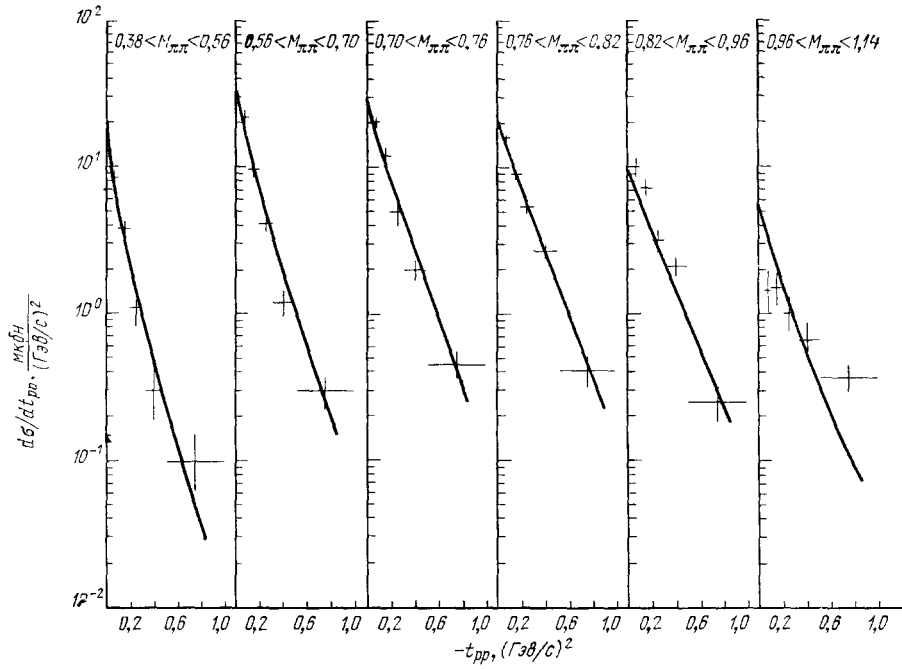


Рис. 38. Распределение по переданному от протона к протону импульсу для различных областей по массам $\pi^+\pi^-$ в реакции $\gamma p \to p\pi^+\pi^-$.

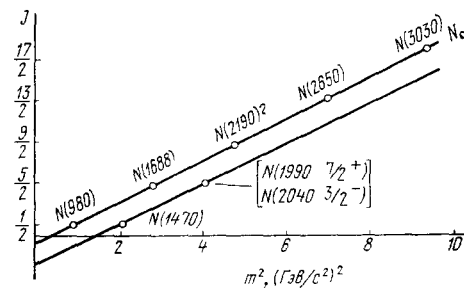


Рис. 39. N_α и дочерняя к ней траектория.

Резонансы взяты из работы [2], ? — отмечает те из них, для которых изменены квантовые числа по сравнению с [3].

7. ВАКУУМНЫЙ ПОЛЮС В ДУАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

До сих пор мы вычитали вклад вакуумного полюса и физическую амплитуду представляли в виде (см. гл. 2)

$$A(s, t) = A_D(s, t) + P(s, t). \tag{90}$$

Нельзя ли что-нибудь более определенное сказать по поводу вклада вакуумного реджеона $P(s, t)$? Как уже отмечалось (гл. II), $P(s, t)$ не может

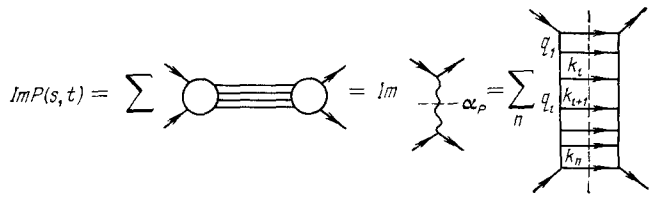


Рис. 40.

быть связан только с резонансами в прямом канале (если, конечно, предполагать, что отсутствуют резонансы в экзотических каналах). В работах [90] предположено, что вклад полюса Померанчука определяется фоном в s-канале реакции, т. е. для вакуумного полюса уравнения дуальности имеют вид (рис. 40).

$$\mathrm{Im}\, A_{\text{фон}} = \mathrm{Im}\, P(s, t). \tag{91}$$

Эта идея хорошо согласуется с общепринятым в настоящее время мнением, что постоянное сечение при больших энергиях определяется процессами так называемого «лестничного» типа, которые кинематически отличаются от остальных тем, что все $q_i^2 \approx m^2$, а k_{iL} (продольный импульс рождающихся частиц) образуют геометрическую прогрессию $k_{(i+1)\,L} = \lambda k_{iL}$ [91]. Экспериментальным подтверждением (91) является поведение комбинации парциальных волн πN-рассеяния f^0_{jl} (изотопический спин в t-канале равен 0). Из рис. 10 нетрудно видеть, что в этой комбинации весьма существен нерезонансный вклад, причем он в основном мнимый (напомним, что при $t = 0$ вакуумный реджеон дает чисто мнимый вклад). Особенно это заметно при сравнении с f^1_{jl}, в которую вакуумный реджеон не дает вклада и которая описывает замкнутые петли на диаграмме Аргана (см. рис. 10).

Такая связь нерезонансного фона с вкладом полюса Померанчука позволяет на основе фазового анализа при сравнительно небольших энергиях сделать некоторые предсказания относительно спиновой структуры вакуумного реджеона. На рис. 41 представлены парциальные волны с изотопспином нуль в s-канале, как сохраняющие s-канальную спиральность (F^0_{++}), так и изменяющие ее F^0_{+-} [92]. Видно, что вклад фона в F^0_{+-} сравнительно мал. Поэтому из (91) можно сделать вывод, что вакуумный полюс сохраняет спиральность в s-канале (при большой энергии обмен вакуумным реджеоном дает вклад только в инвариантную функцию B в (64) для πN-рассеяния). Мы уже пользовались успешно этим свойством вакуумного полюса при обсуждении поведения поляризации в гл. 4. Однако надо отметить, что этот вывод существенно зависит от того, каким фазовым анализом мы пользуемся. В частности, для KN-рассеяния два фазовых анализа дают совершенно противоположные результаты [16]. При импульсе 6 *Гэв/с* в настоящее время, помимо поляризации, измерены параметры вращения спина, что позволило восстановить F^0_{++} и F^0_{+-} для этой энергии. Как уже отмечалось, в области $t \sim -0{,}6$ $(Гэв/с)^2$ вклад невакуумных

полюсов должен обращаться в нуль, поэтому отношение [93]

$$\frac{F_{++}^{(0)}}{F_{+-}^{(0)}} = -0{,}1 \pm 0{,}1$$

характеризует вакуумный полюс и свидетельствует в пользу сохранения спиральности. Таким образом, соотношение (91) оказалось весьма полезным. Однако буквально (91) противоречит кроссинг-симметрии [94]. Действительно, для того чтобы правильно учесть все свойства симметрии в $\pi\pi$-рассеянии, надо $V(s, t)$ в (51) заменить на $V(s, t) + P(s, t)$, и тогда мы сразу видим, что фон дает вклад в амплитуду с изотопическим спином 1 в t-канале ($A_t^1 \sim P(s, t) - P(u, t)$), в которую вакуумный полюс не дает вклада. Поэтому фон не может быть дуален только вакуумному полюсу. В связи с этим возникает привлекательная идея, что вакуумный полюс в дуальной теории появится при унитаризации ОМВ. Как уже отмечалось, мы рассматриваем ОМВ как первое приближение к физической амплитуде, причем мы считаем это приближение хорошим в том смысле, что все унитарные поправки малы, т. е. физическую амплитуду мы можем представить себе в виде ряда по малому параметру g^2, и борновский член этого ряда соответствует ОМВ:

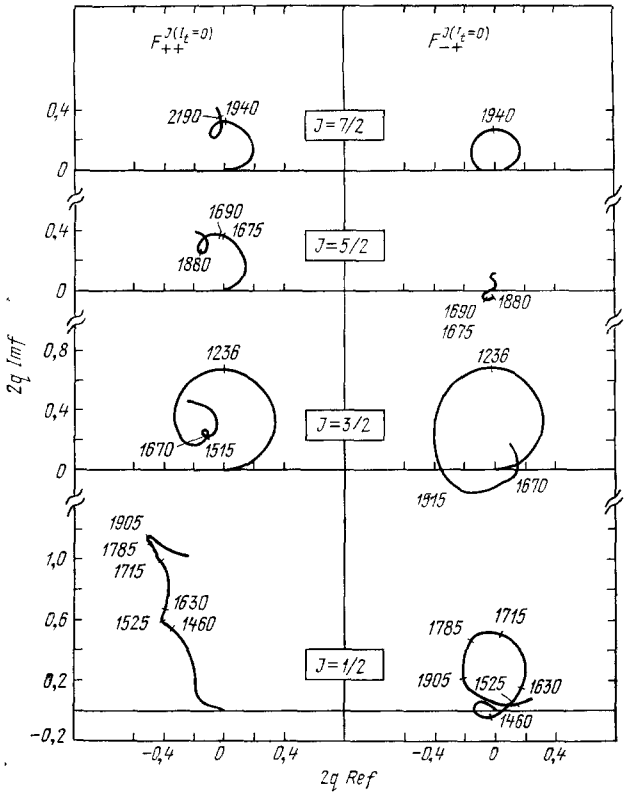


Рис. 41. Диаграммы Аргана для F_{++}^0 и F_{+-}^0 [92].

$$A(s, t) = A_D(s, t) + g^2 A_1 + g^4 A_2 + \ldots, \qquad (92)$$

причем резонансы полностью содержатся в A_D (очевидно, что вблизи резонанса ряд (92) не имеет смысла, и его надо просуммировать по g^2, чтобы получить правильную ширину резонанса). В A_1 содержатся уже процессы, не связанные с рождением одного резонанса (фоновые), и идея получения вакуумного полюса заключается в том, что в A_1 есть член, который растет как s с правильными вакуумными числами. Важность этого вклада при сравнении с экспериментом обусловлена тем, что при некоторых энергиях он сравнивается с первым членом (92), т. е. на самом деле разложение в ряду (92) идет не по g^2, а скорее по $g^2 s^{1/2}$. Какие есть основания думать, что ряд (92) действительно существует, и что такое механизм образования вакуумного полюса?

а) Прежде всего оценим параметр g^2, предположив, что разложение (92) существует. Ясно, что все оценки надо проводить при $s \sim 1$ *Гэв*,

поскольку вся зависимость от s в дуальных моделях будет входить через $\alpha(s)$ (при $s = 1$ *Гэв* $\alpha(s) \sim 1$).

1) При $g^2 \to 0$ траектории Редже линейны, поэтому $\mathrm{Im}\,\alpha(s)/\mathrm{Re}\,\alpha(s) \sim g^2$ при $s \sim 1$ *Гэв*. Это отношение (см. (57) и рис. 2) равно 0,1—0,3.

2) $\sigma(K^+p)/[\sigma(K^-p - \sigma(K^+p)] \approx g^2$ (это отношение есть отношение вклада вакуумного полюса к резонансному вкладу). Вблизи порога

$$\sigma(K^-p) \approx 100 \text{ мбн}, \quad \sigma(K^+p) \approx 20 \text{ мбн}, \text{ т. е. } g^2 \sim 0{,}25.$$

3) $$\frac{d\sigma(K^-p \to pK^-)}{dt} : \frac{d\sigma(K^+p \to pK^+)}{dt} \approx g^4,$$

так как в процессе $K^-p \to pK^-$ нет резонансов в t-канале. Экспериментальное значение при $p_K = 5$ *Гэв/с* этого отношения равно [12] $\sim 10^{-2}$, т. е.

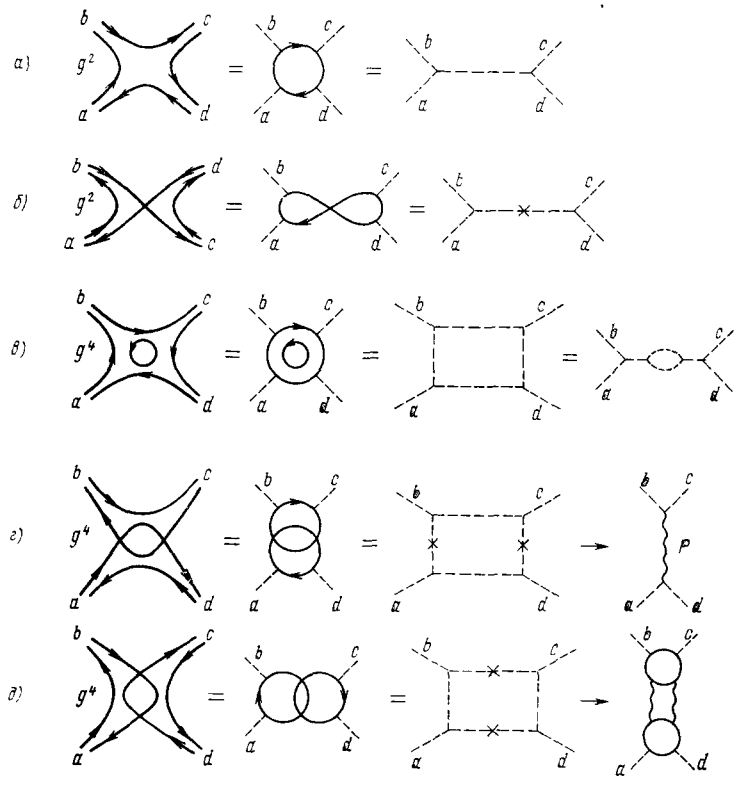


Рис. 42. Кварковые диаграммы для четыреххвостки в g^2- и g^4-приближениях.
Сплошные линии — кварки, штриховые — мезоны.

$g^2 \sim 0{,}1$. Аналогичная подавленность существует и для остальных процессов, обусловленных экзотическим обменом (типа $K^-p \to K^+\Xi^-$, $K^-p \to K^0\Xi^0$ вперед). Таким образом, все оценки приводят к тому, что $g^2 \to 0{,}2$—$0{,}3$, причем вклад вакуумного полюса можно считать величиной второго порядка по g^2 (см. вторую оценку и ее совпадение с остальными).

б) Более того, при построении ряда (92) (более подробно см. [95]) в порядке g^2 возникают вклады, соответствующие вакуумным числам в t-канале. Для того чтобы посмотреть, как это происходит, рассмотрим дуальные диаграммы для рассеяния частиц с изотопспином единица (рис. 42). Дуальная амплитуда соответствует диаграммам рис. 42, *а* и *б*

(рис. 42, *а* соответствует (s, t) члену, а рис. 42, *б* — (s, u)). Изотопическая структура этих графиков дается множителем $\mathrm{Sp}\,(\tau_a\tau_b\tau_c\tau_d)$ для рис. 42, *а* и $\mathrm{Sp}\,(\tau_a\tau_b\tau_d\tau_c)$ для рис. 42, *б* (τ — изотопические матрицы) (такая запись соответствует правилам работы [96]). Поправкам к дуальной амплитуде соответствуют графики, которые содержат по четыре кварковые линии (см. рис. 42, *в* — *д*). Диаграмма рис. 42, *в* повторяет изотопическую структуру дуальной амплитуды, и ее учет приводит лишь к появлению ширины у резонансов [97]; рис. 42, *г* имеет изотопическую структуру $\mathrm{Sp}\,(\tau_b\tau_c) \times \mathrm{Sp}\,(\tau_a\tau_d)$, что соответствует изотопспину нуль в t-канале (рис. 41, *д*) — $\mathrm{Sp}\,(\tau_a\tau_b)\,\mathrm{Sp}\,(\tau_c\tau_d)$, и ему соответствует изотопспин нуль в s-канале. Таким образом, графики типа рис. 42, *г* соответствуют вакуумным числам t-канала и могут давать вакуумный полюс. Более того, при конкретном рассмотрении поправок такого типа в теории с одними вакуумными частицами (приложение II), в графиках типа рис. 42, *г* действительно появляется особенность в плоскости углового момента (разрез), которая начинается от точки $j = (1/3) + (1/2)\,bt$, где b — наклон невакуумных траекторий (что приводит к поведению полного сечения $s^{-2/3}/(\ln s)^n$). Однако эта особенность не соответствует постоянному полному сечению и, кроме того (и это основная трудность в ее понимании), скачок на ней не выражается через реальные промежуточные состояния, и следовательно, ее существование нарушает условие унитарности. Надежды на то, что учет реальных квантовых чисел сдвинет эту особенность в $j = 1$ и сделает ее полюсом, по-моему, ничего не дает, так как нет надежды, что это продвинет нас в понимании связи этой особенности с реальными промежуточными состояниями. По-видимому, ее появление связано с недостатками нашего борновского приближения. Дело в том, что в ОМВ число резонансов с данной массой (M) огромно ($\sim e^{C\sqrt{M^2}}$), однако в определенной «многохвостке» все парциальные амплитуды порядка единицы при больших энергиях, так как вероятность распада каждого резонанса на данное число частиц очень мала ($\sim e^{-a\sqrt{M^2}}$). Но в графиках типа рис. 42, *в* — *д* возможен при заданной сколь угодно большой энергии распад резонанса на сколь угодно большое число частиц (с немалой вероятностью), и поэтому вклад таких состояний в парциальную волну велик (пропорционален числу резонансов) Это приводит к росту мнимой части амплитуды при большой энергии, а это в свою очередь приводит к экспоненциальной расходимости типа рис. 42, *в* и появлению особенности типа рис. 42, *г*. Если первое может быть убрано с помощью перенормировки траектории невакуумных реджеонов [97], то что делать с вакуумной особенностью, абсолютно неясно, и это составляет основную трудность теоретического подхода.

8. ИНКЛЮЗИВНЫЕ РЕАКЦИИ

В последнее время большой интерес вызывают так называемые «инклюзивные» реакции, т. е. реакции типа

$$a + b \to c + M, \tag{93}$$

где M — произвольное число частиц, которые не регистрируются в эксперименте. Дифференциальное сечение реакции (93) можно связать со скачком от амплитуды процесса [98]

$$a + b + \bar{c} \to a + b + \bar{c}. \tag{94}$$

При больших энергиях, при которых основной вклад в полное сечение дают процессы лестничного типа, эта связь показана на рис. 43. Реакцию

(93) удобно характеризовать переменным

$$x=\frac{p_{cL}}{p_{cL\,\max}}\quad up_{c\perp}, \tag{95}$$

где p_{cL} и $p_{c\perp}$ — составляющие импульса частицы c, направленные по или перпендикулярно импульсу налетающей частицы a в системе, где b покоится.

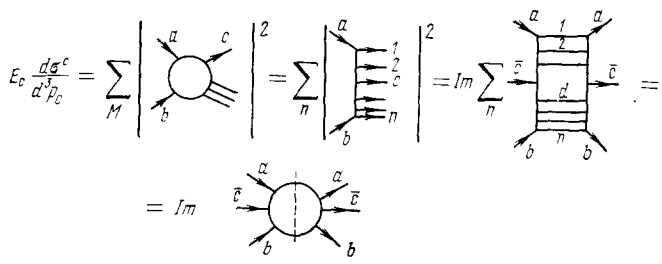


Рис. 43.

В терминах (95) инвариантные переменные имеют вид (при больших s)

$$\left.\begin{aligned} &s=(p_a+p_b)^2,\\ &s_{a\bar c}=(p_a+p_c)^2=m_a^2(1-x)+m_c^2\left(1-\frac{1}{x}\right)-\frac{p_{c\perp}^2}{x}+O\left(\frac{1}{s}\right),\\ &s_{b\bar c}=(p_b-p_c)^2=xs+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right),\\ &M^2=(p_a+p_b-p_c)^2=(1-x)\,s+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

При больших энергиях легко разделить три кинематических района реакции (93) [99, 100].

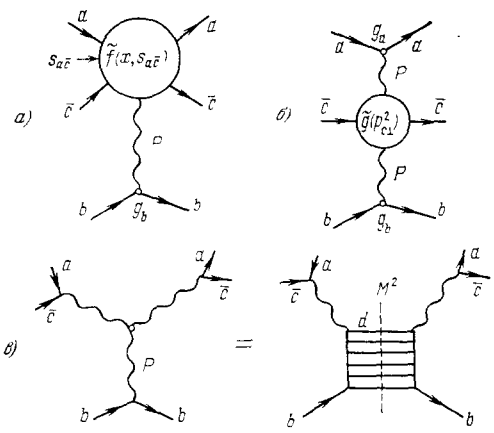


Рис. 44. Одноредженный ($а$), двухредженный ($б$) и трехредженный ($в$) режимы.

а) Одноредженный обмен: $s_{a\bar c}$ — фиксирована (т. е. фиксировано x), M^2/s — фиксировано.

В этом районе сечение (93) описывается диаграммой рис. 44, $а$ (что легко понять, принимая во внимание рис. 42, $г$ и 40) и имеет вид

$$E_c\frac{d\sigma^c}{dp_{cL}d^2p_{c\perp}}=\tilde f(s_{a\bar c},x)\,g_b=f(s_{a\bar c},x). \tag{97}$$

Таким образом, при большой энергии сечение не зависит от этой энергии [99]; такое распределение неплохо согласуется с современными экспериментальными данными [101].

б) Двухредженный обмен:

$$s_{a\bar c},\ s_{b\bar c}\to-\infty,$$

а

$$s_{a\bar c}s_{b\bar c}/s=p_{c\perp}^2+m_c^2$$

постоянно.

В этой области дает вклад диаграмма рис. 44, *б*, и

$$E_c \frac{d\sigma^c}{dp_{cL} d^2 p_{c\perp}} = \tilde{g}(p_{c\perp})\, g_a g_b = g(p_{c\perp}). \tag{98}$$

в) Трехреджеонный обмен. $s/M^2 \to +\infty$, $M^2 \to +\infty$. Это означает, что энергия $s_{\bar{c}d}$ велика, т. е. между $\bar{c}$ и d надо пропустить реджеон (см. рис. 44, *в*). Вклад этой области естественно записать в виде (см. рис. 44, *в*)

$$E_c \frac{d\sigma^c}{dp_{cL}\, d^2 p_{c\perp}} = (s - M^2)^{2\alpha(s_{a\bar{c}})} (M^2)^{\alpha(0) - 2\alpha(s_{a\bar{c}})} h(s_{a\bar{c}}) =$$

$$= x^{2\alpha(s_{a\bar{c}})} (1-x)^{1-2\alpha(s_{a\bar{c}})} h(s_{a\bar{c}}) \quad (\text{при } \alpha(0) = 1). \tag{99}$$

Конечно, два последних района могут рассматриваться как специальные пределы первого, и в этом смысле (99) представляет собой пример зависимости от x функции $f(x, s_{a\bar{c}})$ в (97).

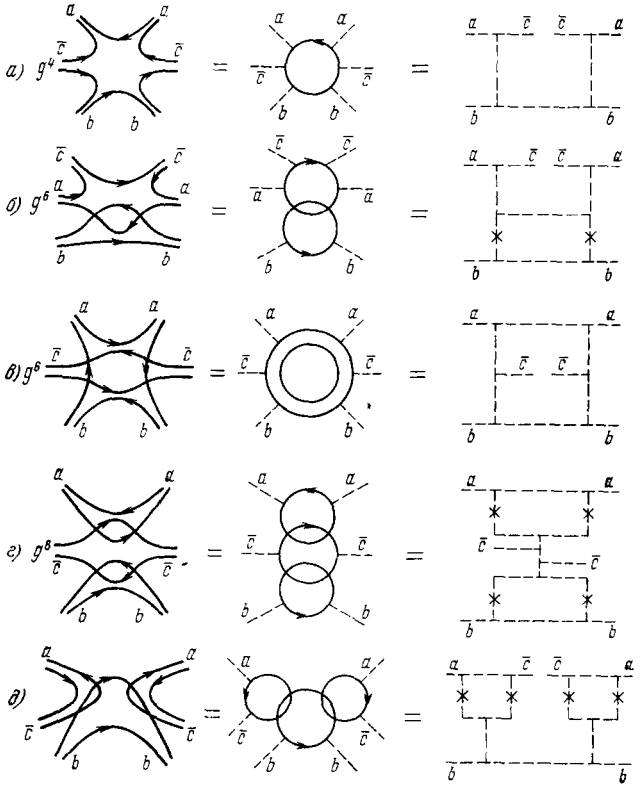


Рис. 45. Кварковые диаграммы для процесса $a + b + \bar{c} \to a + b + \bar{c}$.
Степени g^2 перед диаграммами соответствуют наинизшему порядку, в котором они появляются.

Дуальные модели пытаются ответить на два вопроса: 1) как быстро наступает предельный режим (97) (т. е. каковы поправки, зависящие от энергии K (97)) и 2) каковы неизвестные функции f, g, h в (97) — (99).

Степенные по s поправки к (97) возникают за счет обмена каким-то реджеоном, но не полюсом Померанчука на рис. 44, *а*. Например, они

могут быть обусловлены обменом f-реджеоном. Тогда

$$E_c \frac{d\sigma^c}{d^3p_c} = f(x, s_{\bar{ac}}) + \varphi(x, s_{\bar{ac}})\, s^{\alpha_f(0)-1}. \qquad (100)$$

Нельзя ли выбрать такие реакции, где φ была бы мала и для которых предельный режим достигался бы при сравнительно небольших энергиях? Для выяснения этого рассмотрим дуальные графики, которые соответствуют реакции (94) (рис. 45; степени g^2 характеризуют низший порядок, в котором эти графики появляются). Из рис. 45 видно, что основной вклад в f дает диаграмма рис. 45, *б* (при этом мы, конечно, предполагаем, что вакуумный полюс в дуальных моделях описывается конфигурацией рис. 42, *г*, что именно этот график обеспечивает постоянство сечений при больших энергиях). Основные же поправки определяются диаграммой рис. 45, *а* (конечно, другие диаграммы также дают вклад в $\varphi(x, s_{\bar{ac}})$ в (100), но они имеют малость порядка g^2). Поэтому, если мы рассмотрим реакцию (93), в которой канал $a+b+c$ экзотический (например, $pp \to \pi + M$ *)), то рис. 45, *а* не дает вклада, и поэтому φ будет мала [102-104]. На рис. 46 показано сечение реакции при $P_{K^+} = 5$ и 8 *Гэв/с*. Видно, что режим (97) хорошо выполняется при этих сравнительно малых энергиях [106]. Этот факт является еще одним аргументом в пользу существования малого параметра g^2, так как в эту реакцию поправки типа графика рис. 45, *в* дают вклад в $\varphi(x, s_{\bar{ac}})$. Более того, исходя из диаграмм рис. 45, легко оценить параметр g^2 из инклюзивных экспериментальных данных [104].

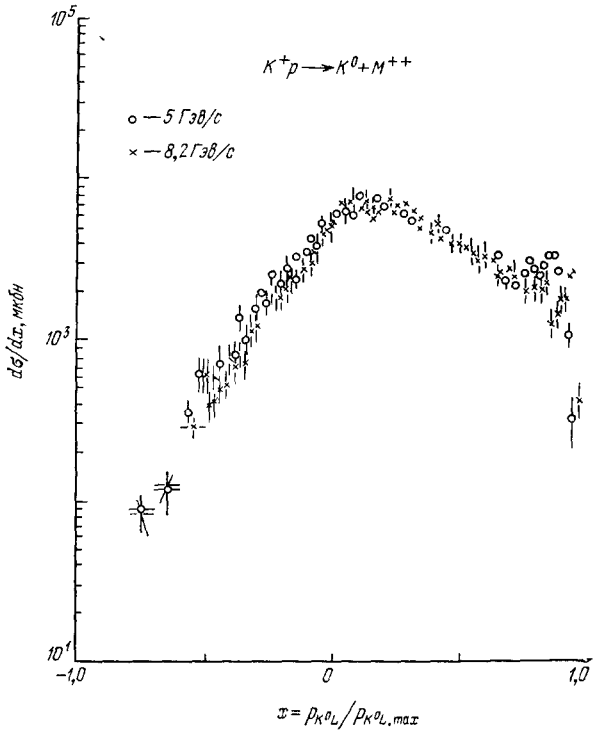


Рис. 46. Сечение реакции $K^+p \to K^0M^{++}$ при $P_{K^+} = 5$ и 8,2 *Гэв/с* в зависимости от $x = P_{K^0L}/P_{K^0L,\max}$ [105].

1) Рассмотрим реакции [106]

$$K^+p \to \pi^- + M^{+++} \quad \text{при } 12{,}7 \text{ Гэв/с}, \qquad (101)$$

$$K^-p \to \pi^- + M^{+} \quad \text{при } 9 \text{ Гэв/с}, \qquad (102)$$

$$\pi^+p \to \pi^- + M^{++++} \quad \text{при } 7 \text{ Гэв/с}, \qquad (103)$$

$$\pi^-p \to \pi^- + M^{+} \quad \text{при } 25 \text{ Гэв/с}. \qquad (104)$$

Для величин

$$f^*_{Km} = \frac{E_c\, d\sigma^c/d^3p_c}{[\sigma(K(\pi)\, p)]_\infty}$$

*) Здесь M — от английского «миссинг», что обозначает систему, т. е. «все остальное».

имеем $f^{+}_{\pi^-} - f^{*}_{\pi^+} \sim g^2$ и $f^{*}_{K^-} - f^{*}_{K^+} \sim g^2$, а $f^{*}_{\pi^+} - f^{*}_{K^+} \sim g^4$, так как для реакций (101) и (103) канал $a+b+\bar{c}$ экзотический. В эксперименте, действительно, первые две разности одного порядка и на порядок больше третьей [104], т. е. $g^2 \sim 0{,}1$.

2) Рассмотрим процессы

$$p+p \to K^+ + M^+, \tag{105}$$

$$p+p \to K^- + M^{+++}. \tag{106}$$

В (105) и (106) канал $a+b+\bar{c}$ экзотический; кроме того, в (106) экзотические каналы $a\bar{c}$ (pK^+) и $b\bar{c}$ (pK^+), поэтому реакция (105) определяется диаграммой рис. 45, *б* (который порядка g^6), а вторая лишь диаграммой рис. 45, *г* (g^8).[4] Экспериментально сечение (при $-0{,}5 < x < 0{,}2$ в СЦИ при $p_\perp < 0{,}70$ *Гэв/с*) реакции (105) в 5—300 раз больше (106), т. е. $g^2 \sim 0{,}1$ [104].

Теперь остановимся на некоторых характерных чертах функций f, g, h в дуальных моделях. Прежде всего, в двухреджеонной области основной вклад дает диаграмма рис. 45, *г* (g^8) и, следовательно, $d\sigma^c$ в этой области по сравнению с сечением в однореджеонной области меньше в g^2 раз ($g^2 \sim 0{,}1$). Далее интересно отметить, что в трехреджеонной области не дает вклада диаграмма типа рис. 44, *в* с тремя вакуумными реджеонами (его нет среди рис. 45), и если считать, что суммирование графиков по g^2 приведет в основном к изменению затравочных траекторий, то он вообще не появится). Стремление к нулю такого вклада при $s_{a\bar{c}} \to 0$ с ростом энергии необходимо для того, чтобы обеспечить постоянство полного сечения [107]. Поэтому в (99) $\alpha\,(s_{a\bar{c}})$ — невакуумная траектория, что сказывается на характере поведения $f\,(x,\ s_{a\bar{c}})$ при $x \to 1$. В частности, сечение реакций с экзотическим каналом $a\bar{c}$ (например, $\pi^+ p \to \pi^- + M^{+++}$) должно быстро падать при $x \to 1$, что хорошо согласуется с экспериментом[106]. Более детальное поведение функции $f\,(x,\ p^2_\perp)$ из диаграммы рис. 45, *б* рассматривалось в [103, 108], и основные ее свойства следующие (для $pp \to \pi^+ + M^+$):

а) при $p^2_{cL} = 0$ распределение по x близко к $\exp(-cx^2)$, $c = 7{,}4$;

б) если x не малые, то $f\,(x,\ p^2_\perp) = f_1\,(x)\,f_2\,(p^2_\perp)$;

в) зависимость от $p^2_\perp$ очень быстрая, особенно для малых x (например, при $x = 0{,}06$ и $p^2_\perp = 0{,}9$ $(Гэв/с)^2$ сечение становится на два порядка меньше экспериментального, совпадая с ним при $p^2_\perp = 0$);

г) $g\,(p^2_\perp)$ при больших $p^2_\perp \sim e^{-4bp^2_\perp}$ [108]. Этот факт не завис т от всяких деталей модели, и сравнение с экспериментом может оказаться интересным. Все же остальное носит сугубо ориентировочный характер, так как не ясно, как оперировать с вакуумным полюсом в схеме дуальности.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы видим, что дуальные модели привели ко многим результатам, хорошо согласующимся с экспериментом. Обменное вырождение (гл. 4, п. а)), связь с симметриями (гл. 4, п. б)), простые формулы для многочастичных реакций, которые явно зависят от реджевских траекторий, определяющих как спектр частиц, так и рассеяние при больших энергиях, которые позволяют учитывать аналитичность и кроссинг-симметрию и, по-видимому, правильно описывают вклад различных резонансов и даже фон во многих реакциях (гл. 6, 8), надежды на то, что появился малый параметр в теории сильных взаимодействий (гл. 7, 8), составляют привлекательную сторону дуальных моделей и обеспечивают стойкий интерес к ним.

Однако надо сделать честные признания:

1. Экспериментально не обнаружено ни одной дочерней траектории, и тем самым не подтверждено основное требование дуальности: вырождение резонансов с одной массой по спинам. Косвенные наблюдения над спектром резонансов лишь не противоречат идеи дуальности, но не подтверждают ее (гл. 3 и 5).

2. Дуальный подход противоречит современному эксперименту в барион-барионном рассеянии (гл. 4, п. в)).

3. Нет идей, которые могли бы совместить прямолинейные траектории с отсутствием вырождения по четности в спектре барионных резонансов (гл. 6, п. б)).

4. Нет формул, и написание их наталкивается на серьезные трудности, которые бы учитывали реальные квантовые числа частиц и реальные реджевские траектории в многочастичных процессах.

5. Все согласие с опытом получается только после дополнительного введения экспериментальных ширин резонансов в формулы (поэтому, возможно, имеет смысл взять в виде первого приближения выражение, сразу включающее ширины резонансов [109], хотя такие формулы имеют неограниченный произвол).

6. Очень скудные качественные подтверждения формул дуальных моделей (гл. 5).

7. Дуальные модели неплохо описывают величину вкладов различных резонансов и даже фон в довольно большом числе реакций (см. гл. 6 и табл. IV), но при более конкретном подходе мы находим большое количество несоответствий между простыми формулами дуальных моделей и данными эксперимента. (Например, спектр барионных резонансов в SU_3 (гл. 4, п. б)), существование ρ' (1^-, 1300) в рассеянии π-мезонов (гл. 6, п. а)), невозможность получить правильную величину сечения рассеяния назад $\pi N \to N\pi$ (гл. 6, п. б) и т. д.). Несмотря на то, что все эти затруднения находят довольно разумное объяснение и с помощью усложнения формул ОМВ могут быть ликвидированы, все-таки создается впечатление, что дуальные модели описывают эксперимент как-то очень в среднем, хотя, возможно, все это происходит из-за недостатков конкретных реализаций идей дуальности.

8. Даже при чисто теоретическом обсуждении мы наткнулись на трудность в понимании смысла вакуумной особенности.

Все это заставляет с большой осторожностью относиться к успехам дуальности. В связи с этим хотелось бы ответить на вопрос: какие эксперименты необходимы для того, чтобы выяснить, есть дуальность или ее нет? К сожалению, очень трудно дать сколько-нибудь однозначный ответ на него, и это связано в основном с тем, что теоретическое построение дуальных моделей находится в чрезвычайно зачаточном состоянии. Сейчас совершенно неизвестно, какой характер имеют поправки к дуальным моделям, и поэтому не ясно, как изменятся предсказания дуальности с учетом этих поправок. Очевидно только, что такие «поправки», как вклад вакуумного реджеона и полные ширины резонансов, играют далеко не малую роль при сравнении с экспериментом. Поэтому имеет смысл перечислить те результаты дуального подхода, которые не зависят от конкретных формул дуальных моделей и которые, вероятно, слабо изменятся при учете недуальных поправок.

1. В дуальных моделях: а) должны существовать резонансы со сколь угодно большой массой; б) с одной и той же массой должно быть много резонансов с разными спинами: в) ширины распада резонансов в данный канал должны быстро падать с ростом массы (гл. 3). Такой спектр резонансов — основа дуальности и обнаружения резонансов, лежащих на дочерних траекториях, крайне важных для дуальных моделей. Поскольку, как уже обсуждалось в гл. 3, вполне возможно, что полные ширины резонансов растут с ростом масс и становятся больше разницы масс соседних резонансов, то, видимо, усилия в этой области должны быть сосредоточены на поиске и определении квантовых чисел резонансов со сравнительно малыми массами (например, $m < 2{,}5$ *Гэв*). В частности, для πN-рас-

сеяния было бы очень интересно сделать фазовый анализ, в котором предполагались бы все необходимые резонансы. Подлинным успехом дуальных моделей было бы обнаружение мезона ρ' (1^-) с массой от 1,1 до 1,5 *Гэв*, с полной шириной до 250 *Мэв*, с упругой шириной в $\pi\pi$-систему от 25 до 110 *Мэв* (см. гл. 6, раздел а) и [110]). Так как рождение его в различных бинарных реакциях может быть подавлено (гл. 6, раздел д)), то лучшая реакция, в которой его надо искать, это, видимо, $e^+e^- \to \rho' \to (\bar{n}\pi)$.

2. Из общих требований дуальности следует обменное вырождение невакуумных полюсов Редже, что приводит к вполне конкретной параметризации вычетов полюсов Редже. В настоящее время, по-видимому, общая совокупность всех данных по высокоэнергетическому рассеянию говорит в пользу именно такой параметризации (гл. 4, п. а) и [111]). Однако накопление данных по поляризации в различных реакциях, изучение минимумов в дифференциальных сечениях таких процессов, как $\pi^- p \to A_2^0 n$, измерение сечений реакций типа $K^+n \to K^0p$, $K^-p \to \bar{K}^0n$ (см. (20)) при бо́льших энергиях имело бы решающее значение для выяснения наличия обменного вырождения.

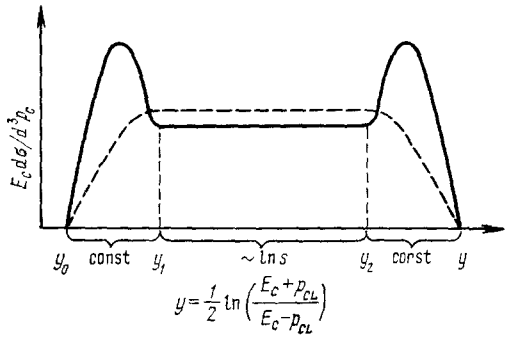


Рис. 47.

3. Как уже подробно обсуждалось в гл. 5, наиболее характерным требованием модели Венециано является наличие минимумов в дифференциальных сечениях бинарных реакций и на далитц-плоте для реакций типа $a+b \to c+d+e$ при условии (50). В некоторых реакциях, таких, как $\pi N \to \pi N$, $K^-p \to \bar{K}^0n$, минимумы встречаются при требуемых значениях переменных (для $K^-p \to \bar{K}^0n$, например, они должны быть при $u = -0{,}6$, $-1{,}6$, $-2{,}6$ $(Гэв/c)^2$, а наблюдаются при $u = -0{,}1$, $-0{,}7$, $-1{,}7$ $(Гэв/c)^2$, в других же, таких, как $\bar{K}N \to \pi\Lambda$, $\pi^-p \to K^0\Lambda$, минимумов при фиксированных t и s нет, а они встречаются почему-то при фиксированных $s - t$) [43, 112]. Также не ясна ситуация с минимумами на далитц-плоте в реакции $p\bar{n} \to 3\pi$, в которой почему-то присутствует лишь часть требуемых минимумов (см. гл. 5 и рис. 23, 24). Поэтому для выяснения действительного положения дел необходимы измерения дифференциальных сечений других реакций (например, $\pi N \to \pi\Delta$) при низких энергиях и далитц-плота $p\bar{n} \to 3\pi$ (и других подобных реакций) при бо́льших энергиях.

4. Для инклюзивных реакций дуальные модели предсказывают:

а) Реакции типа $\pi^+p \to \pi^-M$, $pp \to \pi\,(K)\,M$, $\pi^\pm p \to K^-M$, $K^+p \to \pi^\pm M$, $K^+p \to K^0M$ должны давать предельное распределение (97) при более низких энергиях, чем реакции типа $\pi^+p \to \pi^+M$, и т. д. (см. гл. 7). Экспериментальные данные по этим реакциям весьма скудные, и если для $K^+p \to K^0M$ сечение совпадает при энергиях 5 и 8 *Гэв/с* (см. рис. 46), то для реакции типа $\pi^+p \to \pi^-M$ оно значительно отличается при $X > 0{,}7$ (и хорошо совпадает при меньших X) при энергиях 8 и 16 *Гэв/с* (см. [112]).

б) Поведение $E_c d\sigma_c/d^3p_c$ в зависимости от переменной $y = (1/2)\ln[(E_c + p_{cL})/(E_c - p_{cL})]$ имеет вид, изображенный на рис. 47 (штриховая кривая соответствует фазовому объему при $p_{c\perp} = 0$). К сожалению, нет возможности оценить величину $y - y_1$ в дуальных моделях, поэтому тот факт, что при современных энергиях мы не наблюдаем тако-

го распределения, еще ни о чем не говорит. Для изучения этого вопроса необходимы измерения сечений во всей области p_{cL} при бо́льших энергиях (космические эксперименты или эксперименты на встречных пучках в ЦЕРН).

5. В пп. г), д) гл. 6 довольно подробно обсуждались результаты конкретных обработок в ОМВ. Как к ним относиться и стоит ли их продолжать? Мне кажется, что имеет смысл продолжать такие попытки, но главное внимание должно быть обращено не на согласие формул с экспериментом, а на то, какие изменения в модели слабо сказываются на тех или иных характеристиках реакций. Так, например, изменение конкретного вида формул (79) и способа их унитаризации (введения полных ширин резонансов) слабо скажется на поведении полных сечений реакций (73)—(77) и в то же время резко изменит массовые распределения в этих реакциях. Поэтому успех в описании поведения и величины полных сечений процессов (73) — (77), по-видимому, связан с общими чертами дуального подхода (в основном с явным учетом кроссинг-симметрии для многочастичных реакций); в то же время массовые спектры эксплуатируют конкретный вид подгоночной формулы. Кроме того, даже эти грубые формулы могут быть полезны для выделения резонансного вклада, поскольку дают модель для фона, довольно быстро меняющегося с изменением соответствующих энергий.

6. Так как идеи дуальности можно согласовать с экспериментальными данными по барион-барионному рассеянию лишь при наличии экзотических резонансов в $B\overline{D}$- и $D\overline{D}$-системах (B-октет, D-декаплет барионов), (гл. 4, раздел в)), поиски их представляют большой интерес.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I

В этом приложении остановимся на основных свойствах $\Gamma(z)$, которая играет столь важную роль в ОМВ.

1) $\Gamma(z)$ аналитична всюду в комплексной плоскости z, кроме целых отрицательных точек и точки $z=0$.

2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

3) $\Gamma(n+1)=n!$

4) Все полюсы гамма-функции первого порядка, причем вычет $\Gamma(z)$ в полюсе $z=-n$ равен $(-1)^n/n!$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

5) $\Gamma(z)$ не имеет нулей.

6) $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

7) Для $\operatorname{Re} z>0$ $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$.

8) При больших положительных x $\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\left[1+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$ (формула Стирлинга).

9) $\lim\left[\dfrac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}\,e^{-a\ln z}\right]=1$ при $|z|\to\infty$.

10) $B_4(a, b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

II

В этом приложении мы приведем общий рецепт написания дуальной амплитуды, которая имеет по всем каналам только полюсы и правильную реджевскую асимптотику. Правила эти заключаются в следующем: многочастичная амплитуда (рис. 48, *а*)

записывается в виде суммы $(N-1)!/2$ членов:

$$A_N = \beta_N \sum_{(P)} B_N(P), \qquad (\text{П.1})$$

причем каждое слагаемое в (П.1) соответствует определенной последовательности импульсов на диаграмме рис. 48, *б*. Для данной диаграммы вводятся переменные u_{ik} (см. рис. 48, *б*), соответствующие всем диагоналям, причем они не все независимые, а удовлетворяют так называемым дуальным уравнениям

$$u_{i,k} = 1 - \prod_{\substack{l<i,\\ m>k}} u_{lm}. \qquad (\text{П.2})$$

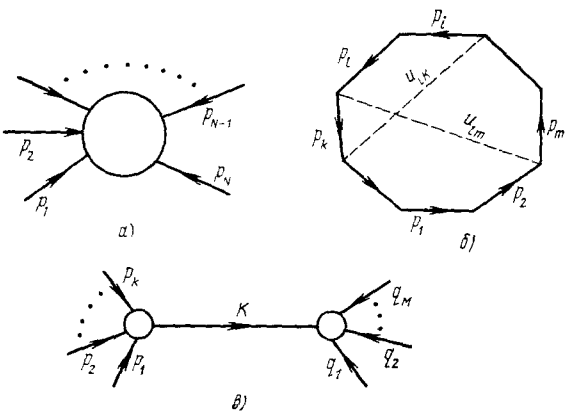


Рис. 48.

Геометрически u_{lm}, входящие в произведение, соответствуют диагоналям многоугольника на рис. 48, *б*, которые пересекают диагональ (ik). Смысл условия (П.2) в том, что при $u_{ik} = 0$ все $u_{l,m} \to 1$. Тогда

$$B_N = \int_0^1 \prod_{\substack{j,k\\ i\neq k}}{}' u_{ik}^{-\alpha_{ik}-1}\, du_{ik} \times$$
$$\times\, \delta(u_{ik} - \Pi u_{lm} - 1), \qquad (\text{П.3})$$

где $\alpha_{ik} = \alpha(s_{ik})$, а $s_{ik} = (p_a + \ldots + p_k)^2$.

Выражение (П.3) факторизуется для каждого полюса при $\alpha(s) \to n$ (рис. 48, *в*), $s = k^2$, т. е. может быть переписано в виде [113]

$$B_N = \frac{1}{\alpha(s) - n} \sum_{\nu} \sum_{p} V^{n,j}_{p\,\{\mu_l\}}\, P^{j\,\{\mu_l\}}_{\{\mu'_l\}}\, \bar{V}^{n,j}_{p\,\{\mu_{l'}\}}, \qquad (\text{П.4})$$

где j — спин резонанса, P^j — пропагатор резонанса со спином j, p характеризует дополнительное вырождение.

V^{nj}_p — вершина распада резонанса со спином j, массой s_0 ($\alpha(s_0) = n$) и числом p на K частиц (см. рис. 48, *в*), $\bar{V}^{nj}_p$ — то же для распада на M частиц.

Сумма (П.4) обладает следующими свойствами [113]:

1) при $n = 0$ V^{00}_0 совпадает с амплитудой для $K + 1$ частиц;

2) при $j = n$ (что соответствует главной траектории) нет дополнительного вырождения;

3) в сумме по дополнительному вырождению часть слагаемых входит с отрицательным (антиунитарным) знаком при $K = M$ (рис. 48, *в*). Такие нефизические состояния («духи») должны пропасть после унитаризации, но это означает, что унитарные поправки не могут быть малы, а следовательно, (П.3) нельзя рассматривать как хорошее борновское приближение.

Однако эти «духи» могут просто не давать вклад в сумму (П.4) при наличии некоторой дополнительной симметрии. В частности, сейчас положение с ними такое: на первой дочерней траектории духов нет из-за так называемой «твистинг-симметрии» [113, 114] (которая учитывает инвариантность выражения (П.3) относительно циклической перестановки индексов i, k), и, кроме того, в том случае, когда $\alpha(0) = 1$, появляется добавочная симметрия, которая полностью убирает их [115].

Число состояний растет с ростом массы пропорционально $\exp[c\sqrt{\alpha(s)}]$, где $c = 2\pi/\sqrt{6}$ [116].

Попытка с помощью формулы (П.3) построить графики следующего порядка (типа рис. 42) привела к появлению экспоненциальной расходимости в выражениях для рис. 42, *в* (см. [117]) и непонятной особенности в диаграммах рис. 42, *г* [118]. Если же расходимость убрать с помощью перенормировок затравочных траекторий [119], то непонятно, что делать с особенностью диаграммы рис. 42, *г*. В настоящее время развита довольно мощная техника, позволяющая строить графики любого порядка, исходя из (П.3), которая использует или операторный формализм [120] и свойства симметрии [121] выражения (П.3), или геометрическую интерпретацию, связанную с интегрированием по сложным поверхностям [122]. Однако фактические достижения ее невелики.

Помимо попыток унитаризовать формулу (П.3), предпринимались усилия включить в нее частицы с реальными квантовыми числами, лежащие на реальных траекто-

риях [123]. В частности, поскольку для реальных траекторий $\alpha(0) > 0$, то в (П.3) имеется частица с мнимой массой («тахион»). Несмотря на то, что в этом отношении имеется прогресс (особенно в исключении из амплитуд «тахиона» [123]), тем не менее до сих пор нет формулы, которая бы учитывала физические траектории.

Таким образом, итоги теоретического развития можно сформулировать так: мы имеем формулу, удовлетворяющую требованиям дуальности для скалярных частиц

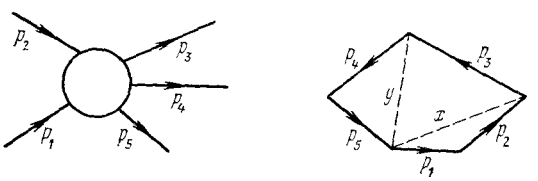


Рис. 49.

с $\alpha(0) = 1$, которая привела к трудностям при попытке унитаризации, и не имеем аналогичной формулы для рассеяния реальных физических частиц.

В заключение приведем явный вид функции B_5 через независимые переменные (рис. 49):

$$B_5 = \int_0^1 (1-x)^{-\alpha_{23}-1} x^{-\alpha_{12}-1} \int_0^1 dy\,(1-y)^{-\alpha_{34}-1} y^{-\alpha_{56}-1} (1-xy)^{-\alpha_{24}-\alpha_{23}+\alpha_{34}}.$$

Ленинградский институт ядерной физики
им. Б. П. Константинова АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Lipkin, Weizmann Inst. Preprint, 1969 (European Physical Society Meeting, Florence, April 1969); M. Jacob, TH-1010-CERN, Geneva, 1969 (Schlanding Winter School, March 1969); J. D. Jackson, Lund Intern. Conference on Elementary Particles (June 1969); Rev. Mod. Phys. **42**, 12 (1970); Chan Hong-Mo, Duality-Reggeons and Resonances in Elementary Particle Processes (Royal Society Meeting, June 1969), TH-1057-CERN, Geneva 1969; C. Schmid, Proc. Roy. Soc. **A318**, 379 (1970); TH-1128-CERN; Proc. Roy Soc. **A318**, 257 (1970); H. Harari, Weizmann Inst. Preprint, 1969 (Brookhaven Summer School, August 1969); C. Lovelace, TH-1123-CERN, Geneva, January 1970 (Irvine Conference on Regge Poles, December 1969); Proc. Roy. Soc. **A318**, 321 (1970); Е. М. Левин, V зимняя школа по теории ядра и физике высоких энергий (февраль 1970 г.), ч. I, ФТИ АН СССР, стр. 114; M. Kugler, Weizmann Inst. Preprint, 1970, (Schlanding Winter School, 1970); Л. Л. Енковский, В. В. Мухин, В. П. Шелест, Препринт ИТФ АН УССР ИТФ-70-43, Киев, 1970; M. Ida, Lectures on the Dual Resonance Model. Kyoto Univ. Preprint, 1970; B. E. Y. Svensson, Lectures given at the Heidelberg — Karlsruhe Summer Institute in Theoretical Physics (July 1970), TH-1214-CERN, Geneva, September 1970; H. Satz, ibid.; Ecole d'Eté de Physique des Particles Gif-sur-Yvetter (France, September 1970), Research Inst. for Theor. Phys., Helsinki, No. 3-71, February 1971; G. Veneziano, Rapporteur's Talk at the XV Intern. Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970; V. Alessandrini, D. Amati, M. Le Bellac, D. Olive, TH-1160-CERN, Geneva; Phys. Rept. **1C**, No. 6 (1971); G. H. Thomas, Research Inst. for Theor. Phys. Helsinki, No. 14—71, June 1971.
2. А. Б. Кайдалов, УФН **111** (1973).
3. M. Roos et al., Phys. Lett. **B33**, 1 (1970).
4. *а*) E. L. Berger, G. C. Fox, Nucl. Phys. **B26**, 1 (1971); *б*) G. E. Hite, Rev. Mod. Phys. **41**, 669 (1969); P. D. B. Collins, Phys. Rept. **1C**, No. 4 (1971); *в*) Д. В. Ширков, УФН **102**, 98 (1970); G. Gidal, Preprint LBL-352, September 1971.
5. *а*) M. Froissart, Phys. Rev. **123**, 1053 (1961); *б*) В. Н. Грибов, Лекции по теории комплексных моментов, ч. I — ХФТИ 70/47, ч. II — ХФТИ 70/48, Харьков, ФТИ АН УССР, 1970; П. Коллинз, Э. Сквайрз, Полюса Редже в физике частиц, М., «Мир», 1971.
6. D. Z. Freedman, J. M. Wang, Phys. Rev. Lett. **17**, 589 (1966); Phys. Rev. **153**, 1596 (1967).

7. H. Harari, Y. Zarmi, ibid. **187**, 2230 (1970).
8. H. J. Lipkin, ibid. **174**, 2151 (1968); J. L. Rosner, Phys. Rev. Lett. **21**, 950 (1968); G. B. Chiu, J. Finkelstein, Phys. Lett. **B27**, 576 (1968); R. H. Capps, Phys. Rev. Lett. **22**, 215 (1969).
9. J. Mandula, J. Weyers, G. Zweig, ibid. **23**, 627.
10. H. J. Lipkin, Nucl. Phys. **B9**, 349 (1969); J. Mandula et al., Phys. Rev. Lett. **22**, 1147 (1969).
11. P. J. Gilman, Phys. Lett. **B29**, 673 (1969); Kwan Wu Lai, J. Louie, Nucl. Phys. **B19**, 205 (1970).
12. H. Harari, см. [1].
13. J. Finkelstein, Phys. Rev. Lett. **22**, 362 (1969).
14. D. R. O. Morrison, Rapporteure's Talk given at the Lund Intern. Conference on Elementary Particles (June 1969), CERN-69-28, Geneva, 1969.
15. M. Bander, E. Gotsman, Phys. Rev. **D2**, 224 (1970).
16. L. Van Rossum, Talk at the Intern. Meeting on Two-Body Reactions (Dubna, JINR, June 1971).
17. H. Harari, SLAC-PUB-897, April 1971.
18. G. Giacomelli, Rapporteur's Talk given at the Amsterdam Intern. Conference on Elementary Particles (June 1971).
19. А. В. Кайдалов, Б. М. Карнаков, ЯФ **7**, 1147 (1968).
20. F. Hanyey, G. L. Kane, I. Pumplin, M. M. Ross, Phys. Rev. **182**, 1579, 1969.
21. Я. А. Смородинский, УФН **84**, 3 (1964); В. Б. Берестецкий, УФН **85**, 393 (1965).
22. G. B. Chiu, J. Finkelstein, Phys. Lett. **B27**, 510 (1968).
23. Дж. де Сварт, УФН **74**, 652 (1964).
24. Е. М. Левин, Л. Л. Франкфурт, УФН **94**, 243 (1968).
25. H. J. Lipkin, Nucl. Phys. **B9**, 349 (1969); J. Mandula et al., Phys. Rev. Lett. **22**, 1147 (1969).
26. V. Barger, G. Michael, Phys. Rev. **186**, 1592 (1969); R. E. Capps, Phys. Rev. Lett. **22**, 215 (1969); M. Rempault, Ph. Salin, Nucl. Phys. **B22**, 2355 (1970).
27. C. Lovelace, см. [1]; P. R. Auvil et al., Nucl. Phys. **B25**, 317 (1970).
28. В. Н. Грибов, ЯФ **3**, 1119 (1966).
29. R. H. Capps, Phys. Rev. **1D**, 254 (1970).
30. A. D. Martin, C. Michael, Phys. Lett. **B32**, 297 (1970); R. Odorico et al., ibid., p. 375; J. P. Boright et al., ibid. **B33**, 625.
31. J. Froyland et al., TH-1255-CERN, Geneva, 1970.
32. G. P. Canning, Phys. Rev. **D2**, 1146 (1970); P. R. Auvil, F. Halzen, Nucl. Phys. **B19**, 29 (1970).
33. J. L. Rosner, Phys. Rev. Lett. **21**, 950 (1968); H. J. Lipkin, Nucl. Phys. **B9**, 349 (1969); M. Kugler, Phys. Rev. **180**, 1538 (1969); Phys. Lett., **B32**, 107 (1970); H. J. Lipkin, ibid., p. 301.
34. H. Harari, Phys. Rev. Lett. **22**, 562 (1969).
35. J. L. Rosner, ibid., p. 689.
36. J. L. Rosner, C. Rebbi, R. Slansky, Phys. Rev. **188**, 2367 (1969).
37. G. Veneziano, Nuovo Cimento **A57**, 190 (1968).
38. А. Б. Кайдалов, Лекции на VI зимней школе по теории ядра и физике высоких энергий (март 1971), ФТИ АН СССР, 1971.
39. А. А. Ансельм, Материалы VI зимней школы по теории ядра и физике высоких энергий (март 1971), ч. I, ФТИ АН СССР, 1971, стр. 3.
40. G. Altarelly, H. R. Rubinstein, Phys. Rev. **178**, 2165 (1969); D. Sivers, J. Yellin, Ann. Phys. (N.Y.) **55**, 107 (1969).
41. C. Lovelace, Chan Hong-Mo, см. [1].
42. C. Lovelace, Phys. Lett. **B28**, 264 (1969).
43. R. Odorico, CERN-TH-1303, Geneva, March 1971.
44. Particle Data Group, UCRL-20030πN (1970).
45. A. Bettini et al., Nuovo Cimento **A1**, 333 (1971).
46. R. Odorico, Phys. Lett. **B33**, 189 (1970).
47. H. R. Rubinstein, ibid. **B32**, 370.
48. C. Lovelace, ibid. **B28**, 264 (1969); K. Kawarabayachi, ibid., p. 432; D. Y. Wong, Phys. Rev. **183**, 1416 (1969).
49. J. A. Shapiro, ibid. **179**, 1343.
50. R. Oehme, Lett. Nuovo Cimento **1**, 420 (1969); A. Neveu, J. Scherk, Nucl. Phys. **B23**, 630 (1970).
51. Г. А. Лексин, УФН **102**, 387 (1970).
52. W. D. Walker, Rev. Mod. Phys. **39**, 695 (1967); L. I. Gutay et al., Phys. Rev. Lett. **18**, 142 (1967); S. Marateck et. al., ibid. **21**, 1613 (1968).

53. S. Weinberg, ibid. **17**, 616 (1966).
54. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, УФН **100**, 225 (1970).
55. В. В. Анисович, Е. М. Левин, А. И. Лиходед, Ю. Г. Строганов, ЯФ **8**, 583 (1968). В. Дайнет и др., Препринт ОИЯИ Р1-5781, Дубна, 1971.
56. F. J. Gilman, H. Harari, Phys. Rev. **165**, 1803 (1968); S. Weinberg, ibid. **177**, 2609 (1969).
57. S. L. Adler, ibid. **137**, 1022; **139**, B1638 (1965).
58. M. Ademollo, G. Veneziano, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **22**, 83 (1969).
59. S. Weinberg, ibid. **18**, 507 (1967).
60. S. K. Igi, Phys. Lett. **B26**, 330 (1969).
61. S. Fenster, K. C. Wali, Phys. Rev. **D1**, 1409 (1970).
62. В. Н. Грибов, Л. Б. Окунь, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **45**, 1114 (1963).
63. E. L. Berger, G. C. Fox, Phys. Rev. **188**, 2120 (1969); J. Maharana, R. Ramachandra, ibid. **D2**, 2713 (1970).
64. A. W. Hendry et al., Nucl. Phys. **15**, 389 (1970).
65. C. Altarelli, H. Rubinstein, Phys. Rev. **183**, 1469 (1969).
66. G. P. Gopal et al., ICTP (69), 24 September 1970.
67. S. Pokorski et al., Preprint Helsinki No. 8—71, June 1971.
68. H. R. Rubinstein et al., Phys. Lett. **B30**, 189 (1969).
69. H. R. Rubinstein, M. Chaichian, E. J. Squires, Nucl. Phys. **B20**, 283 (1970).
70. R. Jengo, E. Remiddi, CERN-TN-989, Geneva, January 1969.
71. Chan Hong-Mo et al., Nucl. Phys. **B19**, 173 (1970).
72. В. Н. Грибов, ЯФ **5**, 197 (1967); D. R. O. Morrison, Phys. Rev. **165**, 1699 (1968).
73. B. Peterson, N. A. Tornquist, Nucl. Phys. **B13**, 629 (1969).
74. L. L. Jenkovszky et al., Preprint ITP-70-71, Kiev, 1970.
75. Aachen—Berlin—CERN—London—Wien Coll., Nucl. Phys. **B20**, 63 (1970).
76. Aachen—Berlin—CERN—London—Wien Coll., ibid. **B23**, 1.
77. K. Kajantie, S. Papageorquau, ibid. **B22**, 31.
78. J. A. Jerome, W. A. Simmons, ibid. **B24**, 623.
79. A. Shreiner et al., ibid., p. 157.
80. P. Hoyer et al., ibid. **B22**, 497.
81. K. Paler et al., ibid. **B21**, 407.
82. R. O. Ratio, ibid., p. 427.
83. P. A. Collins et al., Phys. Rev. **D1**, 3134 (1970).
84. S. Pokorski, H. Satz, Nucl. Phys. **B19**, 113 (1970).
85. H. Satz, K. Schilling, Nuovo Cimento **A67**, 511 (1970).
86. K. Schilling, DESY Intern. Rept. R1 (70), February 1970.
87. H. Satz, K. Schilling, Lett. Nuovo Cimento **3**, 723 (1970).
88. J. Bartsch et al., Nucl. Phys. **B24**, 221 (1970).
89. В. Н. Грибов, ЖЭТФ **53**, 654 (1967).
90. H. Harari, Phys. Rev. Lett. **20**, 1395 (1968); P. G. O. Freund, ibid. **20**, 235 (1969).
91. D. Amati, A. Stahghelini, S. Fubini, Nuovo Cimento **26**, 896 (1962); D. Amati, M. Chini, A. Stanghelini, ibid. **30**, 193 (1963); В. Н. Грибов, ЯФ **9**, 640 (1969).
92. H. Harari, Y. Zarmi, Phys. Lett. **B32**, 291 (1970).
93. F. Halzen, G. Michael, TH-1355-CERN, Geneva, 1971.
94. E. Del Guidice, G. Veneziano, Lett. Nuovo Cimento **3**, 363 (1970).
95. K. Kikkawa, B. Sakita, M. A. Virasoro, Phys. Rev. **184**, 1701 (1969); K. Bardakći, M. B. Halpern, ibid. **185**, 1910.
96. J. E. Paton, Chan Hong-Mo, Nucl. Phys. **B10**, 516 (1969); D. E. Neville, Phys. Rev. Lett. **22**, 494 (1969).
97. V. Alessandrini et al., см. [1].
98. A. H. Mueller, Phys. Rev. **D2**. 2963 (1970); О. В. Канчели, Письма ЖЭТФ **11**, 397 (1969); В. А. Абрамовский, О. В. Канчели, О. И. Манджавадзе, ЯФ **13**, 1102 (1971).
99. D. Amati, M. Cini, A. Stanghelini, Nuovo Cimento **30**, 193 (1963); R. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969).
100. К. А. Тер-Мартиросян, сборник [39], ч. II, стр. 334.
101. L. G. Ratner et al., Phys. Rev. Lett. **27**, 68 (1971).
102. Chan Hong-Mo et al., ibid. **26**, 672.
103. R. C. Brower, R. E. Waltz, TH-1335-CERN, Geneva (June 1971).
104. J. Ellis et al., TH-1316, March 1971; Chan Hong-Mo, P. Hoeyer, TH-1339-CERN, Geneva, June 1971.
105. M. Jacob, TH-1328-CERN, Geneva, May 1971.

106. M. S. Chen et al., Phys. Rev. Lett. **26**, 280, 1585 (1971).
107. В. Н. Грибов, А. А. Мигдал, ЯФ 8, 1002, 1213 (1968).
108. C. E. De Tar et al., Phys. Rev. Lett. **26**, 675 (1971); MIT Preprint, January 1971.
109. G. Cohen-Tannoudji et al., Phys. Rev. Lett. **26**, 112 (1971); P. Olesen, TH-1322-CERN, Geneva, 1971; A. I. Bugrij, L. I. Jenkovsky, N. A. Kobylinsky, ITP-71-28E, Kiev, 1971.
110. E. L. Berger, Phenomenological Applications of Dual Models, Caltech Conference, March 1971.
111. B. Schrempp, Otto F. Schrempp, Invited Talk presented at the Titisee Discussion Meeting on «Two-body Reactions at High Energies», May—June 1971; DESY 71/46, August 1971.
112. E. L. Berger, ANL/HEP 7134, July 1971.
113. S. Fubini, G. Veneziano, Nuovo Cimento **A64**, 811 (1969).
114. D. Amati, M. Le Bellac, P. Olive, ibid., p. 815, 831.
115. M. A. Virasoro, Phys. Rev. **D1**, 2933 (1969); E. Del Giudice, P. Di Vecchia, Nuovo Cimento **A70**, 579 (1970); R. C. Brower, C. B. Thorn, Nucl. Phys. **B31**, 163 (1971).
116. S. Fubini, D. Gordon, G. Veneziano, Phys. Lett. **B29**, 679 (1969); V. Alessandrini et al., см. [1].
117. C. Bouchiat, J. L. Gervais, N. Sourlas, Lett. Nuovo Cimento **2**, 399 (1969).
118. D. J. Gross, A. Neveu, J. Scherk, Phys. Rev. **D2**, 657 (1970).
119. A. Neveu, J. Scherk, ibid. **D1**, 2355.
120. S. Fubini, G. Veneziano, Ann. Phys. (N.Y.) **63**, 12 (1971); P. Ramond, Boulder Summer School 1971, NAL THY 15, July 1971.
121. Z. Koba, H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B10**, 633 (1969). Zs. Phys. **299**, 243 (1969).
122. D. Olive, W. J. Zakrzewski, Nucl. Phys. **B21**, 303 (1970); J. D. Dorren, V. Rittenberg, H. R. Rubinstein, Nuovo Cimento **A3**, 300 (1971); A. Neveu, J. H. Schwarz, C. B. Thorn, Phys. Lett. **B35**, 441 (1971).
123. L. Clavelly, P. Ramon, Phys. Rev. **D2**, 973 (1970); **D3**, 988 (1971); K. Bardacsi, M. B. Halpern, ibid. **D3**, 493; M. B. Halpern, C. B. Thorn, Phys. Lett. **B35**, 441 (1971); A. Aharonov, A. Casher, L. Susskind, Phys. Lett. **B35**, 512 (1971).