

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Сжимаемые вихревые структуры и их роль в зарождении гидродинамической турбулентности

Д.С. Агафонцев, Е.А. Кузнецов, А.А. Майлыбаев, Е.В. Серещенко

Представлены результаты исследований зарождения квазидвумерных (в виде тонких блинов) вихревых структур в трёхмерных течениях и сужающихся квазиодномерных структур в двумерной гидродинамике при больших числах Рейнольдса, когда в главном порядке развитие этих структур может быть соответственно описано трёхмерными и двумерными уравнениями Эйлера идеальной несжимаемой гидродинамики. Численно и аналитически показано, что сжатие этих структур и соответственно увеличение их амплитуд обусловлено сжимаемостью в замороженных полях: поля непрерывно распределённых вихревых линий в случае трёхмерной гидродинамики и поля линий ротора завихренности (di-vorticity) для двумерных течений. Выяснено, что возрастание завихренности и ротора завихренности можно рассматривать как процесс опрокидывания соответствующих векторных полей; при больших интенсивностях этот процесс имеет скейлинговый характер колмогоровского типа, связывающий максимальную амплитуду и соответствующие толщины/ширины структур. Проанализирована возможная связь этих когерентных структур в формировании колмогоровского спектра турбулентности и спектра Крейчнана, соответствующего постоянному потоку энтропии в случае двумерной турбулентности.

Ключевые слова: вихревые линии, завихренность, опрокидывание, турбулентность, замороженные поля

PACS numbers: 47.10. – g, 47.27. – i, 47.32. – y

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.11.038875>

Содержание

1. Введение (205).
2. Инварианты Коши и представление вихревых линий (209).
3. Сжимаемость представления вихревых линий и автомодельный закон 2/3 (211).
 - 3.1. Сингулярные собственные значения. 3.2. Скейлинг 2/3.
4. Статистика зарождающейся трёхмерной турбулентности (214).

- 4.1. Численная схема для статистических характеристик трёхмерной турбулентности. 4.2. Результаты численных экспериментов.
5. Двумерная турбулентность: от опрокидывания к спектру Крейчнана (219).
 - 5.1. Основные уравнения и численная схема. 5.2. Формирование складок. 5.3. Статистические особенности двумерной турбулентности.
6. Заключение (223).
- Список литературы (224).

Д.С. Агафонцев^(1,2,a), Е.А. Кузнецов^(2,3,4,b), А.А. Майлыбаев^(5,c), Е.В. Серещенко^(2,6,d)

⁽¹⁾ Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 117997 Москва, Российская Федерация

⁽²⁾ Сколковский институт науки и технологий, Территория инновационного центра Сколково, Большой бульвар 30, стр. 1, 121205 Сколково, Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

⁽⁴⁾ Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация

⁽⁵⁾ Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, CEP 22460-320, Brasil

⁽⁶⁾ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская 4/1, 630090 Новосибирск, Российская Федерация

E-mail: ^(a) dmitrij@itp.ac.ru, ^(b) kuznetso@itp.ac.ru, ^(c) alexei@impa.br, ^(d) s_evgeniy@yahoo.com

Статья поступила 31 августа 2020 г.

1. Введение

Несмотря на то что со времени классических работ Л.Ф. Ричардсона [1], А.Н. Колмогорова [2] и А.М. Обухова [3] по гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, $Re \gg 1$, прошло уже около 80 лет и достигнуто значительное понимание её природы, проблема развитой гидродинамической турбулентности всё ещё остаётся до конца не решённой. Главная причина состоит в том, что развитая гидродинамическая турбулентность ни в каком варианте не может быть изучена с помощью теории возмущений, в отличие, например, от волновой турбулентности [4].

В волновой турбулентности есть два основополагающих фактора, определяющих динамику волновой системы: линейная дисперсия волн и нелинейность. Если дисперсионные эффекты преобладают над нелинейными, то в этом случае каждая волна с частотой Ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ свободно движется в течение длительного

времени и только на больших расстояниях $L \gg k^{-1}$ начинает испытывать влияние других волн за счёт нелинейности. Это является основанием для применения к такому ансамблю волн статистического описания на основе теории возмущений. В результате мы приходим к теории слабой (волновой) турбулентности, описывающей поведение ансамбля волн на языке кинетических уравнений для волнового действия, представляющего собой классический предел чисел заполнения. На этом пути удаётся продвинуться достаточно далеко, в частности найти спектры турбулентности как точные решения кинетических уравнений, получившие названия спектров Колмогорова – Захарова (см., например, [4]).

Эти решения характеризуются постоянным потоком энергии, числа частиц и т.д. Существование, что данные решения не могут быть рассмотрены как термодинамически равновесные — они, как и спектр Колмогорова – Обухова для развитой гидродинамической турбулентности, реализуются в инерционном интервале — промежуточной области между накачкой и затуханием — и характеризуются конечным значением потока того или иного интеграла движения. С возрастанием амплитуды (т.е. с усилением нелинейности) главную роль начинают играть когерентные структуры в виде солитонов, бризеров, вихрей, для которых нелинейность компенсируется дисперсионными эффектами. Такие объекты иногда оказываются устойчивыми, чаще для интегрируемых моделей типа уравнения Кортевега – де Вриза или нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ). При этом турбулентность в интегрируемых моделях, получившая название интегрируемой [5], обладает рядом особенностей (см., например, [6, 7], а также недавние работы [8 – 12]). В случае неустойчивости когерентных структур типичным сценарием их нелинейного развития является коллапс — образование особенности за конечное время (см. обзор [13] и цитированную там литературу). Классические примеры коллапса — самофокусировка света в средах с керровской нелинейностью и опрокидывание волн звукового типа.

Если говорить о гидродинамике Эйлера, то она с хорошей точностью описывает турбулентность при больших числах Рейнольдса, $Re \gg 1$, в инерционном интервале масштабов — промежуточной области между длинноволновой накачкой и вязким затуханием. Важно, что гидродинамика Эйлера ни в каком пределе не может быть изучена пертурбативно. Её гамильтониан, совпадающий с полной кинетической энергией жидкости, представляет собой гамильтониан взаимодействия (см., например, [14]). Таким образом, гидродинамика Эйлера описывает системы с предельно сильным нелинейным взаимодействием. Поэтому следует ожидать, что для развитой гидродинамической турбулентности когерентные структуры должны играть более существенную, а возможно определяющую, роль, чем для волновой турбулентности. Надо отметить, что проблема взаимодействия когерентных структур и хаотических компонент есть одна из центральных, до сих пор до конца не решённых проблем современной теории турбулентности.

Известно, что теория Колмогорова – Обухова [2, 3] описывает развитую гидродинамическую турбулентность в инерционном интервале масштабов. Размер этой области — отношение энергосодержащего масштаба L к вязкому ℓ_{vis} — возрастает пропорционально $Re^{3/4}$ (см., например, [15]). В основе теории Колмогорова – Обухова лежат два важных предположения:

- турбулентность в инерционном интервале однородна и изотропна;
- нелинейное взаимодействие между флуктуациями является локальным.

Последнее означает, что в инерционном интервале взаимодействие между масштабами одного порядка превосходит взаимодействие между флуктуациями с сильно различающимися масштабами. В случае стационарной турбулентности поведение системы определяется потоком (постоянным) энергии ε из области накачки в область затухания (по сути, основано на свойстве локальности). Поведение спектра турбулентности — так называемого колмогоровского спектра — универсально — оно определяется единственной величиной ε . По этой причине с точностью до константы C_K (константы Колмогорова) спектр $E(k)$ может быть получен исходя из соображений размерности. По размерности спектр $E(k)$ представляет собой плотность энергии в фазовом пространстве, умноженную на $4\pi k^2$:

$$E(k) = 4\pi k^2 \frac{\rho c^2}{k^3} F\left(\frac{\varepsilon}{\rho c^2 k c}\right),$$

где ρ — плотность (в дальнейшем полагаемая равной единице), c — скорость света (введена из соображений удобства), F — функция от безразмерного параметра $\varepsilon/(\rho c^2 k c)$. Очевидно, что спектр $E(k)$ не должен зависеть от скорости света, отсюда $F(\xi) = C\xi^{2/3}$. В результате мы приходим к колмогоровскому спектру

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad C_K = 4\pi C.$$

Данный вывод, принадлежащий Р.З. Сагдееву, основывается только на соображениях размерности. Из этих же соображений следует, что время перекачки энергии из энергосодержащих масштабов L в область диссипации конечно и оно определяется только L и ε : $T \sim L^{2/3} \varepsilon^{-1/3}$. Флуктуации скорости и завихренности $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ масштаба ℓ даются соответственно следующими соотношениями:

$$\langle \delta v \rangle \sim \varepsilon^{1/3} \ell^{1/3}, \quad \langle \delta \omega \rangle \sim \varepsilon^{1/3} \ell^{-2/3}.$$

Таким образом, для флуктуаций ω мы имеем особенность при $\ell \rightarrow 0$. Вместе с конечным временем перекачки энергии на малые масштабы T это указывает на возможность формирования коллапса, который в инерционном интервале масштабов может быть изучен в рамках гидродинамики Эйлера. Именно эти соображения являлись главными, когда мы начинали наши исследования, в которых особенно полезным оказался прямой численный эксперимент, значительно изменивший наше представление о механизмах перехода к развитой гидродинамической турбулентности.

Как впервые было отмечено В.И. Арнольдом [16], гидродинамику Эйлера следует рассматривать как геометрическую теорию. Уравнения Эйлера для идеальных жидкостей имеют ряд общих черт с уравнениями Эйлера для свободного вращения твёрдого тела. Если движение твёрдого тела в трёхмерном пространстве задаётся группой $SO(3)$, то динамика течения идеальной (несжимаемой) жидкости определяется бесконечномерной группой — группой диффеоморфизмов, сохраняющих объём (или площадь в двумерном случае). В обоих случаях уравнения движения могут быть записаны в гамильтоновом виде посредством скобок Пуассона. Скобки Пуас-

сона для обеих систем определяют соответствующие алгебры Ли: в случае твёрдого тела это $so(3)$, а для жидкостей имеем алгебру бездивергентных векторных полей (см., например, [14]). Однако в обоих случаях скобки Пуассона оказываются вырожденными. Вырождение для случая твёрдого тела хорошо известно — оно связано с сохранением квадрата момента импульса (представляющего собой казимир). Для жидкостей факт вырождения скобки (неканонической) Пуассона впервые был установлен Кузнецовым и Михайловым [17]: простейшим казимиром, найденным в [17], оказалась спиральность $\int \mathbf{v} \omega d\mathbf{r}$. Этот инвариант имеет топологическое значение [18, 19]: с точностью до постоянного множителя спиральность совпадает с инвариантом Хопфа — числом зацеплений двух любых вихревых линий.

Хотелось бы подчеркнуть ещё раз, что уравнения Эйлера гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, будучи гамильтоновыми [14, 16, 17, 20], являются чисто нелинейными — в них отсутствует какая-либо линейная часть, т.е. сами уравнения Эйлера относятся к системам с предельно сильным нелинейным взаимодействием. Поэтому следует ожидать, что для гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, в инерционном интервале масштабов хорошо описываемой гидродинамикой Эйлера, когерентные структуры играют существенную, а возможно, и определяющую роль. При этом одним из вариантов эволюции когерентных структур представляется коллапс — возникновение особенности за конечное время.

Необходимо также отметить, что уравнения Эйлера при любой размерности обладают бесконечно большим числом интегралов движения. Это так называемые инварианты Коши, которые представляют собой лагранжевы векторные бездивергентные инварианты, переносимые вместе с жидкостью. Существование этих инвариантов представляет собой локальную формулировку теоремы Кельвина о сохранении циркуляции, доказанную Кельвином только в 1869 г. Однако Коши нашёл инварианты в 1815 г. как результат частичного интегрирования уравнений Эйлера, записанных в лагранжевой форме. Теорема, получившая имя Кельвина, в действительности впервые была доказана Ханкелем в 1861 г. на основе работ Коши. Этот вопрос был полностью разъяснён лишь в конце XX — начале XXI вв. (см. работы [14, 21, 22], а также научно-историческое эссе [23], в котором отражена история данного вопроса).

Наличие инвариантов Коши существенно осложняет изучение развитой гидродинамической турбулентности. Эти инварианты относительно так называемой неканонической скобки Пуассона, введённой в работе [17], представляют собой, как показано в [24] (см. также [25]), казимир. То есть инварианты Коши как связи, задаваемые в каждой точке, существенным образом ограничивают вихревые течения жидкости.

В настоящей статье обсуждается роль когерентных структур в зарождении развитой гидродинамической турбулентности, когда в главном порядке развитие этих структур может быть описано уравнениями Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что для трёхмерных течений происходит формирование вихревых структур повышенной завихренности в виде утончающихся блинов, а для двумерных течений — сужающихся квазиодномерных (нитевидных) структур в виде квазишпоков завихренности. Ключевую роль в наших

исследованиях играет впервые введённое в 1998 г. в работе Кузнецова и Рубана [24] так называемое представление вихревых линий (ПВЛ), которое выражается посредством частичного интегрирования уравнений Эйлера относительно сохранения инвариантов Коши. С помощью ПВЛ мы показываем, что появление когерентных структур блинного и нитевидного типов обусловлено сжимаемостью так называемых замороженных полей: поля непрерывно распределённых вихревых линий для трёхмерной гидродинамики и поля линий ротора завихренности (англ. — di-vorticity) в двумерной геометрии. Благодаря сжимаемости появляются большие градиенты соответствующих бездивергентных полей, что в свою очередь оказывает существенное влияние на формирование спектров турбулентности.

Напомним, что в сжимаемой гидродинамике — газодинамике — появление особенности за конечное время (коллапс) обусловлено опрокидыванием — явлением, открытым в газодинамике знаменитым Риманом (см. [15]). В этом случае одна "жидкая" частица догоняет другую частицу, в результате происходит формирование бесконечных градиентов для характеристик газа — плотности и скорости — так называемая градиентная катастрофа (см., например, [26]). Главная причина опрокидывания связана со сжимаемостью газа. С математической точки зрения этот процесс представляет собой формирование складки, которое может быть описано на языке отображений, в данном случае отвечающих переходу от эйлерова описания к лагранжеву. Особенность возникает в точке обращения в нуль якобиана данного отображения. В несжимаемой гидродинамике — гидродинамике Эйлера, казалось бы, нет причины для опрокидывания, поскольку якобиан преобразования от эйлерова описания к лагранжеву вследствие несжимаемости тождественно равен единице. Тем не менее в несжимаемой гидродинамике есть сжимаемые объекты — это непрерывно распределённые вихревые линии, что следует из простого наблюдения.

Рассмотрим уравнения движения завихренности $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ идеальной жидкости, так называемые уравнения Гельмгольца, которые получаются из уравнений Эйлера применением к ним оператора ротора:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \omega], \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Как видно из этого уравнения, в силу векторного произведения только компонента скорости, нормальная к вихревой линии, $\mathbf{v}_n$ может изменить ω . При этом в общем случае $\text{div } \mathbf{v}_n \neq 0$, что является причиной сжимаемости непрерывно распределённых вихревых линий [21, 24]. Таким образом, несмотря на несжимаемость жидкости, в гидродинамике Эйлера есть сжимаемый объект — непрерывно распределённые вихревые линии. Компонента скорости, параллельная завихренности, $\mathbf{v}_t$ в силу (1) не меняет завихренности, обеспечивая несжимаемость для полной скорости, $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Отметим, что уравнение (1) часто называют уравнением замороженности. На самом деле замороженность — это свойство уравнения (1), которое состоит в том, что всякая жидкая частица приклеена к своей вихревой линии, двигаясь вместе с ней. У частицы, таким образом, имеется только одна "свобода" — движение вдоль вихревой линии, которое не меняет завихренности, что очевидно из уравнения (1). Поэтому $\mathbf{v}_n$ — скорость самой

вихревой линии. Это утверждение имеет простое геометрическое объяснение. Очевидно, что любые деформации вдоль произвольной линии не изменяют самой линии — только поперечные деформации приводят к её перемещению. Поэтому движение вихревой линии определяется скоростью $\mathbf{v}_n$; положение вихревой линии находится из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для "новых" лагранжевых траекторий:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t) \text{ при } \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}. \quad (2)$$

Решение уравнений (2) задаёт сжимаемое отображение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$. Последнее непосредственно следует из формулы Лиувилля, применённой к этому уравнению,

$$\frac{dJ}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}_n J, \quad (3)$$

где $J = \det \partial x_i / \partial a_j$ — якобиан отображения. В силу того что $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$, на величину J не накладывается никаких дополнительных ограничений. Якобиан может принимать произвольные, в том числе нулевые, значения. Важно, что уравнение (1) в терминах этого отображения допускает интегрирование:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a}) \nabla_a) \mathbf{r}}{J}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ — начальное значение завихренности, которое имеет смысл инварианта Коши (см., например, [14, 27]). Уравнения (2)–(4) вместе с условием несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ образуют замкнутую систему представления вихревых линий (ПВЛ), впервые введённого Кузнецовым и Рубаном [24] (см. также [21, 28]).

Позднее стало ясно, что существование сжимаемых распределений для бездивергентных полей присуще всем замороженным полям. Причём это утверждение справедливо для произвольного замороженного в жидкость поля $\mathbf{V}$, уравнение движения которого записывается в том же виде, что и (1):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{V}], \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

В магнитной гидродинамике (МГД) $\mathbf{V}$ представляет собой магнитное поле (при бесконечно больших магнитных числах Рейнольдса). Менее известно, что для двумерных течений идеальной жидкости ротор завихренности (di-vorticity), $B_x = \partial_y \omega$, $B_y = -\partial_x \omega$, также подчиняется уравнению (5) [29] (см. также [30, 31]).

Поскольку завихренность в (4) содержит J в знаменателе, который может принимать произвольные значения, вероятный сценарий коллапса может возникнуть за счёт обращения якобиана J в нуль, что в ситуации общего положения должно вначале произойти в одной отдельной точке. Такой сценарий оказался возможным для трёхмерной интегрируемой гидродинамики [24, 25]. Трёхмерная интегрируемая гидродинамика может быть получена из идеальной гидродинамики Эйлера в приближении локальной индукции. Уравнения трёхмерной интегрируемой гидродинамики допускают применение к ним ПВЛ. В результате оказывается, что каждая вихревая нить представляет собой автономный объект, не взаимодействующий со всеми другими, но со своей нелинейной динамикой, которая описывается с помощью интегрируемого уравнения Ландау–Лифшица, калибровочно-

эквивалентного одномерному НУШ [32, 33]. Являясь свободной, каждая вихревая линия может догонять другую линию, т.е. происходит опрокидывание вихревых линий. Как результат, в некоторой точке за конечное время происходит обращение якобиана ПВЛ в нуль, что приводит к появлению особенности для завихренности. Опрокидывание вихревых линий в трёхмерной интегрируемой гидродинамике происходит благодаря сжимаемости вихревых линий, несмотря на несжимаемость самого потока [25].

Отметим, что до сих пор вопрос относительно коллапса для гидродинамики Эйлера остаётся дискуссионным, несмотря на большое количество численных и точных аналитических результатов (см. обзоры [34, 35] и цитируемую там литературу). От решения проблемы: есть коллапс или его нет — зависит наше понимание природы развитой гидродинамической турбулентности.

Основной вывод, который можно сделать исходя из сказанного, состоит в том, что в гидродинамике Эйлера несжимаемой жидкости существуют сжимаемые объекты — это поле завихренности для трёхмерных течений и поле ротора завихренности — (di-vorticity) — в двумерной геометрии. Интуитивно ясно, что сжимаемость непрерывно распределённых вихревых линий должна обеспечивать появление структур типа ударных волн, которые в газовой динамике вначале возникают вследствие опрокидывания в одной отдельной точке, а затем область опрокидывания расширяется, приводя к формированию каустики. Именно такие структуры — структуры блинного типа — наблюдаются в наших численных экспериментах [36–38]. Впервые структуры такого типа были обнаружены в численных экспериментах М. Браше с соавторами (М. Brachet et al.) [39] (1992 г.). Впоследствии в работах [36–38] было показано, что формирование блинообразных структур аналогично процессу опрокидывания в газовой динамике, т.е. градиентной катастрофе. Появление особенности происходит не за конечное, а за бесконечное время — с экспоненциальным во времени ростом.

Принципиальное значение для понимания физической природы опрокидывания вихревых линий имеет введённое Кузнецовым и Рубаном [24] представление вихревых линий, учитывающее как наличие бесконечного числа инвариантов Коши, так и сжимаемость непрерывно распределённых вихревых линий. В настоящей статье основное внимание уделено результатам численного интегрирования уравнений Эйлера, демонстрирующим сжимаемость как трёхмерных структур блинного типа [36], так и сужающихся квазишоков завихренности для двумерных течений, и их роли в формировании спектров развитой ($Re \gg 1$) турбулентности колмогоровского типа [40]. Мы уверены, что возникновение сжимающихся структур такого типа является свойством всех замороженных в жидкость векторных полей, в частности присущим идеальной магнитной гидродинамике. В работах [36, 37] по изучению структур повышенной завихренности блинного типа в трёхмерной геометрии численно установлено, что их эволюция имеет скейлинговый характер и с высокой точностью описывается с помощью найденных точных решений трёхмерных уравнений Эйлера [38]. Скейлинг между максимальной завихренностью блина и его толщиной ℓ ,

$$\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}, \quad (6)$$

впервые был найден на основе прямого численного интегрирования трёхмерных уравнений Эйлера в [36], а затем проверен для более чем 30 начальных условий [37]. Это дало основание утверждать об универсальности данного скейлинга как соотношения колмогоровского типа. В численных экспериментах было выяснено, что возрастание завихренности и сужение структур блинного типа зависят от времени экспоненциально, без какой-либо тенденции к взрывному поведению. Мы приведём как аналитические, так и численные аргументы в пользу существования данного скейлинга. В основе нашего рассмотрения лежит представление вихревых линий [24] и его аналоги [40, 41]. Для описания трёхмерных течений идеальной несжимаемой жидкости мы будем следовать формулировке ПВЛ, данной в [21, 42]. Мы обсудим гамильтонову структуру представления вихревых линий, которая опирается на существование бесконечного числа локальных лагранжевых инвариантов Коши и сжимаемости отображения ПВЛ. Важно, что введение инвариантов Коши в ПВЛ позволяет решить задачу об определении всех казимиров для неканонической скобки Пуассона [17].

Соотношение (4), являющееся центральным в ПВЛ, показывает, что увеличение завихренности возможно за счёт уменьшения якобиана J , т.е. связано со сжимаемостью поля завихренности. Такая ситуация, как известно, впервые была осознана для сжимаемой гидродинамики ещё Риманом при построении точного решения в виде так называемой простой волны Римана, демонстрирующей явление опрокидывания, когда одна лагранжева частица догоняет другую. В этом случае в профиле решения за конечное время возникают бесконечные производные (происходит так называемая градиентная катастрофа [26]). Чтобы описать это явление в трёхмерном случае, надо перейти в уравнениях газовой динамики от эйлерова описания к лагранжеву. Опрокидывание впервые возникает в точке обращения соответствующего якобиана в нуль. Очевидно, что при приближении к точке опрокидывания необходимо учитывать диссипацию вследствие вязкости, теплопроводности и т.д. Однако вдали от этой области процесс опрокидывания будет продолжаться, что и приводит к формированию каустик — квазидвумерных структур блинного типа (см., например, [43, 44]).

В настоящей статье будут рассмотрены, по сути, два вопроса: во-первых, мы покажем, используя геометрические особенности отображения ПВЛ для трёхмерных уравнений Эйлера, что скейлинг (6) можно рассматривать как результат опрокидывания вихревых линий. Подчеркнём, что в данном случае речь идёт об опрокидывании векторного бездивергентного поля — завихренности, в то время как в сжимаемой газодинамике под опрокидыванием подразумевается возникновение градиентной катастрофы для скалярной величины — плотности. В разделах 2–4 мы обсудим также, как появление структур блинного типа влияет на турбулентные характеристики при зарождении турбулентности, в частности на её спектр. Будет показано, что, несмотря на сильную анизотропию турбулентности, её спектр в инерционном интервале близок к колмогоровскому. Анизотропия существенно влияет на старшие структурные функции скорости. При этом, однако, структурные функции третьего порядка имеют ту же степенную зависимость от $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ [40], что и в изотропной турбулентности [2] (см. также [15]).

Второй вопрос, который мы рассмотрим, относится к формированию спектра Крейчана для двумерной гидродинамической турбулентности — спектра для прямого каскада с постоянным потоком энтропии в коротковолновую область — и роли опрокидывания векторного поля di-vorticity в этом процессе.

Прежде чем перейти к изложению основных положений обзора, надо сказать несколько слов относительно численного моделирования в случае трёхмерной геометрии как при прямом интегрировании уравнений Эйлера, так и в представлении вихревых линий. Численная схема и все необходимые детали численных экспериментов представлены в работах [36–38].

Главным моментом в численном моделировании уравнений ПВЛ являлось нахождение не прямого отображения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, а обратного отображения $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, что позволило представить уравнения ПВЛ в эйлеровых переменных $\mathbf{r}$ и t . Особенно эффективным это оказалось при обращении оператора ротора. Подчеркнём, что мы всюду использовали периодические граничные условия по всем трём координатам.

Для двумерных расчётов мы использовали примерно те же самые численные алгоритмы и периодические граничные условия для квадратной области. Результаты численного моделирования приведены в работах [31, 45–47].

Отметим также, что в настоящей статье обсуждаются в основном результаты, полученные авторами за последние годы; обзор написан на основе прочитанных Е.А. Кузнецовым лекций на Нижегородских научных школах "Нелинейные волны" в 2016 и 2018 гг. [48, 49].

2. Инварианты Коши и представление вихревых линий

Как известно (см., например, обзоры [14, 20]), уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

как для двумерных, так и для трёхмерных течений обладают бесконечно большим числом интегралов движения — лагранжевых инвариантов Коши. Наиболее просто выражение для инварианта Коши можно получить исходя из теоремы Кельвина о сохранении циркуляции скорости,

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}, \quad (8)$$

где контур интегрирования $C[\mathbf{r}(t)]$ движется вместе с жидкостью. Если в выражении (8) перейти от эйлеровых координат $\mathbf{r}$ к лагранжевым $\mathbf{a}$, то оно примет вид

$$\Gamma = \oint \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k,$$

где контур $C[\mathbf{a}]$ уже будет неподвижным.

Ввиду произвольности контура $C[\mathbf{a}]$ и благодаря формуле Стокса отсюда немедленно следует, что величина

$$\mathbf{I} = \text{rot}_a \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (9)$$

сохраняется в каждой точке $\mathbf{a}$. Это и есть лагранжев инвариант Коши.

Сохранение лагранжевых инвариантов, как впервые было показано Салмоном [50], обусловлено специальной симметрией — бесконечной симметрией относительно переобозначения лагранжевых маркеров (relabeling symmetry), оставляющей инвариантным действие. Если лагранжевы координаты $\mathbf{a}$ в (9) совпадают с начальными положениями жидких частиц, то инвариант $\mathbf{I}$ совпадает с начальной завихренностью $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$. Сохранение лагранжевых инвариантов является следствием вмерзновенности вихревых линий в жидкость. Согласно этому свойству, жидкие (лагранжевы) частицы не могут покинуть собственную вихревую линию, на которой они находились в начальный момент. Для лагранжевых частиц остаётся только одна незамороженная степень свободы — движение вдоль вихревой линии, которое в силу (1) не изменяет значения ω . С этой точки зрения вихревая линия является инвариантным объектом, следовательно, естественно перейти к такому описанию, в котором данная инвариантность видна с самого начала. Такое описание и есть представление вихревых линий [24, 26]. Для его получения разложим скорость $\mathbf{v}$ на две компоненты, $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_\tau$, нормальную и тангенциальную по отношению к вектору $\boldsymbol{\omega}$.

Уравнение движения для поперечной скорости $\mathbf{v}_n$, которое следует непосредственно из уравнения (7), имеет вид уравнения движения частицы в электромагнитном поле:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = \mathbf{E} + \mathbf{v}_n \times \mathbf{H}, \quad (10)$$

где эффективные поля — электрическое и магнитное — даются выражениями:

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(p + \frac{v_\tau^2}{2} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}_\tau}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{v}_\tau. \quad (12)$$

Отметим, что введённые таким образом электрическое и магнитное поля выражаются через скалярный (φ) и векторный ($\mathbf{A}$) потенциалы стандартным образом, принятым в электродинамике:

$$\varphi = p + \frac{v_\tau^2}{2}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{v}_\tau, \quad (13)$$

так что два уравнения Максвелла,

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E},$$

автоматически удовлетворяются. При этом на векторный потенциал $\mathbf{A}$ наложена калибровка

$$\text{div } \mathbf{A} = -\text{div } \mathbf{v}_n,$$

которая эквивалентна условию $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Базовым здесь является само уравнение движения (10) для нормальной компоненты скорости, которое представляет собой уравнение движения для нерелятивистской частицы с зарядом и массой, равными единице, скорость света при этом также равна единице.

Уравнение движения (10) записано в эйлеровом представлении. Чтобы перейти к его лагранжевой формулировке, надо рассмотреть уравнения для "траекторий", которые определяются скоростью $\mathbf{v}_n$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}.$$

Решение уравнения (14) задаёт отображение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t), \quad (15)$$

определяющее переход от эйлерова описания к новому лагранжеву.

Уравнения движения в новых переменных представляют собой уравнения Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{P}}, \quad (16)$$

где точка означает дифференцирование по времени при фиксированном значении $\mathbf{a}$, $\mathbf{P} = \mathbf{v}_n + \mathbf{A} \equiv \mathbf{v}$ — обобщённый импульс, а гамильтониан частицы h , являясь функцией импульса $\mathbf{P}$ и координаты $\mathbf{r}$, выражается стандартным образом:

$$h = \frac{1}{2} (\mathbf{P} - \mathbf{A})^2 + \varphi \equiv p + \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Первое уравнение системы (16) — это уравнение движения (10), записанное в переменных $\mathbf{a}$, t , а второе уравнение совпадает с (14). Для "новой" гидродинамики (10) или её гамильтоновой формулировки (16) справедлива теорема Кельвина (она же теорема Лиувилля):

$$\Gamma = \oint \mathbf{P} d\mathbf{r}, \quad (17)$$

где интегрирование ведётся по замкнутому, движущемуся вместе с "жидкостью" контуру. Отсюда точно так же, как это было сделано выше при выводе (9), получим выражение для "нового" инварианта Коши:

$$\mathbf{I} = \text{rot}_a \left(P_i \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{a}} \right). \quad (18)$$

Отличие последнего от оригинального инварианта Коши (9) состоит в том, что в уравнении движения (14) скорость $\mathbf{v}$ заменена её нормальной компонентой $\mathbf{v}_n$. Как следствие, "новая" гидродинамика является сжимаемой: $\text{div } \mathbf{v}_n \neq 0$. Поэтому на якобиан J преобразования (15) не накладывается никаких ограничений.

Из формулы (18) можно легко получить выражение для завихренности $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a}) \nabla_a) \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}, \quad (19)$$

где J — якобиан преобразования (15),

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)}.$$

Здесь мы учли, что обобщённый импульс $\mathbf{P}$ совпадает со скоростью $\mathbf{v}$, включая момент времени $t = 0$: $\mathbf{P}_0(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{v}_0(\mathbf{a})$. Вектор $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ в этом соотношении — новый инвариант Коши (совпадающий с начальной завихренностью), имеющий нулевую дивергенцию, $\text{div}_a \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a}) = 0$. Как отмечалось ранее, соотношение (19) может быть получено непосредственно интегрированием уравнения (1), оно совпадает с (4). Из приведённого выше вывода становится ясным смысл вектора $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$, стоящего в (4), как инварианта Коши.

Введение ПВЛ (4) решает также ещё одну важную задачу — определение всех казимиров для гамильтонова

описания уравнения движения завихренности (1) путём введения пуассоновой структуры. Как показано в [17], уравнения (1) могут быть представлены в гамильтоновом виде с помощью неканонической скобки Пуассона:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot} \left[\text{rot} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} \right] = \{ \boldsymbol{\omega}, \mathcal{H} \}, \quad (20)$$

где скобка Пуассона даётся выражением:

$$\{F, G\} = \int \left(\boldsymbol{\omega} \left[\text{rot} \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\omega}} \times \text{rot} \frac{\delta G}{\delta \boldsymbol{\omega}} \right] \right) d\mathbf{r}. \quad (21)$$

Здесь вектор $\text{rot}(\delta \mathcal{H}/\delta \boldsymbol{\omega})$ имеет смысл обобщённой скорости. В случае уравнения Эйлера гамильтониан $\mathcal{H}$ совпадает с полной кинетической энергией:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 d\mathbf{r}.$$

Для трёхмерной интегрируемой гидродинамики $\mathcal{H} = \int |\boldsymbol{\omega}| d\mathbf{r}$ [24, 25].

Как впервые было показано в [17], скобка Пуассона (21) оказалась вырожденной. Простейшим её казимиром оказалась спиральность $\int \mathbf{v} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{r}$. Этот инвариант имеет топологическое происхождение [18, 19]: с точностью до постоянного множителя спиральность совпадает с инвариантом Хопфа — числом зацеплений двух любых вихревых линий.

Казимиры представляют собой связи, которые заданы в конфигурационном пространстве, в данном случае в пространстве бездивергентных векторных полей $\boldsymbol{\omega}$. Наличие казимиров не позволяет обратить в уравнении (20) симплектический оператор, задающий скобку Пуассона. Как известно, фиксация всех казимиров задаёт симплектический лист. Согласно общей теории (см., например, обзор [14]), введение координат на этом листе позволяет установить полновесную гамильтонову динамику, в частности записать вариационный принцип. Как показано в работах [24, 51], уравнения движения вихревых линий, т.е. в представлении вихревых линий, могут быть получены исходя из вариационного принципа. При этом удаётся также показать, что все казимиры для скобки (21) — инварианты Коши. Последний факт был установлен вычислением скобки Пуассона (21), выраженной в терминах $\mathbf{r}(\mathbf{a})$ и инварианта Коши $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ с использованием ПВЛ (4) в качестве соответствующей замены. Вычисления показали, что скобка не содержит вариационных производных $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$, т.е. $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ служат в качестве казимиров для скобки (21).

Следует также отметить, что уравнения движения (14) вместе с соотношением (19) представляют собой результат частичного интегрирования уравнения Эйлера (7). Эти уравнения разрешены относительно инвариантов Коши — бесконечно большого числа интегралов движения, что принципиально важно при численном интегрировании (см., например, [38]). Для этой системы инварианты Коши сохраняются автоматически, в то время как при прямом интегрировании уравнений Эйлера необходимо следить, в какой степени инварианты Коши являются сохраняющимися величинами. По-видимому, данный факт — одно из главных ограничений, определяющих точность дискретных численных схем при непосредственном интегрировании уравнений Эйлера.

Другим важным свойством ПВЛ является отсутствие каких-либо ограничений на величину якобиана J , которые, например, имеют место при переходе от эйлера описания к лагранжеву, когда якобиан равен единице. При этом $1/J$ имеет смысл плотности n вихревых линий. Эта величина в силу уравнения (14) как функция $\mathbf{r}$ и t подчиняется уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}_r(n \mathbf{v}_n) = 0. \quad (22)$$

В уравнении (22) $\text{div}_r \mathbf{v}_n \neq 0$, поскольку только полная скорость $\mathbf{v}$ имеет нулевую дивергенцию.

3. Сжимаемость представления вихревых линий и автомодельный закон 2/3

Рассмотрим особенности ПВЛ и его геометрические характеристики, основываясь на точном решении уравнений Эйлера [38]. Это решение, как отмечалось ранее, хорошо согласуется с результатами численного моделирования вихревых структур блинного типа.

Пусть $\omega_{\max}$ — максимальное по пространству значение модуля завихренности, которое является функцией времени t . Очевидно, что в точке максимума $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\max}(t)$ $\nabla \omega = 0$. Представляя $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор ($\tau^2 = 1$), из (1) легко получить уравнение для $\omega_{\max}$:

$$\omega_{\max}^{-1} \frac{d\omega_{\max}}{dt} = \tau_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tau_j. \quad (23)$$

Здесь производная $\partial v_j / \partial x_i$ берётся в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\max}(t)$. В случае, когда поле завихренности симметрично относительно этой точки, выражение, стоящее в правой части (23), может быть записано как

$$\tau_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tau_j = \text{div} \mathbf{v}_\tau. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь уравнение (3). В этом уравнении производная d/dt берётся при постоянном значении $\mathbf{a}$. Поэтому в переменных $\mathbf{r}$ и t (т.е. эйлеровых переменных) уравнение (3) приобретёт следующий вид:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla) J = \text{div} \mathbf{v}_n J = -\text{div} \mathbf{v}_\tau J.$$

Отсюда видно, что в точке минимума якобиана $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\min}(t)$

$$\frac{dJ_{\min}}{dt} = \text{div} \mathbf{v}_n J_{\min}. \quad (25)$$

Если предположить, что точка максимума завихренности совпадает с точкой минимума якобиана, $\mathbf{x}_{\max}(t) = \mathbf{x}_{\min}(t)$, то тогда в соответствии с (23)–(25) мы приходим к соотношению

$$\omega_{\max} J_{\min} = \text{const}. \quad (26)$$

На рисунке 1 представлены результаты интегрирования уравнений ПВЛ [52] для изоповерхностей завихренности $|\boldsymbol{\omega}| = 0,8 \omega_{\max}$ и якобиана $J = 1,25 J_{\min}$ при $t = 7,5$, которые практически совпадают. Такое совпадение свидетельствует о том, что $|\boldsymbol{\omega}|$ и J вблизи своих экстремальных точек (максимума и минимума) имеют одну и ту же пространственную зависимость — определяются только

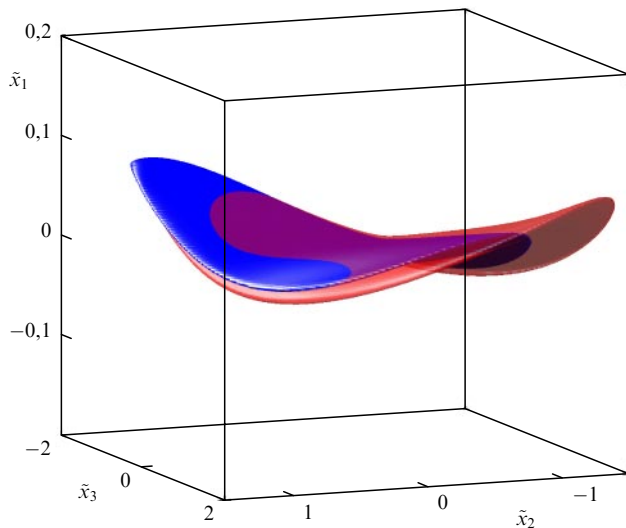


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Изоповерхности завихренности $|\omega| = 0,8 \omega_{\max}$ (красный цвет) и якобиана $J = 1,25 J_{\min}$ (синий цвет) при $t = 7,5$; симуляция ПВЛ [52].

одной функцией координат. При этом расстояние между точкой максимума завихренности и точкой минимума якобиана в численном эксперименте было порядка толщины блина.

На рисунке 2 показано изменение во времени $\omega_{\max}$ и $J_{\min}$ для всех наблюдаемых блинов. Численный эксперимент демонстрирует экспоненциальное возрастание максимальной завихренности для каждого из блинов и соответственно экспоненциальное уменьшение минимального якобиана, так что их произведение $\omega_{\max} J_{\min} \approx \text{const}$.

Соотношение (26), таким образом, показывает, что завихренность в блине возрастает за счёт уменьшения якобиана. При этом числитель слабо изменяется — особенно на больших временах, когда отчётливо наблюдается экспоненциальное возрастание. Объяснение последнего связано, как показано ниже, со структурой точного решения [38] трёхмерного уравнения Эйлера, которое с хорошей точностью моделирует эволюцию блина на экспоненциальной стадии его роста.

Точное решение в декартовой системе $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{n}_1 + x_2 \mathbf{n}_2 + x_3 \mathbf{n}_3$ для завихренности, зависящей только от x_1 и имеющей только одну компоненту, параллельную

оси $\mathbf{n}_2$, имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\omega_{\max}(t) \ell_1(t) f\left(\frac{x_1}{\ell_1(t)}\right) \mathbf{n}_3 + \begin{pmatrix} -\beta_1 x_1 \\ \beta_2 x_2 \\ \beta_3 x_3 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \omega_{\max}(t) f'\left(\frac{x_1}{\ell_1(t)}\right) \mathbf{n}_2, \quad (28)$$

где β_1 , β_2 и β_3 — произвольные константы, связанные между собой соотношением $-\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$. Здесь $\omega_{\max}(t) = w_0 \exp(\beta_2 t)$ и $\ell_1(t) = h_0 \exp(-\beta_1 t)$ — зависимости от времени максимума завихренности и толщины блина, w_0 и h_0 — начальные (положительные) значения, $f(\xi)$ — произвольная функция с $|\max f'(\xi)| = 1$.

Скорость в этом решении представляет собой суперпозицию сдвигового течения и асимметричного потенциального растягивающего течения $(-\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \beta_3 x_3)$.

Для данного точного решения легко строится представление вихревых линий:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \exp(-\beta_1 t), \quad x_2 = a_2, \\ x_3 &= a_3 \exp(\beta_3 t) - w_0 h_0 f\left(\frac{a_1}{h_0}\right) \frac{\sinh(\beta_3 t)}{\beta_3}, \end{aligned} \quad (29)$$

с матрицей Якоби вида

$$\hat{J}(\mathbf{a}, t) = \begin{pmatrix} \exp(-\beta_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_0 f'\left(\frac{a_1}{h_0}\right) \frac{\sinh(\beta_3 t)}{\beta_3} & 0 & \exp(\beta_3 t) \end{pmatrix},$$

$$J(\mathbf{a}, t) = \det \hat{J} = \exp[(\beta_3 - \beta_1)t] = \exp(-\beta_2 t). \quad (30)$$

Отсюда следует, что максимальная завихренность обратно пропорциональна якобиану: $\omega_{\max} \sim J^{-1}$, в полном соответствии с нашим предыдущим заключением. Правда, для этого решения якобиан J не зависит от координат. Координатная зависимость возникает в численном эксперименте вследствие трёхмерности структуры (см. рис. 1). При движении вдоль поверхности блина численное решение уравнений локально (вплоть до расстояний порядка десяти толщин) хорошо согласуется с точным решением (27), (28). Другим важным обстоятельством ПВЛ для (27), (28) является то, что одно собственное значение — первое — матрицы Якоби экспоненциально возрастает со временем, второе остаёт-

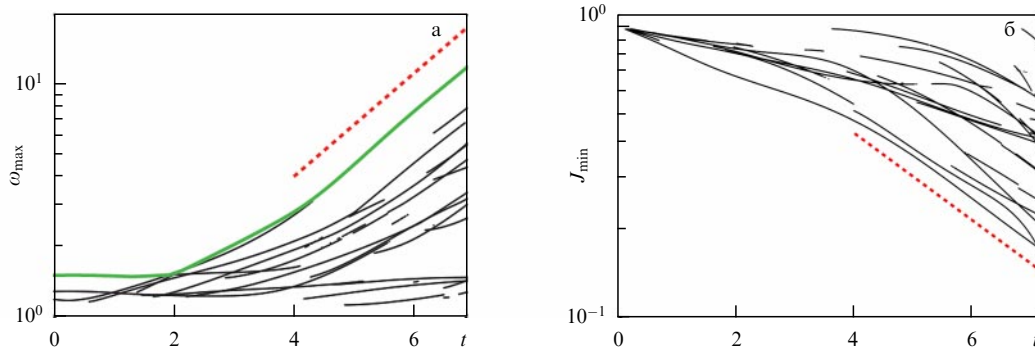


Рис. 2. (В цвете онлайн.) (а) Эволюция локальных максимумов завихренности (логарифмическая шкала). Зелёная кривая соответствует глобальному максимуму, пунктирная красная линия — огибающей $\propto \exp(t/T_\omega)$ с $T_\omega = 2$. (б) Экспоненциальное убывание $J_{\min}$ как функции времени (логарифмическая шкала) для различных блинов, пунктирная красная линия — огибающая.

ся неизменно равным единице, а третьё экспоненциально убывает. В то же время якобиан уменьшается экспоненциально, обратно пропорционально $\omega_{\max}$. Причём завихренность направлена вдоль второй оси, соответствующей второму собственному значению. Это свойство, как мы видим в численном эксперименте, сохраняется в полной мере, и оно соответствует тому, что числитель в выражении (4), как отмечалось ранее, благодаря (3) практически не изменяется по величине в точке максимума завихренности, но может изменяться по направлению, что и наблюдается в численном эксперименте.

3.1. Сингулярные собственные значения

Матрица Якоби для точного решения содержит один недиагональный элемент — J_{31} , возрастающий со временем экспоненциально, $\sim \exp(\beta_3 t)$. Наличие этого элемента существенным образом сказывается, как мы увидим далее, на направлении завихренности, а также на зависимости якобиана от толщины блина, что наблюдается в численном эксперименте. Второе очень важное обстоятельство, следующее отсюда, состоит в том, что собственные значения матрицы Якоби не представляют собой относительные растяжения ввиду недиагональности самой матрицы. Для того чтобы правильно ввести относительные растяжения, надо обратиться к задаче на сингулярные собственные значения для матрицы $\hat{J} = [\partial x_i / \partial a_j]$ в точке $J_{\min}$. Эта задача сводится к нахождению двух матриц поворота, U и V , и диагональной матрицы $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, содержащей неотрицательные элементы $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, называемые сингулярными собственными значениями. При этом матрица Якоби представима в виде $\hat{J} = U \Sigma V^T$, где T означает транспонирование. Матрицы вращения U и V строятся из собственных векторов задачи на собственные значения для двух симметричных матриц, $\hat{J} \hat{J}^T$ и $\hat{J}^T \hat{J}$ соответственно, в то время как собственные значения (совпадающие) — квадраты сингулярных собственных значений σ_i . Отметим, что $G^{(a)} = \hat{J}^T \hat{J}$ — метрический тензор в $\mathbf{a}$ -пространстве,

$$G_{\alpha\beta}^{(a)} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial a_\beta} \right], \quad d\mathbf{x}^2 = G_{\alpha\beta}^{(a)} da_\alpha da_\beta, \quad (31)$$

в то время как $G^{(x)} = [\hat{J} \hat{J}^T]^{-1}$ — метрический тензор в $\mathbf{x}$ -пространстве,

$$G_{ij}^{(x)} = \left[\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j} \right], \quad d\mathbf{a}^2 = G_{ij}^{(x)} dx_i dx_j. \quad (32)$$

Для точного решения матрица Якоби имеет следующие сингулярные собственные значения:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= g - \sqrt{g^2 - \exp(-2\beta_2 t)}, \quad \sigma_2^2 = 1, \\ \sigma_3^2 &= g + \sqrt{g^2 - \exp(-2\beta_2 t)}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \left(\exp(-2\beta_1 t) + \exp(2\beta_3 t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[w_0 f' \left(\frac{a_1}{h_0} \right) \frac{\sinh(\beta_3 t)}{\beta_3} \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_1 \propto \exp(-\beta_1 t), \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 \propto \exp(\beta_3 t), \quad (35)$$

что согласуется с численными результатами.

Таким образом, вблизи минимума якобиана вдоль первого направления имеется сильное сжатие: $\sigma_1 \propto \exp(-\beta_1 t) \propto \ell_1$, в результате которого все лагранжевы маркеры при $t \rightarrow \infty$ должны схлопнуться в точку; в третьем направлении возникает сильное растяжение $\sigma_3 \propto \exp(\beta_3 t) \propto \omega_{\max}^{-1} \ell_1^{-1}$; в промежуточном направлении σ_2 близко к единице и со временем изменяется незначительно.

В этом пределе для точного решения матрицы поворота $U = \{\mathbf{n}_1^{(x)}, \mathbf{n}_2^{(x)}, \mathbf{n}_3^{(x)}\}$ и $V = \{\mathbf{n}_1^{(a)}, \mathbf{n}_2^{(a)}, \mathbf{n}_3^{(a)}\}$ в $\mathbf{x}$ - и $\mathbf{a}$ -пространствах имеют вид

$$U \simeq 1, \quad V \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} & 0 & \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-q}{\sqrt{1+q^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \end{pmatrix},$$

где

$$q = -\frac{w_0}{2\beta_3} f' \left(\frac{a_1}{h_0} \right). \quad (36)$$

При больших временах, как показывает численный эксперимент, матрица U близка к единичной, а матрица V — к антидиагональной с элементами $V_{13} \approx V_{22} \approx -V_{31} \approx 1$. Таким образом, q в (30) можно считать большой величиной.

3.2. Скейлинг 2/3

Обратимся теперь к вопросу о том, откуда возникает скейлинг (6) между максимальной завихренностью и толщиной блина. Сделаем одно замечание. Как отмечалось, численное решение хорошо аппроксимируется точным решением. Поэтому для нахождения скейлинга (6) точное решение будет рассматриваться как нулевое приближение. Прежде всего это касается перехода от лагранжевых переменных к эйлеровым в (4), а именно якобиана.

Толщину структуры определим исходя из разложения ω в окрестности максимальной точки $\omega_{\max}$:

$$|\omega| = \omega_{\max} - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(\omega)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j, \quad (37)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\max}$. В этом случае собственные значения $\lambda_n^{(\omega)}$ матрицы вторых производных $\Gamma_{ij}^{(\omega)} = -\partial_i \partial_j |\omega|$, вычисленных в локальном максимуме завихренности, будут определять размеры структуры в трёх ортогональных направлениях: $\ell_n = (2\omega_{\max} / \lambda_n^{(\omega)})^{1/2}$. Максимальное собственное значение $\lambda_1^{(\omega)}$ задаёт толщину блина, а собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, — направление нормали к структуре типа блина. В собственных осях $\Gamma_{ij}^{(\omega)}$ разложение (37) выражается в виде

$$|\omega| = \omega_{\max} \left(1 - \sum_{n=1,2,3} \frac{\tilde{x}_n^2}{\ell_n^2} \right).$$

При этом, согласно нашему численному моделированию [37, 38], только первый характерный размер блина — его

толщина — убывает со временем, а остальные два размера изменяются слабо и остаются по величине порядка единицы,

$$\ell_1 \propto \exp(-\beta_1 t), \quad \ell_2 \propto 1, \quad \ell_3 \propto 1. \quad (38)$$

Геометрия области пониженного значения якобиана вблизи минимума $J_{\min}$ может быть описана таким же образом:

$$J = J_{\min} - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(J)} \tilde{x}_i \tilde{x}_j, \quad (39)$$

где $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\min}$ и собственные значения $\lambda_n^{(J)}$ матрицы вторых производных $\Gamma_{ij}^{(J)} = \partial_i \partial_j J$, вычисленные в локальном минимуме якобиана, определяют размеры структуры, $l_n = (2J_{\min}/\lambda_n^{(J)})^{1/2}$. Области высокой завихренности и пониженного значения якобиана в значительной степени пересекаются между собой (см. рис. 1), и характерные размеры второй области l_n ведут себя во времени так же, как и характерные размеры первой [52]:

$$l_1 \propto \exp(-\beta_1 t), \quad l_2 \propto 1, \quad l_3 \propto 1. \quad (40)$$

При этом максимум завихренности и минимум якобиана ведут себя как $\omega_{\max} \propto J_{\min}^{-1} \propto \exp(\beta_2 t)$, а $\beta_2/\beta_1 \approx 2/3$, т.е. вихревая структура эволюционирует согласно закону 2/3 (см. (6)).

В лагранжевых переменных $\tilde{\mathbf{a}}$ (всюду далее мы опускаем знак тильда) разложение якобиана вблизи минимума записывается как

$$J = J_{\min} + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^{(a)} a_i a_j, \quad (41)$$

где $\Gamma_{ij}^{(a)} = \partial^2 J / \partial a_i \partial a_j$ — положительно определённая матрица. Матрицы $\Gamma_{ij}^{(a)}$ и $\Gamma_{ij}^{(J)}$ (далее для удобства последнюю обозначаем как $\Gamma_{ij}^{(x)}$) связаны согласно правилу цепи,

$$\Gamma^{(a)} = \hat{J}^T \Gamma^{(x)} \hat{J} = V \gamma V^T, \quad (42)$$

где мы выделили матрицу

$$\gamma = \Sigma U^T \Gamma^{(x)} U \Sigma.$$

В собственных осях $\Gamma^{(x)}$ матрица γ близка к диагональной, так как U стремится к единице, $\Gamma^{(x)} = \text{diag}\{\lambda_1^{(J)}, \lambda_2^{(J)}, \lambda_3^{(J)}\}$, и γ оказывается произведением трёх диагональных и двух почти диагональных матриц. Отсюда, так как $\lambda_n^{(J)} = 2J_{\min}/l_n^2$, для диагональных элементов γ приближённо имеем:

$$\gamma_{ii} \approx \sigma_i^2 \lambda_i^{(J)} = 2J_{\min} \frac{\sigma_i^2}{l_i^2}.$$

Учитывая, что $\sigma_1 \propto l_1 \propto \exp(-\beta_1 t)$, $\sigma_2 \propto l_2 \propto 1$, $\sigma_3 \propto \exp(\beta_3 t)$ и $l_3 \propto 1$, получаем

$$\gamma_{11} \propto J_{\min}, \quad \gamma_{22} \propto J_{\min}, \quad \gamma_{33} \propto J_{\min} \sigma_3^2.$$

Согласно этой оценке, первые два диагональных элемента должны убывать со временем как $J_{\min}$. Численный эксперимент действительно демонстрирует убывание γ_{11} и γ_{22} , хотя они и не следуют экспоненциальной зависимости точно, что может быть связано с небольшим отличием матрицы U от диагональной, которое мы наблюдаем в экспериментах. Недиagonalные элементы γ также оказываются малыми, и только компонента γ_{33} остаётся порядка единицы, слабо изменяясь со временем.

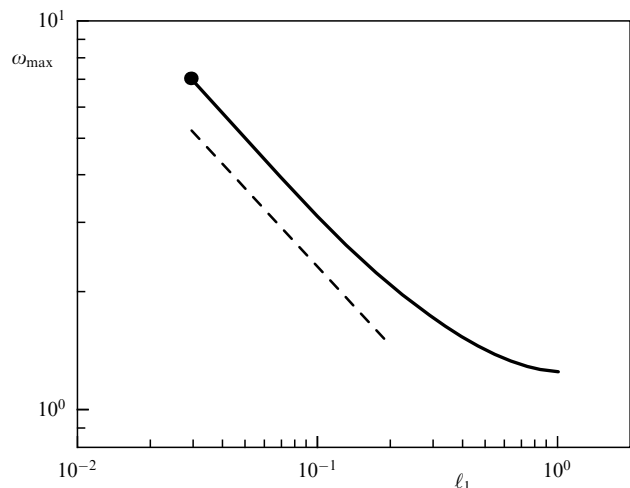


Рис. 3. Максимальная завихренность $\omega_{\max}$ как функция ℓ_1 в логарифмическом масштабе. Кругок на зависимости соответствует максимальной завихренности в конечный момент времени счёта $t = 7.5$, штриховая линия — степенному закону $\omega_{\max} \propto \ell_1^{-2/3}$.

Учитывая, что третье сингулярное собственное значение выражается через максимум завихренности и толщину блина завихренности как $\sigma_3 \propto \omega_{\max}^{-1} \ell_1^{-1}$, и $J_{\min} \propto \omega_{\max}^{-1}$, находим

$$\gamma_{33} \propto \omega_{\max}^{-3} \ell_1^{-2},$$

что приводит к соотношению (6), наблюдаемому в численном эксперименте (см. рис. 3):

$$\omega_{\max} \propto \gamma_{33}^{-1/3} \ell_1^{-2/3}. \quad (43)$$

В заключение следует сказать, что если к матрице γ применить поворот V , то в результате самым большим элементом окажется компонента (1, 1), которая практически совпадает с γ_{33} . Таким образом, якобиан и соответственно завихренность в основном зависят от координаты x_1 , а влияние других координат оказывается экспоненциально слабым. Это ещё раз подчёркивает, что данная структура — квазиодномерная, однако возникновение скейлинга (6) представляет собой сугубо трёхмерное явление, которое своим существованием обязано сжимаемости непрерывно распределённых вихревых линий.

4. Статистика зарождающейся трёхмерной турбулентности

В этом разделе мы обсудим статистические свойства зарождающейся турбулентности, ограничившись рассмотрением режима, в котором число появляющихся структур блинного типа достаточно велико и к ним может быть применён статистический анализ. С самого начала ясно, что в данном случае турбулентность сильно анизотропна. Каждая структура блинного типа порождает в $\mathbf{k}$ -пространстве сильно анизотропные распределения джетового типа, вытянутые в перпендикулярном направлении к плоскости блина с характерной толщиной $\sim \ell_1^{-1} \ll \ell_1^{-1}$. Именно взаимодействие между джетами (фактически между структурами блинного типа), как будет показано далее, определяет поведение структурных функций поля скорости.

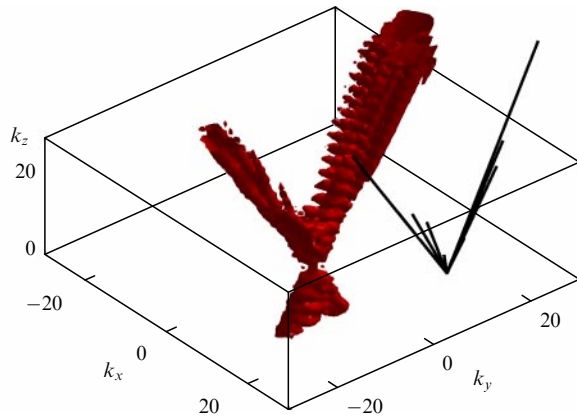


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Изоповерхности модуля фурье-амплитуд завихренности (нормированных на максимальное значение) $|\tilde{\omega}(\mathbf{k})| = 0,2$ в $\mathbf{k}$ -пространстве при t_{m1} . Сплошные линии показывают максимальные $\mathbf{k}$ -векторы (нормированные на ℓ_1^{-1} для всех джетов) [36].

В наших численных экспериментах мы наблюдаем формирование структур блинного типа для всех рассматриваемых начальных условий (более 30) [36–38]. Во время эволюции всех таких структур с высокой завихренностью в той или иной степени выполняется соотношение колмогоровского типа $\omega_{\max}(t) \sim \ell^{-2/3}(t)$. В первой работе на эту тему [36] было показано, что блины в x -пространстве порождают сильно анизотропные распределения в $\mathbf{k}$ -пространстве в виде джетов, вытянутых в направлениях, перпендикулярных блинам (рис. 4). Поскольку при эволюции блинов отношение $\ell_1/\ell_\perp$, где $\ell_\perp$ — характерный продольный размер блина, уменьшается, соответственно анизотропия джетов со временем возрастает, в результате мгновенный спектр турбулентности оказывается сильно изрезанным и анизотропным. При этом число структур блинного типа увеличивается и соответственно возрастает число джетов. Каждый из джетов имеет своё угловое распределение порядка $(k\ell_\perp)^{-1}$. Джеты с увеличением их числа начинают перекрываться в $\mathbf{k}$ -пространстве. Когда таких перекрытий становится достаточно много, в этих областях происходит формирование колмогоровского спектра $E(k) \sim k^{-5/3}$. Отметим, что для начальных условий IC₁ из [37], не содержащих никакой начальной анизотропии, после усреднения по углу колмогоровский спектр не наблюдается (рис. 5а). Начальные условия IC₂ и IC₃ представляют собой суперпозицию сдвигового течения (вырожденного течения Арнольда–Бельтрами–Чилдресса) и изотропного гауссова шума. Анизотропия, порождаемая сдвиговым течением, обуславливает появление джетов с сильным угло-

вым перекрытием, благодаря чему формируется колмогоровский спектр (рис. 5б, в). Следует подчеркнуть, что не усреднённый по углу спектр оказывается сильно анизотропным. Таким образом, несмотря на наличие колмогоровского поведения спектра, турбулентность в условно инерционном интервале далека от изотропной и однородной, по крайней мере, для времён численного эксперимента.

Напомним, что в случае изотропной турбулентности одним из точных результатов теории Колмогорова является так называемый закон 4/5 [2, 15, 53]. В инерционном интервале масштабов r этот закон записывается как

$$\langle \delta v_\parallel^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (44)$$

где $\delta v_\parallel$ — продольное приращение скорости (проекция на направление вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$), $\langle \rangle$ означают усреднение по статистическому ансамблю. Отсюда исходя из соображений размерностей следуют соотношения для структурных функций второго порядка, $\langle \delta v^2 \rangle \propto \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$, и сам колмогоровский спектр: $E_k \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Подчеркнём, что ключевым в данном случае является предположение о локальности нелинейного взаимодействия на масштабах инерционного интервала. Тогда при больших числах Рейнольдса, $Re \gg 1$, динамику на этих масштабах можно описывать уравнениями Эйлера, а появления колмогоровских соотношений можно ожидать до возбуждения вязких масштабов, о чём свидетельствуют многие численные эксперименты [54–57].

Отметим, что в наших численных экспериментах [36, 37] степенной спектр энергии со скейлингом, близкий к колмогоровскому, наблюдался в полностью невязком потоке, динамика которого определяется главным образом блинообразными структурами высокой завихренности [38, 52, 58]. Джеты, несмотря на то что они занимают небольшую долю всего спектрального пространства, вносят основной вклад в спектр зарождающейся турбулентности, что приводит к образованию степенного интервала $E_k \propto k^{-\alpha}$ с показателем степени α , близким к 5/3, и распространению со временем колмогоровской области на меньшие масштабы. Более того, степенной скейлинг охватывает значительно больший интервал масштабов, если джеты появляются вблизи одного направления, увеличивая тем самым анизотропию потока.

В численных экспериментах [40] также было изучено поведение двухточечных структурных функций (моментов) скорости в режиме зарождающейся турбулентности. В частности, выяснено, каким образом формируется степенной скейлинг $[M_\parallel^{(n)}(r)]^{1/n} \propto r^{\xi_n}$ и $[M_\perp^{(n)}(r)]^{1/n} \propto r^{\xi_n}$ для продольных и поперечных моментов в том же интервале

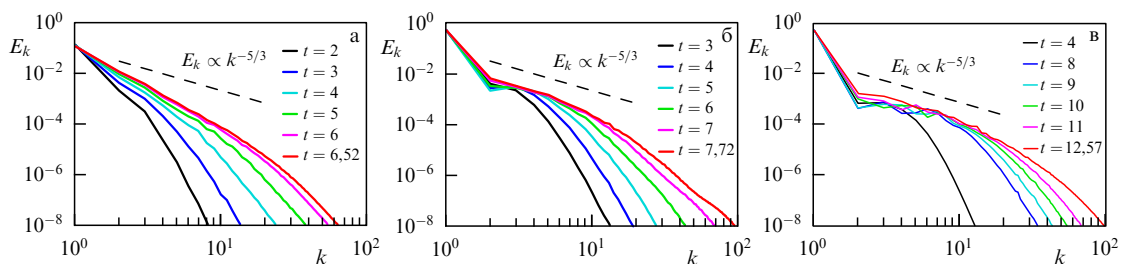


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Спектр энергии $E_k(t)$ в разные моменты времени для начальных условий [37] (а) IC₁ (тип I), (б) IC₂ (тип II) и (в) IC₃ (тип III) [37].

масштабов, что и для спектра энергии E_k . Как показал численный эксперимент, показатели степени ξ_n и ζ_n демонстрируют те же ключевые свойства, что и в случае развитой (стационарной) турбулентности: они уменьшаются с уменьшением порядка момента n , что указывает на перемежаемость и аномальный скейлинг. При этом продольные показатели оказываются несколько большими, чем поперечные. В частности, для структурных функций скорости третьего порядка выполняется примерное соотношение $\xi_3 \simeq \alpha/5$.

Численные результаты показали, что, несмотря на сильную анизотропию продольных и поперечных структурных функций третьего порядка, наблюдается степенная зависимость от r практически для всех направлений $\mathbf{r}/r$ с показателем степени, близким к единице, как в колмогоровском законе $4/5$ (44). Таким образом, когда степень спектра энергии близка к колмогоровской, продольный момент третьего порядка в зависимости от расстояния показывает близкий к линейному скейлинг, совместимый с законом (44). При этом распределение завихренности характеризуется сильно нерэлеевской формой за счёт перемежаемости, а степенной хвост этого распределения указывает на нетривиальную геометрию блинообразных структур высокой завихренности.

4.1. Численная схема для статистических характеристик трёхмерной турбулентности

Прежде чем представить результаты численных экспериментов для несжимаемых трёхмерных уравнений Эйлера (1) (в терминах завихренности), следует сказать несколько слов относительно численной схемы, используемой в работах [36–38].

Численное интегрирование уравнений Эйлера (1) проводилось в периодическом ящике $\mathbf{r} = (x, y, z) \in [-\pi, \pi]^3$ с помощью псевдоспектрального метода Рунге–Кутты четвёртого порядка точности. Для всех начальных условий течение выбиралось в виде суперпозиции сдвигового потока:

$$\omega_{\text{sh}}(\mathbf{r}) = (\sin z, \cos z, 0), \quad |\omega_{\text{sh}}(\mathbf{r})| = 1, \quad (45)$$

представляющего собой стационарное решение уравнений Эйлера, и случайного периодического возмущения. Обратный оператор ротора и все пространственные производные вычислялись в фурье-пространстве. Использовалась адаптивная анизотропная прямоугольная сетка, равномерная для каждого направления. Адаптация сетки осуществлялась независимо по каждой из трёх координат на основе анализа фурье-спектра завихренности. Шаг по времени выбирался с помощью критерия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви с числом Куранта 0,5. Начальный размер кубической решётки 128^3 в процессе адаптации увеличивался до тех пор, пока общее число узлов не достигало 2048^3 (1024^3 для некоторых численных расчётов). Адаптация решётки осуществлялась следующим образом. С помощью трёх функций:

$$S_j(k) = \int |\omega(\mathbf{p})|^2 \delta(|p_j| - k) d^3\mathbf{p}, \quad j = x, y, z,$$

которые представляют собой спектр завихренности, проинтегрированный в плоскости, перпендикулярной каждой из трёх осей, отслеживалась точка перелома между энергосодержащей областью и областью численного коротковолнового шума по каждому направлению. Как только по какому-либо из направлений j точка

перелома приближалась к $2K_{\text{max}}^{(j)}/3$, решётка в этом направлении уплотнялась. Здесь $K_{\text{max}}^{(j)} = N_j/2$ — максимальные волновые числа, N_j — размеры решётки по направлениям j , а коэффициент $2/3$ учитывает эффект алиазинга. Переход от одной решётки к другой выполнялся с помощью фурье-интерполяции. После достижения максимального числа узлов численное моделирование продолжалось уже на фиксированной решётке, т.е. без дальнейшего её изменения. Полная остановка счёта производилась, если по какому-либо направлению фурье-спектр завихренности при $2K_{\text{max}}^{(j)}/3$ превышал 10^{-13} от своего максимального значения, $S_j(2K_{\text{max}}^{(j)}/3) \geq \geq 10^{-13} \max_k (S_j(k))$ (см. детали в [36, 37]).

Более подробная информация о моделировании уравнений Эйлера в представлении вихревых линий приведена в статьях [36, 37, 52], где показано, что точность на временном интервале моделирования в ПВЛ очень высока — она позволяет получить точно такое же поле завихренности, как и при прямом интегрировании.

В некоторых численных экспериментах наблюдалось последовательное формирование степенного скейлинга в спектре энергии $E_k \propto k^{-\alpha}$ на малых и средних волновых числах начиная с $k \geq 2$. Первая гармоника $k = 1$, в которой сконцентрированы начальные условия, содержит большую часть полной энергии (до 97% в конечное время) и не принадлежит этому интервалу. Чтобы исключить её влияние на структурные функции скорости, вычислялись моменты для модифицированной скорости $\tilde{\mathbf{v}}$, полученной из исходной посредством удаления девяти гармоник $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ с $k_{x,y,z} = -1, 0, 1$.

Вычисление моментов для зарождающейся турбулентности (нестационарной) требует гораздо больших вычислительных ресурсов, чем аналогичная задача для развитой (стационарной) турбулентности с использованием усреднения по времени (см., например, [59]). Расчёт выполнялся следующим образом. Во-первых, для заданного радиуса r определяется достаточное количество точек $\mathbf{r}$, равномерно распределённых на сфере $|\mathbf{r}| = r$. Затем для каждого $\mathbf{r}$ вычисляется приращение скорости $\delta\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ в каждом узле решётки $\mathbf{x}$ с использованием интерполяции по ближайшим соседям для "сдвинутой" скорости $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)$. Наконец, продольный и поперечный моменты порядка n вычисляются как соответствующие интегральные суммы по всем точкам на сфере $\mathbf{r}$ и всем узлам $\mathbf{x}$:

$$M_{\parallel}^{(n)}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}|=r} d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} (\delta\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{m}_r)^n, \quad (46)$$

$$M_{\perp}^{(n)}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\mathbf{r}|=r} d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} |\delta\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{m}_r|^n, \quad (47)$$

где $\mathbf{m}_r = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор.

4.2. Результаты численных экспериментов

Приведём результаты численного моделирования для начальных данных I_1 из [36] на решётке с общим числом узлов 2048^3 . Подчёркнём, что для этих данных финальная расчётная сетка представляла собой прямоугольный параллелепипед $972 \times 2048 \times 4096$ для времени $t_f = 7,75$. Максимум завихренности ω_{max} , равный 1,5 в начальный момент, при t_f достигал величины 18,4. Время остановки счёта t_f определялось из условия, чтобы разрешение наиболее тонкой области высокой завихренности не пре-

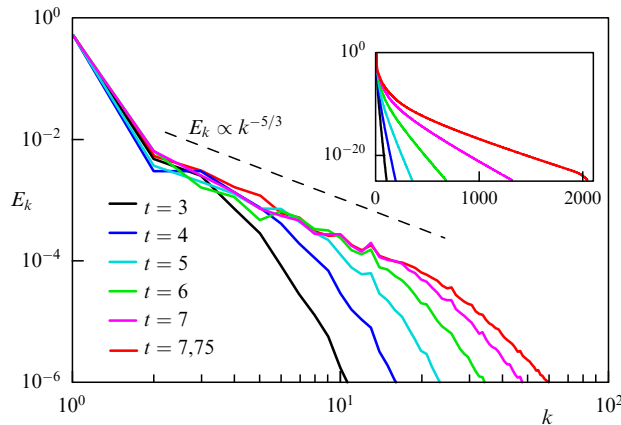


Рис. 6. (В цвете онлайн.) Спектр энергии E_k в двойном логарифмическом масштабе. На вставке показан спектр в одинарном логарифмическом масштабе [40].

вышло 10 узлов решётки на уровне половины максимума завихренности.

Эволюция спектра энергии для этого моделирования показана на рис. 6. На больших волновых числах k спектр убывает экспоненциально, как показано на вставке рисунка. На малых и средних k отчётливо наблюдается постепенное формирование степенного интервала со скейлингом, близким к колмогоровскому $E_k \propto k^{-5/3}$. Степенной интервал характеризуется "замороженным" спектром, тогда как на больших волновых числах спектр сильно изменяется. К концу моделирования этот интервал составил немного более одной декады: $2 \lesssim k \lesssim 30$. Необходимо отметить, что данный интервал содержит только малую долю энергии: даже в финальное время 97,2 %

энергии всё ещё содержатся в первой гармонике $k = 1$, тогда как волновые числа $2 \leq k \leq 30$ и $k > 30$ получают только 2,8 % и менее чем 0,1 % энергии соответственно.

Эволюция моментов третьего порядка показана на рис. 7а (на рис. 7б показаны моменты в финальное время с большим масштабом). Степенной интервал со скейлингом, близким к линейному $M^{(3)} \propto r$, формируется со временем постепенно как для продольного, так и для поперечного моментов на достаточно больших масштабах, расширяясь до $0,2 \lesssim r \lesssim 1$ в финальное время. Этим масштабам соответствуют волновые числа $6 \lesssim k \lesssim 30$, принадлежащие степенному интервалу в спектре энергии на рис. 6.

Показатели степени ξ_n и ζ_n для продольных и поперечных моментов $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n} \propto r^{\xi_n}$ и $[M_{\perp}^{(n)}]^{1/n} \propto r^{\zeta_n}$ уменьшаются с порядком момента n , указывая на перемежаемость и аномальный скейлинг (рис. 7б). Первые четыре продольных показателя имеют следующие значения: $\xi_1 = 0,60 \pm 0,06$, $\xi_2 = 0,48 \pm 0,04$, $\xi_3 = 0,39 \pm 0,03$ и $\xi_4 = 0,32 \pm 0,03$. Соответствующие поперечные показатели: $\zeta_1 = 0,55 \pm 0,07$, $\zeta_2 = 0,42 \pm 0,06$, $\zeta_3 = 0,33 \pm 0,05$, $\zeta_4 = 0,26 \pm 0,04$ — несколько меньше, $\xi_n \gtrsim \zeta_n$, но остаются в пределах стандартных отклонений. Необходимо отметить, что для развитой турбулентности поперечные экспоненты также оказываются несколько меньшими, чем продольные (см., например, [60, 61]).

На основании поведения моментов скорости по направлениям можно судить об анизотропии распределения скорости, например продольного момента третьего порядка,

$$M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}(r) = \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} (\delta \mathbf{v}_{\mathbf{m}})^3, \quad (48)$$

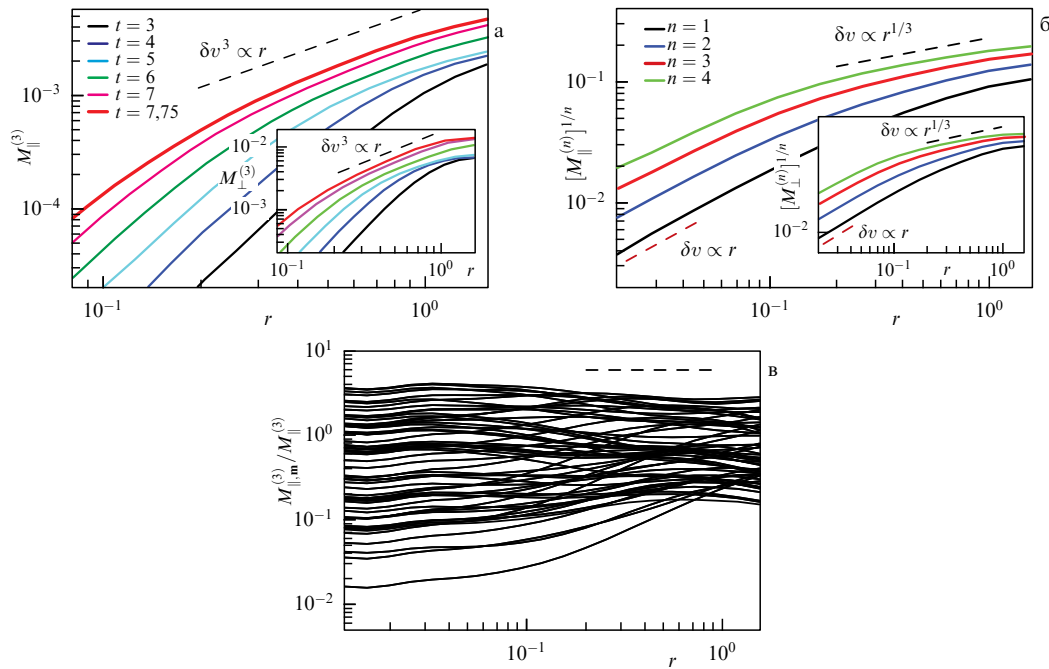


Рис. 7. (В цвете онлайн.) (а) Продольные моменты третьего порядка $M_{\parallel}^{(3)}$. Чёрная штриховая линия показывает скейлинг $M_{\parallel}^{(3)} \propto r$. (б) Продольные моменты $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n}$ порядков $n = 1-4$ в финальное время $t_f = 7,75$. Чёрная штриховая линия показывает скейлинг $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n} \propto r^{1/3}$ для степенного интервала, а красная штриховая линия — скейлинг $[M_{\parallel}^{(n)}]^{1/n} \propto r$ на меньших масштабах. На вставках рис. а и б приведены поперечные моменты. (в) Компенсированные продольные моменты третьего порядка по направлениям $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}/M_{\parallel}^{(3)}$ для 114 направлений $\mathbf{m}$, равномерно распределённых по сферическим координатам, в финальное время. Штриховой горизонтальной линией показан степенной интервал для $M_{\parallel}^{(3)}$ на рис. б [40].

где $\mathbf{r} = \mathbf{m}r$, а $\mathbf{m}$ — единичный вектор, задающий направление. На рисунке 7в показано поведение моментов по направлению $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ относительно усреднённого по углам момента $M_{\parallel}^{(3)}$ для 114 направлений, равномерно распределённых по сферическим координатам. На масштабах степенного интервала изменение моментов $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ со сменой направления достигает одного порядка их величины. При этом для некоторых направлений моменты $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ возрастают существенно быстрее (медленнее) с увеличением расстояния r по сравнению с усреднённым по углам моментом $M_{\parallel}^{(3)}$. Отметим, однако, что для большинства направлений моменты $M_{\parallel, \mathbf{m}}^{(3)}$ изменяются с расстоянием практически так же, как и $M_{\parallel}^{(3)}$. Подобное поведение, как показано в разделе 5, впервые было обнаружено для двумерной гидродинамической турбулентности в режиме прямого каскада [45], когда спектр Крейчнана появляется вследствие формирования квазишоков завихренности [31, 47], аналогичных блинообразным структурам завихренности в трёхмерном случае.

Для того чтобы более детально исследовать связь между спектром энергии и моментами поля скорости, было выполнено дополнительно 30 численных расчётов на решётках с общим числом узлов 1024^3 для 30 начальных течений, взятых как суперпозиция сдвигового потока (45) и случайного периодического возмущения

$$\omega_p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} [\mathbf{A}_{\mathbf{h}} \cos(\mathbf{h}\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\mathbf{h}} \sin(\mathbf{h}\mathbf{r})]. \quad (49)$$

Здесь $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ — вектор с целыми компонентами $|h_j| \leq 2$, $j = x, y, z$, а векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{h}}$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{h}}$ действительных случайных коэффициентов с нулевым средним и стандартным отклонением $\sigma_{\mathbf{h}}^2 \sim \exp(-|\mathbf{h}|^2)$ удовлетворяют условиям ортогональности $\mathbf{h}\mathbf{A}_{\mathbf{h}} = \mathbf{h}\mathbf{B}_{\mathbf{h}} = 0$, необходимым для самосогласования. Начальные условия выбираются как смесь течений (45) и (49):

$$\omega_0(\mathbf{r}) = (1 - p) \omega_{\text{sh}}(\mathbf{r}) + p R \omega_p(\mathbf{r}), \quad (50)$$

где p — коэффициент смешивания, $R = \sqrt{4\pi^3/E_p}$ — коэффициент перенормировки. Здесь $4\pi^3$ и E_p — энергии сдвигового потока (45) и возмущения (49) в ящике интегрирования $[-\pi, \pi]^3$, так что коэффициент R перенормирует возмущение к той же энергии, что и у сдвигового потока. Были выполнены три группы экспериментов: с $p = 1$ (случайные периодические течения), $p = 0,1$ и $p = 0,02$ — для 10 случайных реализаций начальных течений для каждой группы.

Для первой группы экспериментов со случайными периодическими потоками ни одна из десяти симуляций не показала степенного интервала для спектра энергии или для моментов скорости. Для второй группы ($p = 0,1$) все десять симуляций демонстрируют степенной интервал для спектра энергии, и в шести из десяти симуляций для моментов скорости возникает степенной интервал; интервалы достигают $2 \leq k \leq 20$ для спектра и $0,3 \leq r \leq 0,8$ для моментов. Третья группа, с $p = 0,02$, показывает степенные интервалы как для спектра, так и для моментов для всех десяти симуляций; интервалы достигают $2 \leq k \leq 40$ и $0,15 \leq r \leq 0,8$ соответственно. Для всех симуляций нижняя граница r_l степенной области $r_l \leq r \leq r_h$ для моментов (если эта область существует) связана с верхней границей k_h степенной области $k_l \leq k \leq k_h$ для спектра как $r_l \approx 2\pi/k_h$. Верхняя граница r_h примерно соответствует волновому числу $2\pi/r_h \approx 6$.

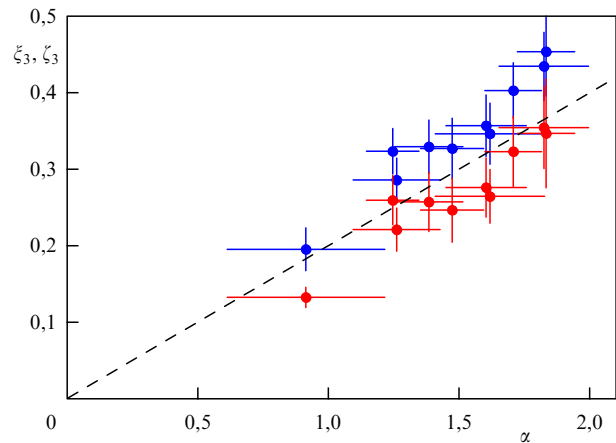


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Показатели ξ_3 (синий) и ζ_3 (красный) для степенного скейлинга продольных и поперечных моментов третьего порядка в зависимости от показателя α скейлинга спектра энергии; 10 симуляций из третьей группы экспериментов с $p = 0,02$. Горизонтальными и вертикальными отрезками показаны стандартные отклонения, пунктирная чёрная линия показывает соотношение $\xi_3 = \zeta_3 = \alpha/5$ [40].

Для третьей группы экспериментов наблюдается степенной скейлинг $E_k \propto k^{-\alpha}$ для спектра энергии с показателем α между 0,9 и 1,8; для большинства симуляций показатель α близок к 1,6. Показатели ξ_3 и ζ_3 , описывающие степенной скейлинг моментов скорости $[M_{\parallel}^{(3)}(r)]^{1/3} \propto r^{\xi_3}$ и $[M_{\perp}^{(3)}(r)]^{1/3} \propto r^{\zeta_3}$, принимают значения $0,2 \leq \xi_3 \leq 0,45$ и $0,13 \leq \zeta_3 \leq 0,35$. Продольные показатели оказываются несколько большими, чем поперечные, $\xi_3 \gtrsim \zeta_3$, и большинство из десяти моделей демонстрирует ξ_3 вблизи 0,35 и ζ_3 вблизи 0,25. Как видно из рис. 8, симуляции, имеющие больший показатель α , показывают большие показатели ξ_3 и ζ_3 , и наоборот, с приближённым соотношением для продольного показателя

$$\xi_3 \simeq \frac{\alpha}{5}. \quad (51)$$

Отметим, что такое соотношение не может быть получено из фурье-анализа. Действительно, приращение скорости, удовлетворяющее $\delta v \propto r^{\zeta}$ в физическом пространстве, имеет скейлинг $\delta v_k \propto k^{-\zeta-1}$ в фурье-пространстве, что приводит к спектру энергии $E_k \propto k^{-2\zeta-1}$. Соотношения $\zeta = \alpha/5$ и $\zeta = (\alpha - 1)/2$ пересекаются только в одной точке: $\alpha = 5/3$, $\zeta = 1/3$.

Одной из главных функций, указывающих на перемежаемость, является распределение $\mathcal{P}(\omega)$ абсолютного значения завихренности. Эволюция этой функции для начальных данных I_1 показана на рис. 9. Распределение при увеличении максимальной завихренности со временем имеет сильно нерэлеевскую форму с так называемым тяжёлым хвостом, распространяющимся на большие значения завихренности. Значение второго локального максимума завихренности (показано на рис. 9 пунктирной вертикальной линией) оказывается значительно меньше первого, что позволяет изучить распределение завихренности внутри изолированной блинообразной области, соответствующей глобальному максимуму завихренности. В локальном ортонормированном базисе $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m + a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + a_3 \mathbf{w}_3$ блина модуль завихренности может быть описан с помощью квадратичного

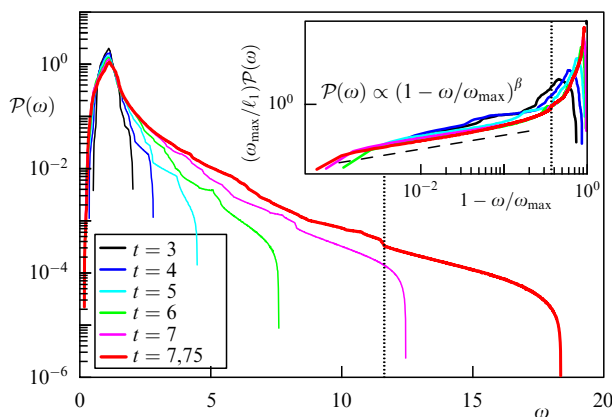


Рис. 9. (В цвете онлайн.) Распределение завихренности для симуляции I_1 . На вставке представлено нормированное распределение в зависимости от $(1 - \omega/\omega_{\max})$. Вертикальная пунктирная линия показывает второй локальный максимум завихренности, а штриховая линия на вставке — скейлинг $\mathcal{P}(\omega) \propto (1 - \omega/\omega_{\max})^\beta$ с $\beta = 0,6$ [40].

приближения [36],

$$\frac{|\omega(\mathbf{x})|}{\omega_{\max}} = 1 - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{a_j}{\ell_j} \right)^2 + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m|^2), \quad (52)$$

где $\mathbf{x}_m$ — позиция локального максимума, $\ell_j = (2\omega_{\max}/|\lambda_j|)^{1/2}$ — характерные размеры блина, $\ell_1 \ll \ell_2 \leq \ell_3$, а $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ и $\mathbf{w}_j$ являются собственными значениями и собственными единичными векторами матрицы (симметричной) $\partial^2|\omega|/\partial x_i \partial x_j$, вычисленной в $\mathbf{x}_m$. Используя это приближение, получаем

$$\mathcal{P}(f) \propto \left| \frac{dV}{df} \right| \propto (\ell_1 \ell_2 \ell_3) (1-f)^{1/2}, \quad f = \frac{\omega}{\omega_{\max}},$$

где $V = (4\pi/3)\ell_1 \ell_2 \ell_3 (1-f)^{3/2}$ — объём эллипсоида (52). В [36] показано, что только толщина блина ℓ_1 существенно изменяется со временем, тогда как два других размера, ℓ_2, ℓ_3 , остаются порядка единицы. Это позволяет исключить ℓ_2, ℓ_3 из соотношения выше, что даёт

$$\mathcal{P}(\omega) \propto \left(\frac{\ell_1}{\omega_{\max}} \right) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (53)$$

Отметим, что результаты рассматриваемых симуляций находятся в хорошем согласии со скейлингом (53).

5. Двумерная турбулентность: от опрокидывания к спектру Крейчнана

В 1967 году Крейчнан [62] показал, что в развитой двумерной гидродинамической турбулентности могут существовать два колмогоровских спектра, порождаемых двумя интегралами движения: энергией $E = (1/2) \int (\mathbf{v})^2 d\mathbf{r}$ и энтропией $(1/2) \int \omega^2 d\mathbf{r}$. Первый спектр соответствует постоянному потоку энергии ϵ , направленному в область малых волновых чисел (обратный каскад); этот спектр имеет ту же самую зависимость от k , что и колмогоровский спектр [2] для трёхмерной гидродинамической турбулентности. Второй спектр — спектр Крейчнана [62]

$$E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3} \quad (54)$$

соответствует постоянному потоку энтропии η в область малых масштабов (прямой каскад). Существование этих двух спектров подтверждено во многих численных экспериментах, моделирующих двумерную турбулентность при больших числах Рейнольдса (см., например, обзор [63] и приведённые там ссылки).

Вместе с тем после работы [62] в первых численных экспериментах [64] наблюдалось появление резких градиентов завихренности, соответствующих формированию скачков (квазишоков) завихренности с толщинами, малыми по сравнению с их длиной. Основываясь на таких численных наблюдениях, Саффман [65] предложил другой спектр: $E(k) \sim k^{-4}$, главный вклад в который вносят изотропно распределённые квазишоки (в этом смысле спектр Саффмана аналогичен спектру Кадомцева–Петвиашвили [66] для звуковой турбулентности). С другой стороны, вычисление фурье-образа от скачка завихренности $\omega_k \propto k^{-1}$ немедленно приводит к спектру крейчнановского типа $E(k) \sim k^{-3}$. Однако распределение, обусловленное скачком, сильно анизотропно — имеет вид джета с малым угловым раствором порядка $(kL)^{-1}$, где L — характерная длина квазишока. Подчёркнём, что для изотропных распределений скачков завихренности мы должны прийти к спектру Саффмана. Таким образом, спектры с крейчнановским поведением, порождаемые квазисингулярностями, обязаны быть анизотропными. Именно об этом свидетельствуют как аналитические аргументы, так и результаты численных экспериментов в случае вырождающейся двумерной турбулентности [31, 47, 67], когда в спектрах турбулентности анизотропия обусловлена присутствием джетов. В указанных работах был выявлен физический механизм формирования квазишоков благодаря тенденции к опрокидыванию (отметим, что такой процесс не происходит за конечное время в соответствии со строгими теоремами [68–70]). Данный механизм, как отмечалось во введении, связан со свойством вмерзновенности в жидкость векторного поля ротора завихренности $\mathbf{V} = \text{rot } \omega$, что позволяет выразить $\mathbf{V}$ в представлении, аналогичном ПВЛ (4):

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \nabla_{\mathbf{a}}) \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J},$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$ — начальное значение поля $\mathbf{B}$, J — якобиан преобразования $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, уравнение для которого имеет тот же вид, что и (2), $\mathbf{v}_n$ в этом случае — нормальная компонента по отношению к полю $\mathbf{B}$. Как и в предыдущем случае трёхмерных уравнений Эйлера в ПВЛ (4), якобиан J может принимать произвольные значения.

Следует отметить, что в двумерной гидродинамике есть только тенденция к образованию резких градиентов завихренности в виде квазишоков, что подтверждено в численных экспериментах для вырождающейся (свободной) турбулентности [31, 47, 71]. В частности, возрастание максимума величины B в этих экспериментах составляло 2–2,5 порядка (рис. 10), а пространственное распределение $|\mathbf{B}|$ концентрировалось в окрестности линий (положений квазишоков), между которыми величины $|\mathbf{B}|$ были значительно меньше (см., например, рис. 11 в разделе 5.2).

На стадии формирования квазишоков, как было выяснено в численных экспериментах [72] с высоким пространственным разрешением, максимальное значение ротора завихренности $B_{\max}$ экспоненциально возрастает во

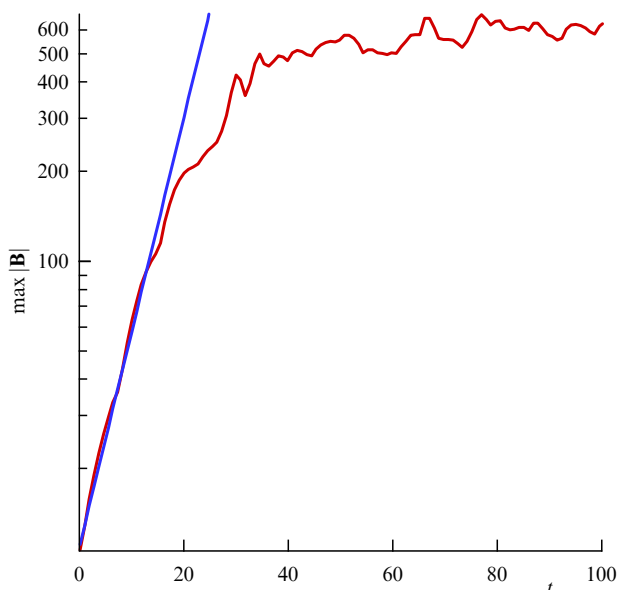


Рис. 10. (В цвете онлайн.) Максимальное значение $|B|$ как функция времени (логарифмическая шкала, прямая линия соответствует экспоненциальному росту) [47].

времени, при этом толщина $\ell(t)$ максимальной области в поперечном направлении к вектору B сужается во времени (рис. 12а в разделе 5.2) также экспоненциально. Важно отметить, что этот процесс аналогичен формированию трёхмерных вихревых структур блинного типа [52].

В спектре энергий каждому такому квазишоку соответствовал свой джет [31, 47, 67]. Вдоль каждого джета распределение энергии убывало по крейчнановскому закону $E \sim k^{-3}$. Первые результаты численных экспериментов по двумерной турбулентности прямого каскада, т.е. при наличии накачки и затухания, были представлены в [45]. Накачка, задаваемая инкрементом $\Gamma(k)$, была сосредоточена в области малых k с сильным (сингулярным при $k=0$) затуханием, обеспечивающим подавление обратного каскада. При больших волновых числах, в области с $k = k_0 \sim (2/3)k_{\max}$, вводилось затухание вязкого типа, которое позволяло одновременно решить проблему алиазинга. На малых временах развитие турбулентности в инерционном интервале соответствовало картине вырождающейся турбулентности с формированием квазишочков и соответственно джетов в спектре турбулентности. В этих экспериментах на начальном этапе происходит формирование крейчнановской зависимости спектра от k ($E \sim k^{-3}$) при всех углах, а также зависимости продольной структурной функции скорости третьего порядка $S_3 = \langle \delta v_{\parallel}^3 \rangle$ от расстояния между точками r с сильной анизотропией, характерной для вырождающейся турбулентности. При этом усреднённый по углам спектр $E(k) = C_K \eta^{2/3} k^{-3}$, где $C_K \simeq 1,3$ — константа Крейчнана, совпадал со спектром, полученным ранее численно (см. [63]).

Важно подчеркнуть, что для структурной функции S_3 усреднение по углам давало результат, сильно отличающийся от изотропного значения. Анализ результатов свидетельствовал в пользу того, что причина такого различия кроется в недостаточно высоком пространственно-временном разрешении (наши первые эксперименты проводились на сетке 4096×4096 точек). В связи с этим пространственное разрешение нами было увеличено до

16384×16384 точек и примерно вдвое увеличено время счёта по сравнению с таковым в лучших экспериментах [45]. Основное отличие полученных результатов состоит в том, что на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ ($\Gamma_{\max}^{-1}$ — характерное время накачки, обратно пропорциональное максимальному инкременту) в прямом каскаде происходит разрушение джетовой структуры спектров и турбулентность стремится к изотропной. В частности, на этих временах не наблюдается какой-либо заметной анизотропии угловых флуктуаций спектра энергии (при фиксированном k). В режиме изотропного распределения нами найдена функция распределения вероятности P как для завихренности, так и для модуля di-vorticity B . Структура $P(\omega)$ соответствует предсказаниям изотропной теории [73].

5.1. Основные уравнения и численная схема

Кратко остановимся на уравнениях движения и численной схеме, которые полностью совпадают с приведёнными в [45]. Уравнение движения (1) для двумерных течений, зависящих только от координат x, y в плоскости течения, записываются только для одной z -компоненты ω :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \omega = \hat{I} \omega + \hat{\gamma} \omega. \quad (55)$$

В правую часть этого уравнения введены два ответственных за накачку и затухание слагаемых, позволяющих моделировать турбулентность, в частности прямой каскад, который на начальном этапе формируется благодаря появлению квазишочков завихренности. В отсутствие правой части, ответственной за накачку и затухание, завихренность ω представляет собой лагранжев инвариант, переносимый жидкостью со скоростью $\mathbf{v}$. Именно такая ситуация реализуется в режиме вырождающейся двумерной турбулентности.

Для моделирования прямого каскада двумерной гидродинамической турбулентности правая часть (55) содержит два оператора: оператор $\hat{I}$ описывает накачку, а также диссипацию на больших масштабах, чтобы исключить обратный каскад, а оператор $\hat{\gamma}$ ответствен за диссипацию энтропии при больших k . Оба эти оператора задавались через их фурье-образы (см. [45]):

$$\Gamma_k = A \frac{(b^2 - k^2)(k^2 - a^2)}{k^2} \quad \text{при } 0 \leq k \leq b,$$

$$\Gamma_k = 0 \quad \text{при } k > b,$$

$$\gamma_k = 0 \quad \text{при } k \leq k_c,$$

$$\gamma_k = -\nu(k - k_c)^2 \quad \text{при } k > k_c.$$

При численном интегрировании уравнения (55) для моделирования прямого каскада параметры a и b выбирались из условия наиболее быстрого выхода системы на стационарный режим в области малых k . В разделах 5.2 и 5.3 приведены результаты интегрирования с $A = 0,004$, $a = 3$ и $b = 6$. Для затухания вязкого типа, обеспечивающего поглощение энтропии, коэффициент вязкости $\nu = 1,5$, $k_c = 0,6k_{\max}$ с $k_{\max} = 8192$, что одновременно решало проблему алиазинга. Начальные условия были теми же самыми, что и в работах [45, 47]. Максимальный размер сетки составлял 16384×16384 .

Численное моделирование уравнения (55) как для вырождающейся турбулентности, так и для прямого каскада осуществлялось в квадратном ящике с размером $L = 1$ с периодическими граничными условиями.

5.2. Формирование складок

Представим теперь результаты численного интегрирования двумерного уравнения Эйлера (при нулевой правой части (55)) для ротора завихренности, или di-vorticity:

$$B_x = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Вектор $\mathbf{B}$, как видно из его определения, направлен по касательной к изолинии $\omega(x, y) = \text{const}$. Отсюда следует, что возрастание $|\mathbf{B}|$ приводит к появлению скачка $\omega(x, y)$ в направлении, перпендикулярном $\mathbf{B}$. Таким образом, формирование квазишоков завихренности соответствует росту di-vorticity $\mathbf{B}$. Как уже говорилось выше, возрастание $|\mathbf{B}|$ в экспериментах [31, 47, 71] составляло 2–2,5 порядка. При этом $\mathbf{B}$ концентрировался в окрестности линий, т.е. происходило формирование квазиодномерных структур. Возрастание $|\mathbf{B}|$ обусловлено уменьшением якобиана J , что обуславливает сжимаемость непрерывно распределённых линий di-vorticity и соответственно тенденцию к опрокидыванию, в результате чего происходит формирование квазишоков завихренности.

На рисунке 11, взятом из [72], приведена структура $|\mathbf{B}|$ при $t = 12$. В качестве начальных условий использовались два набора вихрей гауссовой формы с положительной и отрицательной завихренностью (равной по модулю 1) и нулевой общей завихренностью. Размер каждой пары выбирался случайным образом в диапазоне 0,2–0,6, расположение вихрей тоже было случайным. Для того чтобы более точно определить поле $\mathbf{B}$ и его геометрические характеристики (положения максимумов, продольные и поперечные размеры квазишоков и т.д.), в [72] рассматривалось большее, чем в предыдущих работах [31, 47, 71], число вихрей, а именно восемь (четыре поло-

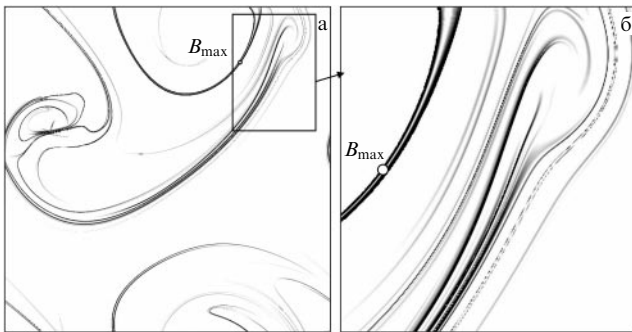


Рис. 11. Распределение $|\mathbf{B}|$ при $t = 12$ [72].

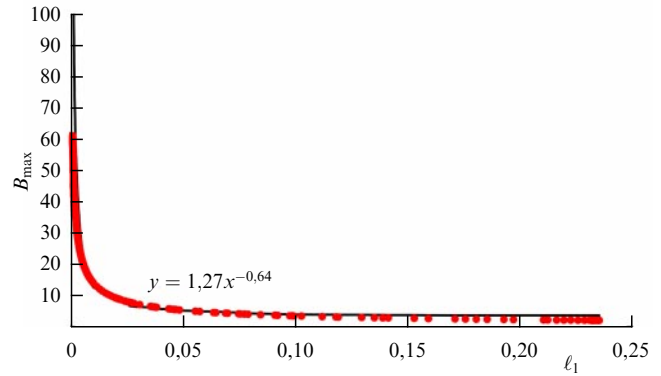


Рис. 13. Зависимость максимума ротора завихренности от толщины ℓ_1 . Кругами показаны численные результаты, кривая соответствует степенной зависимости $B_{\max} \sim \ell_1^{-2/3}$ [72].

жительных и четыре отрицательных). Вставка на рис. 11 показывает, что между максимальными линиями ротора завихренности значения $|\mathbf{B}|$ существенно меньше максимальных. Для завихренности этому соответствуют террасы со ступеньками переменной высоты. Каждая из таких ступенек представляет собой квазиударную волну завихренности.

На рисунке 12а показана зависимость максимального значения ротора завихренности от времени, которая показывает, что $B_{\max}$ возрастает экспоненциально. Ширина полосы области максимального B при этом сужается во времени также экспоненциально (рис. 12б). Две временные экспоненты дают степенную зависимость $B_{\max}$ от ширины полосы ℓ_1 : $B_{\max} = C\ell_1^\alpha$ с показателем $\alpha = 0,16/(-0,25) = -0,64 \approx -2/3$, C — константа (рис. 13). Следует отметить, что эта зависимость $B_{\max}$ от ℓ_1 в виде закона $2/3$ была подтверждена также для других начальных условий (напомним, что положение вихрей и их размеры были случайными). Это дало основание считать, что указанное соотношение можно рассматривать как универсальное, соответствующее формированию складки.

5.3. Статистические особенности двумерной турбулентности

В случае вырождающейся турбулентности опрокидывание является доминирующим процессом, приводящим к сильной анизотропии спектров турбулентности из-за наличия джетов, порождаемых квазишоками [31, 47, 71]. Этот процесс оказывается самым быстрым для прямого

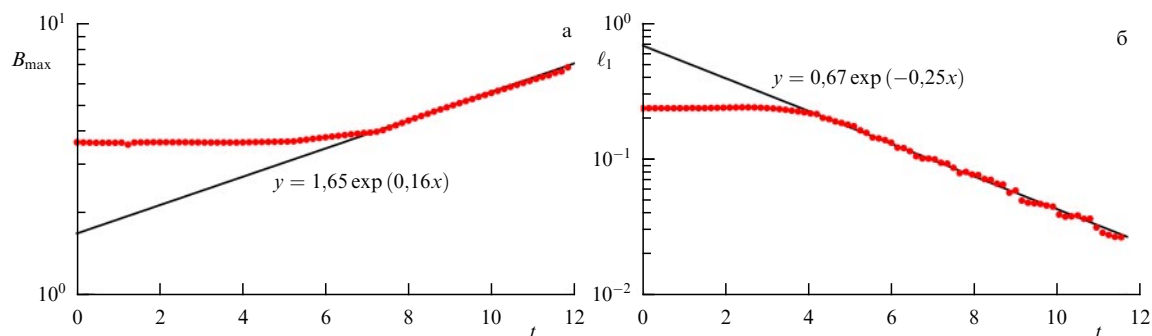


Рис. 12. Зависимости от времени максимума ротора завихренности (а) и ширины полосы ℓ_1 (б), масштаб логарифмический. Круги соответствуют численным результатам, а линии — экспонентам [72].

каскада даже при наличии накачки, в результате чего спектр турбулентности, как показывают численные эксперименты [46], приобретает практически с самого начала степенную зависимость от волнового числа k с крейчнановским показателем: $E_k \sim k^{-3}$ (см. оригинальную работу Крейчнана [62]). При этом формирование квазишоков завихренности носит экспоненциальный характер; в соответствии с этим области максимального ротора завихренности сужаются в направлении, перпендикулярном линиям постоянной завихренности. Как показывает численный эксперимент [31, 45, 47, 71], для типичных начальных условий возрастание величины ротора завихренности составляет 2–2,5 порядка, а поперечный размер максимальных областей $\mathbf{B}$ существенно уменьшается. Объяснение этого роста связано с возможностью частичного интегрирования уравнения (5) в терминах отображения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J},$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$ — начальное значение поля $\mathbf{B}$, представляющее собой аналог инварианта Коши. Напомним, что аналогичная формула для трёхмерного уравнения Эйлера является основной для ПВЛ [24, 51]. Ключевым здесь для понимания является сжимаемость поля ротора завихренности — возможность обращения J в нуль. Как известно, опрокидывание в газовой динамике возникает за счёт сжимаемости газа. При подходе к точке опрокидывания происходит формирование квазидвумерных каустик (см., например, [43]). Аналогично формируются и квазишоки завихренности.

Во всех численных экспериментах при моделировании как вырождающейся турбулентности, так и прямого каскада начальное распределение завихренности выбиралось в виде 10 положительных и 10 отрицательных вихрей гауссовой формы с одинаковым значением модуля максимальной завихренности, равным единице, и общей нулевой завихренностью. Положения и ширины вихрей были случайными. В режиме прямого каскада на начальном этапе для времён порядка обратного инкремента накачки $\Gamma_{\max}^{-1}$ турбулентность развивается примерно по тому же сценарию, что и в случае вырождающейся турбулентности [47]: формируются квазисингулярные распределения ротора завихренности, которым в k -пространстве соответствуют джеты, что приводит к сильной анизотропии турбулентности.

На рисунке 14 показано типичное распределение $|\mathbf{B}|$, которое максимально сосредоточено на линиях (положениях квазишоков). Между этими линиями $|\mathbf{B}|$ значительно меньше. Соответственно в спектре наблюдаются джеты (с малым или большим перекрытиями), как результат, спектр турбулентности имеет большую анизотропную составляющую.

На рисунке 15 представлено распределение в $\mathbf{k}$ -пространстве плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^{-4} . На каждом луче в инерционном интервале величина $\epsilon(\mathbf{k})k^4$ в заданный момент времени по k сильно флуктуирует, а после усреднения в интервале $(k - \Delta k/2, k + \Delta k/2)$ является практически постоянной (см. рис. 3 в работе [46]).

Важно отметить, что формирование крейчнановской зависимости от модуля k происходит на самой первой

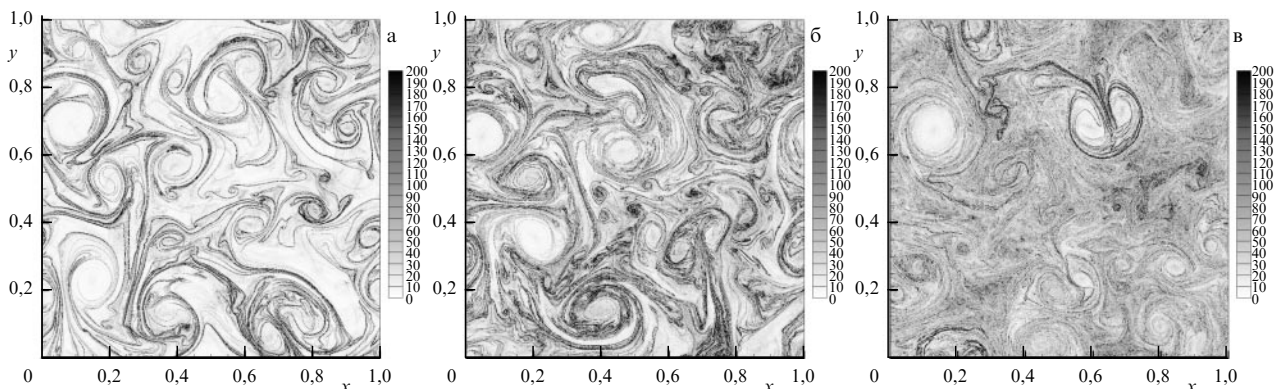


Рис. 14. Распределение модуля $|\mathbf{B}|$ при $t = 150, 250, 450$ [46].

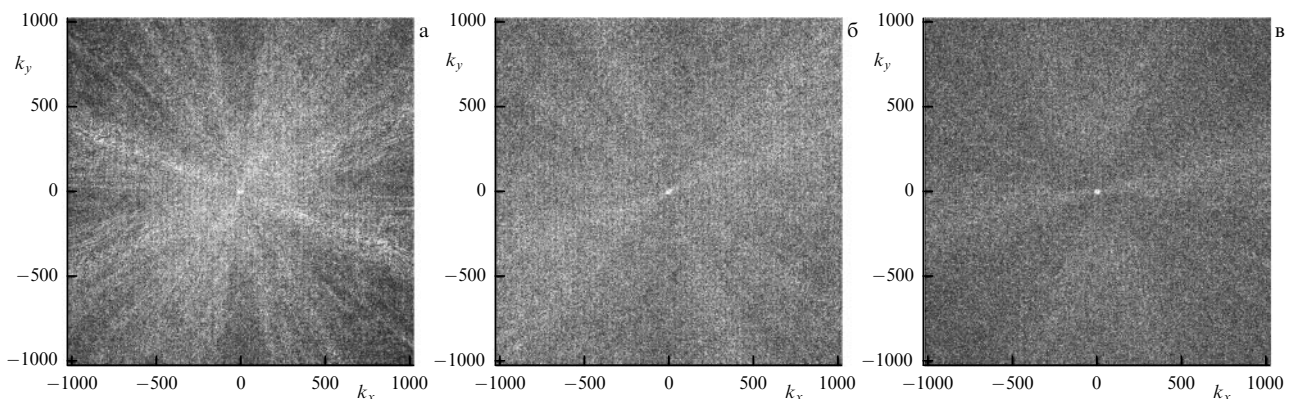


Рис. 15. Распределение плотности энергии флуктуаций $\epsilon(\mathbf{k})$, нормированной на k^{-4} , при $t = 150, 250, 450$ [46].

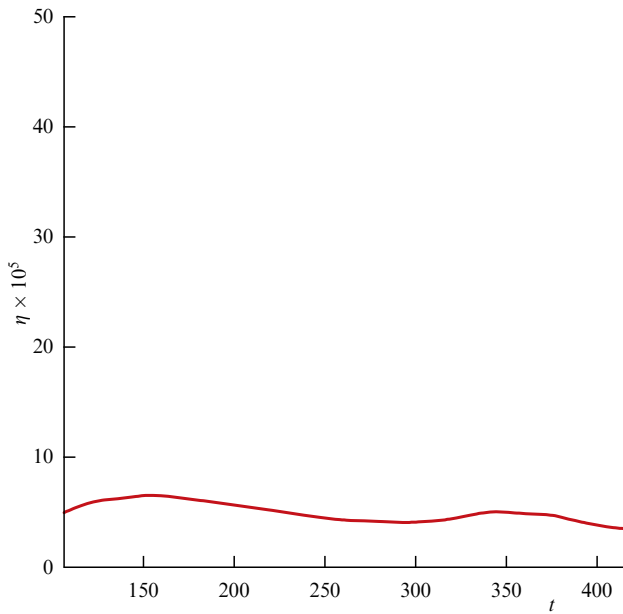


Рис. 16. Временная зависимость потока энтропии η [46].

стадии развития прямого каскада, когда перекачка энтропии достигает "вязкой" области. В соответствии с оценками [46] время этой стадии порядка обратного инкремента $\Gamma_{\max}^{-1}$ (для численного эксперимента, представленного в этом разделе, — порядка 50). На данной стадии спектр энергий существенно зависит от угла. Удивительным оказывается то, что после усреднения по углам спектр $E(k)$, имея крэйчнановские зависимости как от k , так и от потока энтропии η , определяемого как $(1/2) \int \gamma(k) |\omega_k|^2 dk$, даёт значение константы Крэйчнана $C_K \simeq 1,3$, совпадающее с полученным ранее в численных экспериментах (см. [63]). На следующей стадии линии квазишоков становятся более запутанными (турбулентными) (рис. 14б), расстояние между ними сокращается и, как результат, анизотропия в спектре уменьшается (рис. 15б). Наконец, на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ джеты практически исчезают (рис. 14в и 15в) и турбулентность в прямом каскаде становится почти изотропной. Выясняется также, что на всех временах, начиная с появления джетов и кончая их исчезновением, поток энтропии во

времени почти постоянен (рис. 16). Причём полная энергия достаточно быстро — уже на первой стадии — становится постоянной, чего нельзя сказать о полной энтропии. Последняя приближается к постоянному значению только на стадии изотропизации [46].

Другим свидетельством изотропизации турбулентности на временах порядка $10\Gamma_{\max}^{-1}$ является найденная нами функция распределения вероятности завихренности P (рис. 17), которая при больших аргументах имеет экспоненциальный хвост с показателем β , линейно зависящим от завихренности ω , в соответствии с предсказанием изотропной теории [73]. Согласно этим предсказаниям угол наклона показателя порядка $\bar{\omega}_{\text{rms}}^{-1}$, где $\bar{\omega}_{\text{rms}}$ — среднеквадратичное значение флуктуаций завихренности. Численный эксперимент (рис. 17а) даёт асимптотику $P = 0,0005 \exp(-2,3\omega)$ при $\bar{\omega}_{\text{rms}} = 0,43$. Если вычислять поток энтропии как интеграл $\eta = (1/2) \int \gamma |\omega_k|^2 dk$, то $\bar{\omega}_{\text{rms}} = 0,15$. Вычисление $\bar{\omega}_{\text{rms}}$ с помощью найденной функции распределения даёт значение 0,2566. Таким образом, с точностью до величин порядка единицы значения $\bar{\omega}_{\text{rms}}$ оказываются близкими друг к другу.

Соответствующая функция распределения P для значения B имеет также две характерные области (рис. 17б): в первой функция распределения близка к пуассоновской, $\sim B \exp(-B^2/B_0^2)$, во второй области, при больших значениях B , P имеет экспоненциальное поведение с более отчётливой линейной зависимостью показателя от B , чем аналогичная для завихренности. Для данного численного эксперимента B_{rms} по наклону равно 88 (см. [46]). Если вычислять B_{rms} по функции распределения $P(B)$, то это значение равно 84,6.

6. Заключение

Основной вывод настоящей статьи состоит в том, что как в трёхмерной, так и в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости на стадии зарождения турбулентности при больших числах Рейнольдса главную роль играют когерентные вихревые структуры, эволюция которых обусловлена сжимаемостью соответствующих полей, несмотря на их бездивергентность. В трёхмерном случае это структуры блинного типа со скейлингом колмогоровского типа — соотношением между максимальной

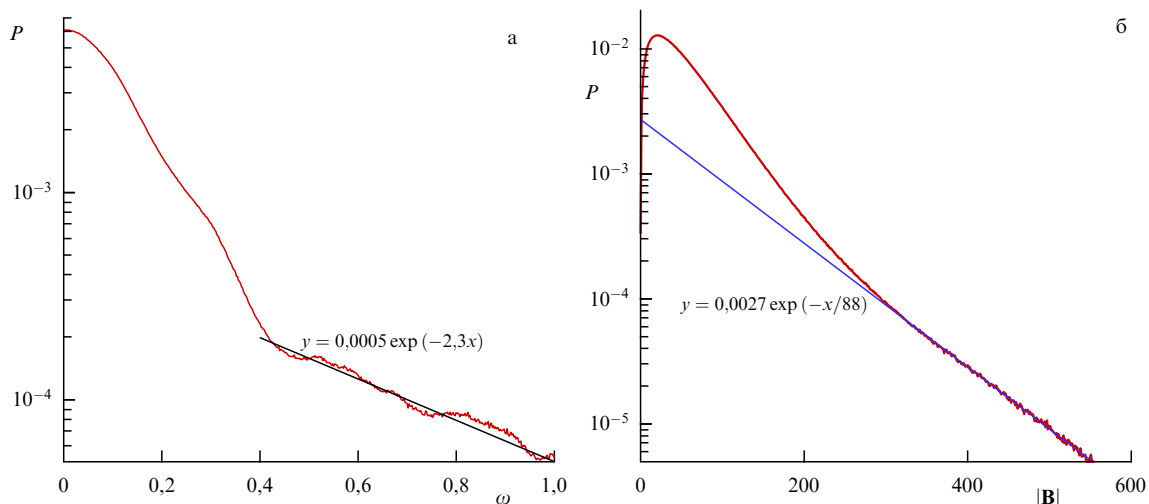


Рис. 17. (В цвете онлайн.) (а) Функция распределения вероятности для завихренности, (б) функция распределения вероятности для di-vorticity при $t = 450$ [46].

завихренностью и толщиной блина $\omega_{\max} \sim \ell^{-2/3}$. Сжатие подобных структур имеет экспоненциальный характер и может быть интерпретировано как процесс опрокидывания, аналогичный формированию ударных волн в газодинамике благодаря сжимаемости газа.

Мы показали, используя комбинированный аналитико-численный подход, основанный на представлении вихревых линий, что скейлинг для структур блинного типа возникает за счёт учёта трёхмерности этих структур. Скорость при этом демонстрирует гёльдеровское поведение, что используется некоторыми математиками для построения теории трёхмерной турбулентности.

Для двумерной турбулентности выяснено, что формирование прямого каскада — каскада Крейчана с постоянным потоком энтропии — обусловлено появлением квазишоков завихренности из-за сжимаемости поля ротора завихренности. Этот процесс оказывается самым быстрым, в результате чего спектр турбулентности прямого каскада приобретает практически с самого начала степенную зависимость от волнового числа k с крейчановским показателем. Но спектр турбулентности на данном этапе оказывается сильно анизотропным за счёт джетов — фурье-образов квазишоков. На следующем, более медленном, этапе происходит усложнение (турбулизация) структуры линий квазишоков. Расстояния между ними сокращаются, а спектр становится более изотропным. Важно отметить, что в изотропном состоянии у функции распределения вероятности завихренности при больших аргументах ω формируется экспоненциальный хвост с показателем, который может быть экстраполирован в виде линейной зависимости от завихренности в соответствии с теоретическим предсказанием работы [73] для двумерной изотропной турбулентности.

В статье представлены также результаты по двухточечным структурным функциям (моментам) скорости. Несмотря на сильную анизотропию, присущую (нестационарной) задаче на стадии зарождения трёхмерной гидродинамической турбулентности, происходит формирование степенного скейлинга как для продольных, так и для поперечных моментов в том же интервале масштабов, что и для спектра энергии. Показатели степени структурных функций обладают теми же ключевыми свойствами, что и для развитой (стационарной) турбулентности. В частности, показатели нетривиально зависят от порядка момента, указывая на перемежаемость и аномальный скейлинг, а продольные показатели оказываются несколько большими, чем поперечные. На основе анализа результатов симуляции при различных начальных условиях найдена достаточно грубая оценка для $\xi_3 \simeq \alpha/5$, связывающая показатели скейлинга для продольного момента третьего порядка и спектра энергии. Таким образом, когда спектр энергии имеет степенной скейлинг, близкий к колмогоровскому, продольный момент третьего порядка показывает близкий к линейному скейлинг с расстоянием, совместимый с законом 4/5 Колмогорова (см. (44)).

Необходимо отметить, что перед усреднением по углам моменты третьего порядка демонстрируют сильно анизотропное поведение, хотя линейный скейлинг, полученный после усреднения по углам, можно проследить для большинства направлений. Распределение завихренности характеризуется сильно нерэлеевской формой, что также указывает на перемежаемость. Степенной скейлинг (53) для хвоста этого распределения имеет

показатель $\beta \gtrsim 1/2$, что указывает на нетривиальную геометрию блинообразных структур завихренности. Отметим также, что структурные функции скорости третьего порядка для двумерной турбулентности, обладая большой анизотропией из-за квазишоков завихренности, имеют, тем не менее, такую же степенную зависимость от координат, что и в изотропном случае.

В заключение хотелось бы отметить, что растущие экспоненциально на стадии зарождения турбулентности квазиодномерные структуры своим возникновением обязаны свойству вмерзновенности соответствующих полей. Классическим примером вмерзновенных полей является магнитное поле в МГД в отсутствие омической диссипации. Известный пример формирования магнитных филаментов в приближении кинематического динамо с заданным полем скорости при нулевой магнитной вязкости, рассмотренный впервые Паркером [74] в 1963 г. применительно к конвективной зоне Солнца, свидетельствует о том, что возрастание магнитного поля также носит экспоненциальный во времени характер. В случае кинематического приближения для уравнения индукции возникновение филаментов происходит в областях с гиперболическим профилем скорости [75].

Работа Д.С.А., Е.А.К. и Е.В.С. поддержана Российским научным фондом (грант 17-01-00622). Численные эксперименты выполнялись в информационно-вычислительном центре Новосибирского государственного университета и дата-центре Института фундаментальной и прикладной математики (ИМРА, Рио-де-Жанейро). Д.С.А. благодарен за поддержку со стороны ИМРА во время визитов в Бразилию. Авторы благодарят С.Н. Гурбатова за полезные замечания.

Список литературы

1. Richardson L F *Proc. R. Soc. Lond. A* **110** 709 (1926)
2. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941); Пер. на англ. яз.: Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)
3. Обухов А М *ДАН СССР* **32** 22 (1941)
4. Zakharov V E, L'vov V S, Falkovich G *Kolmogorov Spectra of Turbulence. I Wave Turbulence* (Berlin: Springer, 1992)
5. Zakharov V E *Stud. Appl. Math.* **122** 219 (2009)
6. Suret P, Picozzi A, Randoux S *Opt. Exp.* **19** 17852 (2011)
7. Picozzi A et al. *Phys. Rep.* **542** 1 (2014)
8. Walczak P, Randoux S, Suret P *Phys. Rev. Lett.* **114** 143903 (2015)
9. Agafontsev D S, Zakharov V E *Nonlinearity* **28** 2791 (2015)
10. Agafontsev D S, Zakharov V E *Nonlinearity* **29** 3551 (2016)
11. Gelash A A, Agafontsev D S *Phys. Rev. E* **98** 042210 (2018)
12. Agafontsev D S, Randoux S, Suret P *Phys. Rev. E* **103** 032209 (2021)
13. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **182** 569 (2012); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **55** 535 (2012)
14. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **40** 1087 (1997)
15. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
16. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag, 1989)
17. Kuznetsov E A, Mikhailov A V *Phys. Lett. A* **77** 37 (1980)
18. Moreau J J C.R. *Hebdomadaires Séances Acad. Sci.* **252** 2810 (1961)
19. Moffatt H K J. *Fluid Mech.* **35** 117 (1969)
20. Арнольд В И *УМН* **24** 225 (1969)
21. Кузнецов Е А *Письма в ЖЭТФ* **76** 406 (2002); Kuznetsov E A *JETP Lett.* **76** 346 (2002)
22. Yakubovich E I, Zenkovich D A, in *Progress in Nonlinear Science: International Conference Dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov* Vol. 2 (Ed. A G Litvak) (Nizhny Novgorod: Inst. of Applied Physics, Univ. of Nizhny Novgorod, 2002) p. 282; physics/0110004
23. Frisch U, Villone B *Eur. Phys. J. H* **39** 325 (2014)

24. Кузнецов Е А, Рубан В П *Письма в ЖЭТФ* **67** 1015 (1998); Kuznetsov E A, Ruban V P *JETP Lett.* **67** 1076 (1998)
25. Кузнецов Е А, Рубан В П *ЖЭТФ* **118** 893 (2000); Kuznetsov E A, Ruban V P *JETP* **91** 775 (2000)
26. Арнольд В И *Теория катастроф* (М.: Знание, 1981); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Catastrophe Theory* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
27. Yakubovich E I, Zenkovich D A *J. Fluid Mech.* **443** 167 (2001)
28. Kuznetsov E A *J. Nonlin. Math. Phys.* **13** 64 (2006)
29. Brachet M E et al. *J. Fluid Mech.* **194** 333 (1988)
30. Weiss J *Physica D* **48** 273 (1991)
31. Kuznetsov E A et al. *Phys. Fluids* **19** 105110 (2007)
32. Hasimoto H *J. Fluid Mech.* **51** 477 (1972)
33. Захаров В Е, Тахтаджян Л А *ТМФ* **38** 26 (1972); Zakharov V E, Takhtadzhyan L A *Theor. Math. Phys.* **38** 17 (1979)
34. Chae D, in *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations* (Vol. 4, Eds C M Dafermos, M Pokorny) (Oxford: Elsevier, 2008) p. 1
35. Gibbon J D *Physica D* **237** 1894 (2008)
36. Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *Phys. Fluids* **27** 085102 (2015)
37. Агафонцев Д С, Кузнецов Е А, Майлыбаев А А *Письма в ЖЭТФ* **104** 695 (2016); Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *JETP Lett.* **104** 685 (2016)
38. Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *J. Fluid Mech.* **813** R1 (2017)
39. Brachet M E et al. *Phys. Fluids A* **4** 2845 (1992)
40. Агафонцев Д С, Кузнецов Е А, Майлыбаев А А *Письма в ЖЭТФ* **110** 106 (2019); Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *JETP Lett.* **110** 121 (2019)
41. Kuznetsov E A, Passot T, Sulem P L *Phys. Plasmas* **11** 1410 (2004)
42. Kuznetsov E A *J. Fluid Mech.* **600** 167 (2008)
43. Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Rev. Mod. Phys.* **61** 185 (1989)
44. Гурбатов С Н, Саичев А И, Шандарин С Ф *УФН* **182** 233 (2012); Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Phys. Usp.* **55** 223 (2012)
45. Kuznetsov E A, Sereshchenko E V *Письма в ЖЭТФ* **102** 870; *JETP Lett.* **102** 760 (2015)
46. Кузнецов Е А, Серешченко Е В *Письма в ЖЭТФ* **105** 70 (2017); Kuznetsov E A, Sereshchenko E V *JETP Lett.* **105** 83 (2017)
47. Кудрявцев А Н, Кузнецов Е А, Серешченко Е В *Письма в ЖЭТФ* **96** 783 (2012); Kudryavtsev A N, Kuznetsov E A, Sereshchenko E V *JETP Lett.* **96** 699 (2012)
48. Кузнецов Е А "Опрокидывание вихревых линий как предтеча развитой колмогоровской турбулентности", *Научная школа "Нелинейные волны 2016"* Нижний Новгород, 27 февраля – 4 марта 2016, лекция; Агафонцев Д С, Кузнецов Е А, Майлыбаев А А, в сб. *Нелинейные волны 2016* (Отв. ред. А М Сергеев, А В Слоняев) (Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2017) с. 304
49. Кузнецов Е А "Сжимаемые структуры в несжимаемой гидродинамике и их роль в зарождении турбулентности", *Научная школа "Нелинейные волны 2018"*, Нижний Новгород, 26 февраля – 4 марта 2018, лекция; Кузнецов Е А и др., в сб. *Нелинейные волны 2018* (Отв. ред. А Г Литвак, А В Слоняев) (Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019) с. 238
50. Salmon R *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20** 225 (1988)
51. Kuznetsov E A, Ruban V P *Phys. Rev. E* **61** 831 (2000)
52. Agafontsev D S, Kuznetsov E A, Mailybaev A A *Phys. Fluids* **30** 095104 (2018)
53. Frisch U *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Пер. на русск. яз.: Фриш У *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: Фазис, 1998)
54. Orlandi P, Pirozzoli S *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** 247 (2010)
55. Holm D D, Kerr R M *Phys. Rev. Lett.* **88** 244501 (2002)
56. Cichowlas C et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 264502 (2005)
57. Holm D D, Kerr R M *Phys. Fluids* **19** 025101 (2007)
58. Brachet M E et al. *Phys. Fluids A* **4** 2845 (1992)
59. Ishihara T, Gotoh T, Kaneda Y *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41** 165 (2009)
60. Gotoh T, Fukayama D, Nakano T *Phys. Fluids* **14** 1065 (2002)
61. Зыбин К П, Сирота В А *УФН* **185** 593 (2015); Zybin K P, Sirota V A *Phys. Usp.* **58** 556 (2015)
62. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **10** 1417 (1967)
63. Boffetta G, Ecke R E *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44** 427 (2012)
64. Lilly D K *J. Fluid Mech.* **45** 395 (1971)
65. Saffman P G *Stud. Appl. Math.* **50** 377 (1971)
66. Кадомцев Б Б, Петвиашвили В И *ДАН СССР* **208** 794 (1973); Kadomtsev B B, Petviashvili V I *Sov. Phys. Dokl.* **18** 115 (1973)
67. Кузнецов Е А *Письма в ЖЭТФ* **80** 92 (2004); Kuznetsov E A *JETP* **80** 83 (2004)
68. Wolibner W *Math. Z.* **37** 698 (1933)
69. Kato T *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** 188 (1967)
70. Юдович В И *Журн. вычислительной математики и математической физики* **3** 1032 (1963); Yudovich V I *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **3** 01407 (1963)
71. Kuznetsov E A et al. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24** 253 (2010)
72. Кузнецов Е А, Серешченко Е В *Письма в ЖЭТФ* **109** 231 (2019); Kuznetsov E A, Sereshchenko E V *JETP Lett.* **109** 239 (2019)
73. Falkovich G, Lebedev V *Phys. Rev. E* **83** 045301 (2011)
74. Parker E N *Astrophys. J.* **138** 552 (1963)
75. Кузнецов Е А, Михайлов Е А *ЖЭТФ* **158** 561 (2020); Kuznetsov E A, Mikhailov E A *JETP* **131** 496 (2020)

Compressible vortex structures and their role in the onset of hydrodynamic turbulence

D.S. Agafontsev^(1,2,a), E.A. Kuznetsov^(2,3,4,b), A.A. Mailybaev^(5,c), E.V. Sereshchenko^(2,6,d)

⁽¹⁾ Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Nakhimovskii prosp. 36, 117997 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ Skolkovo Institute of Science and Technology, Bolshoi bul'var 30, str. 1, 121205 Skolkovo, Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

⁽⁴⁾ Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation

⁽⁵⁾ Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, CEP 22460-320, Brasil

⁽⁶⁾ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya 4/1, 630090 Novosibirsk, Russian Federation

E-mail: ^(a) dmitrij@itp.ac.ru, ^(b) kuznetso@itp.ac.ru,

^(c) alexei@impa.br, ^(d) s_evgeniy@yahoo.com

We study the formation of quasi-two-dimensional (thin pancake) vortex structures in three-dimensional flows and of quasi-one-dimensional structures in two-dimensional hydrodynamics. These structures are formed at large Reynolds numbers, when their evolution is described in the leading order by the Euler equations for an ideal incompressible fluid. We show numerically and analytically that the compression of these structures and, as a consequence, the increase in their amplitudes are due to the compressibility of the frozen-in-fluid fields: the field of continuously distributed vortex lines in the three-dimensional case and the field of vorticity rotor lines (divorticity) for two-dimensional flows. We find that the growth of vorticity and divorticity can be considered to be a process of overturning the corresponding fields. At high intensities, this process demonstrates a Kolmogorov-type scaling relating the maximum amplitude to the corresponding thicknesses-to-width ratio of the structures. The possible role of these coherent structures in the formation of the Kolmogorov turbulent spectrum, as well as in the Kraichnan spectrum corresponding to a constant flux of enstrophy in the case of two-dimensional turbulence, is analyzed.

Keywords: vortex lines, divorticity, overturning, turbulence, frozen-in-fluid fields

PACS numbers: **47.10. – g, 47.27. – i, 47.32. – y**

Bibliography — 75 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (2) 205–225 (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.11.038875>

Received 31 August 2020

Physics – Uspekhi **65** (2) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.11.038875>