

лисом (А. Millis), Б. Паннетье (В. Pannetier) и Э. Сера (Е. Serret).

Список литературы

1. Steane A *Rep. Prog. Phys.* **61** 117 (1998)
2. Ekert A, Jozsa R *Rev. Mod. Phys.* **68** 733 (1996)
3. Shor P W, in *Proc. of the 35th Annual IEEE Symp. on the Foundations of Computer Science* (Eds S Goldwasser) (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Soc. Press, 1994) p. 124
4. Grover L K, in *Proc. of the 28th Annual ACM Symp. on the Theory of Computing: STOC, May 1996* (New York: ACM Press, 1996) p. 212
5. Shor P W *Phys. Rev. A* **52** R2493 (1995)
6. Preskill J *Proc. R. Soc. London Ser. A* **454** 385 (1998)
7. Wen X G, Niu Q *Phys. Rev. B* **41** 9377 (1990)
8. Wen X G *Phys. Rev. B* **44** 2664 (1991)
9. Anderson P W *Mater. Res. Bull.* **8** 153 (1973); Fazekas P, Anderson P W *Philos. Mag.* **30** 23 (1974)
10. Anderson P W *Science* **235** 1196 (1987); Read N, Chakraborty B *Phys. Rev. B* **40** 7133 (1989); Read N, Sachdev S *Phys. Rev. Lett.* **66** 1773 (1991); Kivelson S *Phys. Rev. B* **39** 259 (1989)
11. Misguich G et al. *Phys. Rev. B* **60** 1064 (1999)
12. Moessner R, Sondhi S L *Phys. Rev. Lett.* **86** 1881 (2001)
13. Kitaev A Yu *Ann. Phys. (New York)* **303** 2 (2003); quant-ph/9707021
14. Ioffe L B et al. *Nature* **415** 503 (2002)
15. Senthil T, Fisher M P A *Phys. Rev. Lett.* **86** 292 (2001)
16. Senthil T, Fisher M P A *Phys. Rev. B* **63** 134521 (2001)
17. Balents L, Fisher M P A, Girvin S M, cond-mat/0110005
18. Paramekanti A, Balents L, Fisher M P A, cond-mat/0203171
19. Misguich G, Serban D, Pasquier V *Phys. Rev. Lett.* **89** 137202 (2002); cond-mat/0204428
20. Motrunich O I, Senthil T, cond-mat/0205170
21. Fendley P, Moessner R, Sondhi S L *Phys. Rev. B* **66** 214513 (2002); cond-mat/0206159
22. Ioselevich A, Ivanov D A, Feigelman M V *Phys. Rev. B* **66** 174405 (2002)
23. Ioffe L B, Feigel'man M V *Phys. Rev. B* **66** 224503 (2002)
24. Douçot B, Feigel'man M V, Ioffe L B *Phys. Rev. Lett.* **90** 107003 (2003)
25. Blatter G, Geshkenbein V B, Ioffe L B *Phys. Rev. B* **63** 174511 (2001)
26. Douçot B, Vidal J *Phys. Rev. Lett.* **88** 227005 (2002)
27. Fazio R, van der Zant H *Phys. Rep.* **355** 235 (2001)
28. Fradkin E *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Redwood City, CA: Addison-Wesley Publ. Co., 1991)
29. Douçot B, Ioffe L B, Vidal J, cond-mat/0302104

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.15. -i, 42.70. -a

Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления

В.Г. Веселаго

В последние несколько лет стал бурно развиваться новый раздел электродинамики — электродинамика материалов с отрицательным преломлением. Первые эксперименты в этой области [1, 2] были сделаны группой физиков из университета Сан-Диего (США). В этих работах были продемонстрированы необычные электродинамические свойства некоторых композитных материалов. Эти свойства чисто формально могут быть объяснены, если принять, что данные материалы обладают отрицательным коэффициентом преломления n . Сами по себе эти материалы представляют собой совокупность небольших металлических элементов, которые расположены в пространстве в строгом геометрическом

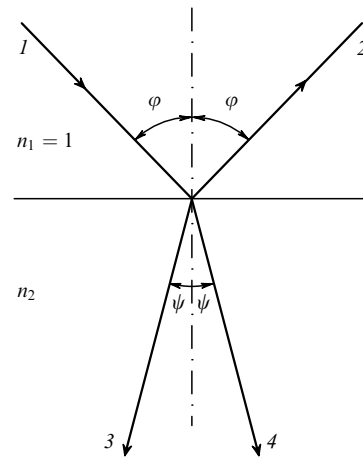


Рис. 1. Преломление света на границе двух сред. Путь 1–4 соответствует ходу падающего и преломленного лучей для случая $n_2 > 0$, а путь 1–3 — для случая $n_2 < 0$.

порядке и образуют структуру, напоминающую своего рода кристалл. Такого рода структуру можно рассматривать как сплошную для длин волн, заметно превосходящих размер составляющих ее элементов и расстояние между ними. Эксперименты, проведенные авторами указанных работ, были сделаны в сантиметровом диапазоне длин волн, а сами элементы исследованных композитов и расстояние между ними имели характерный размер порядка 7–10 мкм.

Ключевым экспериментальным результатом явилась демонстрация для таких материалов довольно необычной реализации закона преломления Снеллиуса. На рисунке 1 изображен переход луча света через плоскую границу раздела двух сред с коэффициентами преломления n_1 и n_2 , соответственно. Если, без нарушения общности, положить $n_1 = 1$, то привычный ход луча при преломлении соответствует пути 1–4. В экспериментах, проведенных в Сан-Диего, луч шел по пути 1–3. Такой путь преломленного луча будет удовлетворять закону Снеллиуса, если положить, что $n_2 < 0$. При этом сам закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (1)$$

не испытывает изменений.

Для материалов с $n < 0$ характерна необычная реализация не только закона Снеллиуса, но и ряда других явлений электродинамики и оптики, в частности эффектов Доплера и Черенкова, формул Френеля, принципа Ферма. Основы электродинамики материалов с отрицательным коэффициентом преломления достаточно полно изложены, в частности, в работах [3–6]. В этих работах было показано, что вещества с отрицательным коэффициентом преломления характеризуются также отрицательными значениями диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной проницаемости μ . Существенно, что все эти утверждения относятся к изотропным материалам, для которых величины n , ϵ и μ — скаляры.

Отрицательное значение n соответствует также тому факту, что в таких материалах направление волнового вектора \mathbf{k} и вектора Пойнтинга \mathbf{S} антипараллельны или, что то же самое, антипараллельны направления фазовой и групповой скоростей.

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать уравнения Максвелла и выражение для вектора Пойнтинга для случая однородных плоских волн в изотропной среде:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] &= \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \\
 [\mathbf{k} \times \mathbf{H}] &= -\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}, \\
 \mathbf{S} &= [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Легко видеть, что одновременная смена знака ε и μ переводит правую тройку векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} в левую. Именно поэтому в англоязычной литературе такие материалы называются left-handed materials, сокращенно LHM.

Таким образом, можно утверждать, что изотропные среды, у которых значения ε и μ оба являются отрицательными, обладают отрицательным преломлением, или, что то же самое, отрицательным значением n , и у них фазовая и групповая скорости направлены антипараллельно. Правильно и обратное утверждение: если изотропный материал обладает отрицательным значением показателя преломления n , то он должен быть охарактеризован одновременно отрицательными значениями ε и μ , а фазовая и групповая скорости для него будут иметь противоположные направления.

Следует заметить, что сам факт противоположно направленных фазовой и групповой скоростей не является чем-то новым. Он, в частности, обсуждался еще в работе Л.И. Мандельштама [7]. Кроме того, давно известны электронные устройства (например, лампы обратной волны, ЛОВ), в которых фазовая скорость противоположна направлению потока энергии. В последнее время очень интенсивно обсуждаются свойства так называемых фотонных кристаллов [8], в которых также может быть реализована противоположная направленность векторов \mathbf{k} и \mathbf{S} . Однако фотонные кристаллы в общем случае являются существенно анизотропными материалами и не могут быть охарактеризованы скалярным коэффициентом преломления n . Это же относится и к устройствам типа ЛОВ.

Появление веществ с отрицательным значением n ставит очень важный вопрос: в какой мере для случая $n < 0$ справедливы все те законы и формулы электродинамики, оптики и смежных технических наук, в которые

входит величина коэффициента преломления n ? Можем ли мы всегда рассчитывать на правильный результат при прямой замене $n \rightarrow -n$, как это имеет место в случае закона Снеллиуса? В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Это обусловлено тем, что большинство законов и формул электродинамики и оптики соответствуют случаю, когда тот или иной материал заведомо немагнитен, и характеризуется магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Применение такого "немагнитного приближения" ведет к тому, что многие формулы, в которые изначально входит μ , при подстановке $\mu = 1$ кардинально меняются и оказываются верными только в этом немагнитном приближении. Нижеследующая таблица поясняет имеющуюся ситуацию.

Из таблицы видно, что существует три группы физических законов и эффектов, формулировки которых по-разному меняются при переходе от формул немагнитного приближения к точным выражениям.

К первой группе законов относится закон Снеллиуса и эффекты Доплера и Черенкова. В соответствующих формулах обычно применяемое в немагнитном приближении выражение $n = \sqrt{\varepsilon}$ просто должно быть заменено на $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, причем если и ε , и μ оба отрицательны, то перед n тоже должен быть знак "минус".

Ко второй группе относятся законы отражения и преломления света, и, в частности, формулы Френеля. В этих формулах при переходе от немагнитного приближения к точным формулам величину $n = \sqrt{\varepsilon}$ следует заменять не на $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, а на $\sqrt{\varepsilon/\mu} = 1/z$, где z — волновое сопротивление среды $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Волновое сопротивление имеет размерность Ом и является уникальной характеристикой каждой среды, наряду со скоростью света в ней. Из таблицы видно, что при отходе от немагнитного приближения существенно меняется, в частности, условие отсутствия отражения света на плоской границе раздела двух сред. Это условие состоит не в равенстве показателей преломления двух сред, а в равенстве их волновых сопротивлений. Важно подчеркнуть, что при отрицательных значениях ε и μ волновое сопротивление z , в отличие от величины n , остается положительным.

И, наконец, к третьей группе соотношений, зависящих от n и существенно меняющихся при переходе от немагнитного приближения к точным формулам, относится, в частности, формула для угла Брюстера $\tan \varphi = n$. Точное выражение для угла Брюстера приведено в последней строке таблицы. Важно отметить, что под-

Таблица

Физический закон	Немагнитное приближение	Точная формула
Закон Снеллиуса, эффекты Доплера и Черенкова $n = \sqrt{\varepsilon} \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, если $\varepsilon, \mu < 0$, то $n < 0$	$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$	$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}$
Формулы Френеля $n = \sqrt{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$	$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}$	$r_{\perp} = \frac{z_2 \cos \varphi - z_1 \cos \psi}{z_2 \cos \varphi + z_1 \cos \psi}$
Коэффициент отражения при нормальном падении света на границу раздела	$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$	$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$
Условие отсутствия отражения	$n_1 = n_2$	$z_1 = z_2$
Закон Брюстера	$\tan \varphi = n$	$\tan \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}}$

коренное выражение в этой точной формуле не меняется при одновременной смене знаков ε и μ одной из сред. Необходимо помнить, что приведенная в таблице формула для угла Брюстера соответствует одной определенной поляризации света. Для другой, перпендикулярной к ней поляризации, формула получается из приведенной в таблице путем замены $\varepsilon \rightarrow \mu$ и $\mu \rightarrow \varepsilon$ в подкоренном выражении. Таким образом, отражение под углом Брюстера имеет место всегда, при любых значениях проницаемостей, но только для одной из двух возможных поляризаций падающего света.

Введение в научный оборот понятия "отрицательный коэффициент преломления" уточняет также формулировку такого фундаментального принципа, как принцип Ферма. Этот вопрос подробно рассмотрен в недавней публикации [9], где показано, что правильной формулировкой принципа Ферма, пригодной для распространения электромагнитной волны сквозь материалы с показателем преломления n любого знака, является требование экстремальности суммарной длины оптического пути:

$$\delta L = \delta \int n \, dl = 0. \quad (3)$$

Интегрирование в этом выражении (которое является, по сути дела, эйконалом) производится по реальному пути распространения луча света. Такой подход предусматривает, что длина оптического пути, пройденного электромагнитной волной в среде с отрицательным значением n , также является отрицательной. Из этого, в частности, следует, что в некоторых случаях полная суммарная длина оптического пути может быть отрицательной и даже нулевой, хотя, конечно, геометрическая длина пути, по которому распространяется свет, и само время распространения света отнюдь не равны нулю.

Именно такая ситуация имеет место при распространении света сквозь плоскопараллельную пластину, выполненную из материала с $\varepsilon = \mu = n = -1$. Такая пластина, как это видно из рис. 2, способна фокусировать в точку излучение, выходящее из точечного источника, расположенного по другую сторону пластины. Из рисунка 2 видно, что путь Am , пройденный светом от источника до пластины, и путь nB от пластины до изображения в сумме равны пути mn , который свет проходит внутри пластины:

$$Am + nB = mn. \quad (4)$$

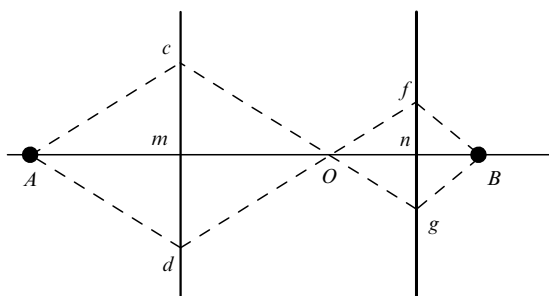


Рис. 2. Распространение света от объекта A к изображению B через плоскопараллельный слой вещества с $\varepsilon = \mu = n = -1$, расположенный в вакууме.

Подобного рода соотношение действительно и для любого другого возможного пути распространения света, например $AcgB$ или $AdfB$. Но так как внутри пластины коэффициент преломления $n = -1$, а снаружи $n = +1$, то суммарная оптическая длина для света, идущего из точки A в точку B , будет, в соответствии с выражением (3), равна нулю для любого возможного пути распространения. В то же время, как уже говорилось, само время распространения света из точки A в точку B существенно отличается от нуля.

Факт фокусировки точечного источника света также в точку, расположенную по другую сторону пластины, не означает, что эта пластина является линзой. Такая пластина является идеальным оптическим прибором, который переносит изображение предмета из пространства объектов в пространство изображений без всяких искажений. Но такой перенос возможен только для предметов, отнесенных от пластины на расстояние не больше, чем толщина пластины. Пластина заведомо не может сфокусировать в точку параллельный пучок лучей, приходящий из бесконечности. Тем не менее свойства такой пластины бесспорно интересны и могут иметь практическое значение.

При общей оценке свойств материалов с отрицательным коэффициентом преломления нужно иметь в виду, что эти материалы с неизбежностью должны обладать частотной дисперсией. Действительно, если ε и μ оба отрицательны, то при отсутствии дисперсии полная энергия вещества, равная

$$W = \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2, \quad (5)$$

будет отрицательной. Однако при наличии частотной дисперсии выражение (5) записывается несколько иначе:

$$W = \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} \mathbf{E}^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} \mathbf{H}^2. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что производные $\partial(\mu\omega)/\partial\omega$ и $\partial(\varepsilon\omega)/\partial\omega$ будут положительны, если выбрать закон частотной дисперсии для ε и μ в достаточно общем виде:

$$\mu = 1 - \frac{A_m^2}{\omega^2}, \quad (7)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{A_e^2}{\omega^2}. \quad (8)$$

Если положить

$$A_e^2 = A_m^2 = A^2 > \omega^2, \quad (9)$$

то показатель преломления будет отрицательным, а фазовая

$$v_{ph} = \frac{c}{1 - A^2/\omega^2}$$

и групповая

$$v_{gr} = \frac{c}{1 + A^2/\omega^2}$$

скорости будут связаны соотношением

$$\frac{c}{v_{ph}} + \frac{c}{v_{gr}} = 2. \quad (10)$$

При распространении волн в среде с отрицательной дисперсией мы должны выбрать перед волновым вектором \mathbf{k} знак минус. Однако в средах с поглощением вектор \mathbf{k} имеет не только действительную, но и мнимую часть. Появление этой мнимости обусловлено появлением мнимости в выражениях для ε и μ . Возникает вопрос: следует ли изменять знак перед мнимой частью волнового вектора, если меняется знак перед его действительной частью?

Запишем выражения для ε и μ в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \mu = \mu' + i\mu'' . \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что при малом затухании выражение для \mathbf{k} будет иметь вид

$$k = k' + ik'' = \sqrt{(\varepsilon' + i\varepsilon'')(\mu' + i\mu'')} \approx \sqrt{\varepsilon'\mu'} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{\mu''}{\mu'} \right) \right] . \quad (12)$$

Из формулы (12) легко видеть, что сама по себе смена знака у действительных частей ε и μ не влечет за собой автоматической смены знака у мнимой части волнового вектора. Для смены знака мнимой части волнового вектора необходимо сменить знак у мнимых частей ε и μ , что соответствует переходу от вещества с положительным поглощением к веществу с отрицательным поглощением, как это имеет место, например, в квантовых усилителях. Такой переход в общем случае никак не связан с возможным переходом от обычных веществ с положительным преломлением к веществам с отрицательным преломлением.

Оценка значимости нового понятия "вещество с отрицательным преломлением" существенно зависит от того, можем ли мы реально иметь такие вещества. Этот вопрос возник у нас еще при публикации работ [3, 4]. Мы в свое время затронули заметные усилия для получения материала с отрицательным преломлением на основе магнитного полупроводника CdCr_2Se_4 , однако эти усилия не увенчались успехом из-за существенных технологических трудностей, которые характеризуют синтез этого материала. Сейчас также, наверное, неуместно говорить об экзотической смеси электрических и магнитных зарядов, свойства которой были нами рассмотрены в [5].

Резкий перелом наступил, как это уже указывалось в начале настоящего доклада, тогда, когда в работах [1, 2] было сообщено о создании композитного материала, который мог характеризоваться отрицательными значениями ε и μ , и, тем самым, отрицательным значением n . Этот материал состоял из многих медных стерженьков и колечек, расположенных в строгом геометрическом порядке. Стерженьки, по сути дела, являлись антеннами, которые реагировали на электрическое поле, а колечки были антеннами, которые реагировали на магнитное поле. Размеры этих элементов и расстояние между ними были менее длины волны, а вся система в целом обладала отрицательными эффективными значениями ε и μ .

В работе [2] был изложен результат прямого измерения угла преломления для призмы, приготовленной из данного композита, и этот эксперимент показал полную справедливость для данного материала соотношения (1)

при отрицательном n . В дальнейшем эти эксперименты были повторены еще по крайней мере двумя независимыми группами исследователей [10, 11] с тем же положительным результатом.

Появление нового класса веществ с несколько необычной электродинамикой привело к тому, что в литературе был высказан ряд утверждений, обоснованность которых вызывает возражения. Так, в работе [12] утверждается, что отрицательное преломление имеет место только для фазовой скорости, а групповая скорость при всех обстоятельствах подчиняется обычному закону преломления с положительным значением n . Авторы этой работы не смущает тот факт, что различие в направлениях фазовой и групповой скорости есть типичная особенность оптически анизотропных сред, которые заведомо не могут характеризоваться скалярным значением показателя преломления. Ошибка авторов [12] обусловлена тем, что они путают направление групповой скорости с направлением перпендикуляра к поверхности постоянной амплитуды при распространении в среде модулированных по амплитуде волн. Эта ошибка достаточно подробно рассмотрена и разъяснена в работе [13].

Есть еще один вопрос, который возник в тесной связи с появлением веществ с отрицательным преломлением. Это проблема преодоления дифракционного предела, или, что то же самое, но по несколько другой терминологии, проблема усиления так называемых "эванесцентных мод". Впервые эта проблематика была поднята в работе Пендри [14], где утверждалось, что в материалах с отрицательным преломлением могут успешно распространяться волны, для которых компонента k_z волнового вектора вдоль направления распространения является чисто мнимой:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 < 0 . \quad (13)$$

Это неравенство выполняется для очень больших k_x , т.е. для очень коротких волн.

В материалах с положительным значением n амплитуда таких волн (эванесцентных мод) в соответствии с (13) экспоненциально быстро затухает вдоль оси z , и именно это обстоятельство объясняет невозможность отображения оптическими системами объектов с размерами заметно меньшими, чем длина волны. Однако в работе [14] и во множестве последовавших за ней статей утверждалось, что в материалах с отрицательным преломлением волны с большими величинами k_x не ослабевают, а усиливаются. Это утверждение эквивалентно выбору в соотношении

$$k_z = \pm i \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (14)$$

перед мнимым корнем знака $-$, а не $+$, как это делается в обычных случаях. Автор [14] ввел понятие "суперлинза" для устройства, подобного изображенному на рис. 2, утверждая, что для этого устройства отсутствует классическое ограничение на дифракционный предел.

Наверное наиболее убедительное доказательство ошибочности подобного рода утверждений можно найти в [15], где путем электронного моделирования показано, что распространение эванесцентных мод для

случая отрицательного n возможно только на расстояниях, много меньших длины волны, как и в обычном случае. Однако это не исключает необходимости полного прояснения особенностей распространения таких мод в случае отрицательных n .

Мы сейчас находимся в самом начале пути, который ведет нас в новую, весьма интересную и перспективную область электродинамики. Число исследователей, групп и организаций, связанных с данной тематикой, стремительно растет. Точно так же растет и число публикаций в данной области. Интересующиеся могут найти очень подробную подборку соответствующих работ в Интернете по адресу http://physics.ucsd.edu/~drs/left_home.htm. Работы автора [3–6] можно найти на русском и английском языках по адресу <http://zhurnal.ape.relarn.ru/~vgv>.

Примечание при корректуре

На недавно прошедшем в Арлингтоне (США) семинаре по материалам с отрицательным преломлением было доложено о получении композитных материалов, способных работать на частотах до 300 Гц. Там же был представлен доклад о первых опытах по созданию

композитного магнитного материала с размером отдельного элемента порядка 35 мкм.

Список литературы

1. Smith D R et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184 (2000)
2. Shelby R A, Smith D R, Schultz S *Science* **292** 77 (2001)
3. Веселаго В Г *ФТТ* **8** 3571 (1966)
4. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967)
5. Веселаго В Г *ЖЭТФ* **52** 1025 (1966)
6. Veselago V G, in *Polaritons: Proc. of 1st Taormina Research Conf. on the Structure of Matter, 2–6 Oct. 1972, Taormina, Italy* (Eds E Burstein, F De Martini) (New York: Pergamon Press, 1974) p. 5
7. Мандельштам Л И *ЖЭТФ* **15** 475 (1945)
8. Notomi M *Opt. Quantum Electron.* **34** 133 (2002)
9. Веселаго В Г *УФН* **172** 1215 (2002)
10. Parazzoli C G et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 107401 (2003)
11. Houck A A, Brock J B, Chuang I L *Phys. Rev. Lett.* **90** 137401 (2003)
12. Valanju P M, Walser R M, Valanju A P *Phys. Rev. Lett.* **88** 187401 (2002)
13. Pendry J B, Smith D R, cond-mat/0206563
14. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
15. Rao X S, Ong C K, cond-mat/0304474