

## Лазерные солитоны: топологические и квантовые эффекты

Н.А. Веретенев, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров

*Представлен обзор свойств диссипативных солитонов с различной размерностью и различными топологическими характеристиками в лазерах и лазерных системах с насыщающимся поглощением. В отличие от консервативных солитонов, лазерные солитоны являются аттракторами, повышенная устойчивость которых вызвана балансом притока и оттока энергии. Топология лазерных солитонов определяется их сложной внутренней структурой, задаваемой полем потоков энергии излучения, причём энергетические характеристики служат важным дополнением топологических характеристик. Уравнение их динамики — обобщённое уравнение Гинзбурга–Ландау — отражает базовые черты открытых нелинейных систем различной природы. Топологические особенности солитонов расширяют круг проявлений их квантовых флуктуаций.*

**Ключевые слова:** солитоны диссипативные, лазерные, топологические, многомерные; квантовые флуктуации

PACS numbers: 42.50.Lc, **42.55. – f**, **42.65. – k**, 42.65.Tg

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.11.038869>

## Содержание

1. Введение (143).
  2. Базовые модели и уравнения (144).
  3. Режимы с однородным распределением интенсивности (146).
  4. Одномерные структуры (146).
    - 4.1. Бесконечная односвязная апертура. 4.2. Кольцевая апертура.
  5. Двумерные структуры (152).
    - 5.1. Солитоны с осесимметричным распределением интенсивности. 5.2. Неосесимметричные солитоны и солитонные комплексы. 5.3. Поляризационные сингулярности.
  6. Схема с внешним когерентным сигналом (156).
  7. Трёхмерные структуры (159).
    - 7.1. Вихревые линии. 7.2. Светлые топологические солитоны. 7.3. Гистерезисные явления. 7.4. Трубочатые солитоны.
  8. Тёмные топологические солитоны (165).
  9. Квантовые флуктуации (167).
    - 9.1. Лазерные уравнения Гейзенберга – Ланжевена. 9.2. Линеаризованное уравнение Гейзенберга – Ланжевена. 9.3. Численное моделирование.
  10. Дополнительные факторы (173).
  11. Заключение (174).
- Список литературы (174).

## 1. Введение

Пространственные, временные и пространственно-временные оптические солитоны, распыление которых при распространении компенсируется нелинейной фокусировкой [1, 2], обладают интересными частицеподобными свойствами и являются перспективными для ряда прикладных задач. Немаловажно, что в настоящее время именно оптические солитоны исследуются, на наш взгляд, наиболее интенсивно, чему способствует быстрое развитие лазерной физики и техники. Обычно солитоны разделяют, в зависимости от значимости диссипативных факторов, на два обширных класса: консервативные [1, 3] и диссипативные [4, 5]. Солитоны первого класса реализуются в схемах с пренебрежимо слабыми потерями, величина которых и ограничивает время жизни солитонов. В диссипативных солитонах потери уравниваются притоком энергии извне, так что они существуют до тех пор, пока такой приток не прекращается. Радикальное различие между солитонами этих двух классов состоит в том, что консервативные солитоны обладают сплошным спектром основных параметров, тогда как для диссипативных ввиду дополнительного требования баланса притока и оттока энергии такой спектр дискретен (так называемое классическое квантование [6]). Поэтому под действием даже слабых флуктуаций характеристики консервативного солитона непрерывно дрейфуют, значительно удаляясь от исходных за длительное время. В тех же условиях основные характеристики диссипативного солитона лишь слабо флуктуируют около их фиксированных значений. Таким образом, диссипативные солитоны гораздо более устойчивы и менее восприимчивы к шумам по сравнению с консервативными.

В настоящее время имеется значительное число обзоров, тематических выпусков журналов и монографий, в

Н.А. Веретенев<sup>(а)</sup>, Н.Н. Розанов<sup>(б)</sup>, С.В. Федоров<sup>(в)</sup>  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
ул. Политехническая 26, 194021 Санкт-Петербург,  
Российская Федерация  
E-mail: <sup>(а)</sup> torrek@gmail.com, <sup>(б)</sup> nnrosanov@mail.ru,  
<sup>(в)</sup> sfedorov2006@bk.ru

Статья поступила 18 августа 2020 г.,  
после доработки 14 ноября 2020 г.

которых в той или иной мере изложены результаты исследований диссипативных оптических солитонов в различных схемах [5, 7–24]. Прикладная значимость таких солитонов проявляется сейчас наиболее ярко для микро-резонаторов на модах шепчущей галереи [25, 26] и волоконных лазеров [27, 28]. В настоящем обзоре мы сосредоточимся, главным образом, на одном их варианте, в котором солитоны были предсказаны около 30 лет тому назад [29, 30], — широкоапертурном лазере или лазерной среде с насыщающимся поглощением. Важным условием существования лазерных солитонов является наличие бистабильности в системе: имеются как минимум два состояния с равномерным распределением интенсивности по апертуре, так что солитон может быть интерпретирован как островок одного из состояний на фоне другого. Ещё одно конструктивное уточнение, позволяющее сравнительно легко находить диссипативные оптические солитоны при численном моделировании, связано с понятием волн переключения, или фронтов между двумя указанными состояниями. Для оптики характерно наличие дифракционных осцилляций интенсивности излучения на фронтах; эти осцилляции при сближении фронтов на расстояние, сравнимое с шириной фронта, останавливают их сближение или удаление, что и означает формирование солитона [31].

В действительности лазерная схема переносится и на случай неравновесных бозе-конденсатов, например, экситон-поляритонных [32]. Минимизируя повторение содержащихся в монографиях выводов, мы уделим в обзоре большее внимание наиболее интересным, на наш взгляд, современным направлениям в этой области, а именно, прежде всего, топологическим эффектам для лазерных солитонов с различной геометрической размерностью, а также квантовым флуктуациям таких солитонов. Действительно, топологические эффекты в физике, в частности в оптике, изучаются сейчас чрезвычайно интенсивно. Необходимо отметить, что так называемая топологическая фотоника имеет дело преимущественно с топологией оптической среды, связанной с особенностями зонной структуры этой среды [33–37]. Однако для нас интерес здесь будет представлять топология самого излучения, т.е. эффекты топологической оптики, примыкающей к сингулярной оптике [38–40]; в нашем случае можно говорить о диссипативной нелинейной топологической оптике. В то же время значимость квантовых флуктуаций, также активно изучаемых в рамках квантовой оптики [41], в лазерных схемах обусловлена не только тем, что они определяют предельные возможности различных операций над светом, но и резким возрастанием интенсивности флуктуаций вблизи топологических особенностей излучения.

Вообще говоря, детальное описание реальных лазерных схем требует учёта многих факторов, включая распространение оптического излучения, состояние оптической среды и её отклика на излучение, а также наличие в этих схемах целого ряда дополнительных элементов. Чтобы подчеркнуть общность физики лазерных солитонов, мы примем за основу наиболее простой случай безынерционного отклика среды, когда динамика описывается единым обобщённым уравнением Гинзбурга–Ландау для огибающей поля.

В разделе 2 мы представляем основные модели рассматриваемых схем и управляющее уравнение для них. В

разделе 3 анализируются описываемые этими уравнениями простейшие — пространственно однородные — распределения поля. В разделах 4–7 последовательно представлены одномерные, двумерные и трёхмерные светлые (с конечной энергией, солитоны на фоне поля с нулевой интенсивностью) лазерные солитоны, включая анализ солитонов с поляризационными сингулярностями. Тёмные солитоны кратко рассматриваются в разделе 8. В разделе 9 приводятся квантовое уравнение Гейзенберга–Ланжевена, описывающее квантовые флуктуации светлых двумерных лазерных солитонов, и иллюстрации расчётов этих флуктуаций. Различные дополнительные факторы, в том числе требующие выхода за рамки обобщённого уравнения Гинзбурга–Ландау, перечисляются в разделе 10. В разделе 11 мы подводим итоги и обсуждаем возможные пути развития этого направления.

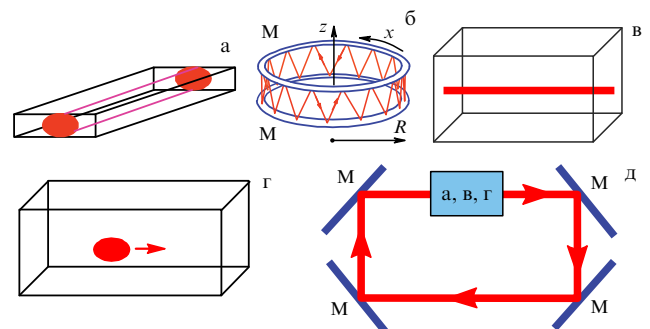
Следует отметить, что одномерные локализованные структуры излучения в неравновесной (усиливающей) среде в ряде работ (см., например, [42–45]) также назывались диссипативными солитонами. Мы не будем следовать этой терминологии ввиду заведомой неустойчивости таких структур.

## 2. Базовые модели и уравнения

Основные рассматриваемые в настоящем обзоре схемы показаны на рис. 1. В них реализуется однонаправленное распространение пакетов излучения в среде, обладающей оптической нелинейностью как показателя преломления, так и усиления и поглощения. Размерность схемы определяется числом измерений, по которым локализация излучения происходит вследствие нелинейных эффектов: 1 для схем на рис. 1а, б, 2 для схемы на рис. 1в и 3 для схемы на рис. 1г. Однопроходные схемы (рис. 1а, в, г) превращаются в многопроходные при помещении их в кольцевой резонатор (рис. 1д); для одномерной схемы многопроходовость реализуется и в схеме на рис. 1б.

Излучение считаем квазимонохроматическим и близким к плоской волне, что позволяет использовать для описания его распространения квазиоптическое приближение, или приближение медленно меняющейся огибающей, восходящее к работам Леонтовича и Фока [46, 47]. Для этого напряжённость электрического поля излучения  $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$  представляем в виде

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ eE(\mathbf{r}, t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t) \},$$



**Рис. 1.** (В цвете онлайн.) Рассматриваемые схемы. Излучение квазинепрерывное (а–в) или импульсное (г, д). Занимаемая излучением область пространства односвязная (а, в, г) и неодносвязная (б, д). М — зеркала.

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $t$  — время,  $\mathbf{e}$  — единичный орт поляризации,  $E$  — огибающая, которая изменяется медленно по сравнению с фигурирующей в этом выражении экспонентой,  $\omega_0$  — несущая частота,  $k_0$  — вещественная часть волнового числа на этой частоте,  $z$  — координата вдоль направления преимущественного распространения излучения. Среда считается матрицей с нерезонансными показателями преломления и поглощения и с внедрёнными в неё центрами, обладающими резонансным усилением и поглощением. Тогда, например, для трёхмерной схемы (рис. 1г) и излучения с фиксированной (линейной) поляризацией из уравнений Максвелла электродинамики сплошных сред вытекает следующий вид управляющего уравнения — обобщённого комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (безразмерная форма) (см., например, [5]):

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ (i + d_{\perp}) \nabla_{\perp}^2 + (i + d_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E + fE. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — поперечный лапласиан,  $x$  и  $y$  — поперечные координаты,  $\tau = t - z/v_g$  — время в сопровождающей системе координат, движущейся вдоль оси  $z$  (эволюционная переменная) с групповой скоростью  $v_g$ , "коэффициенты диффузии"  $d_{\parallel}$  и  $d_{\perp}$  находятся в интервале  $0 < d_{\perp, \parallel} \ll 1$ . При этом линейный оператор  $i\nabla_{\perp}^2$  описывает дифракцию излучения,  $d_{\perp} \nabla_{\perp}^2$  — угловую селективность потерь в среде [48, 49],  $i\partial^2/\partial \tau^2$  — частотную дисперсию показателя преломления матрицы,  $d_{\parallel} \partial^2/\partial \tau^2$  — частотную дисперсию потерь в матрице. Наконец, последний член в правой части (2.1) представляет реакцию центров на излучение; сюда же удобно включать и нерезонансное поглощение матрицы. В основном варианте считаем, что эта реакция является безынерционной и зависит лишь от интенсивности излучения  $I = |E|^2$ , т.е.  $f = f(I)$ .

В наиболее простом случае коэффициенты диффузии численно равны:  $d_{\parallel} = d_{\perp} = d$ . При этом запись (2.1) упрощается:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (i + d) \nabla_3^2 E + fE, \quad \nabla_3^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (2.2)$$

В вещественной форме для интенсивности  $I$  и фазы излучения  $\Phi = \arg E$  (2.2) представляется в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial I}{\partial z} + \nabla_3(I \nabla_3 \Phi) = I \operatorname{Re} f + d[I^{1/2} \Delta_3 I^{1/2} - I^{-1}(I \nabla_3 \Phi)^2], \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\nabla_3 \Phi)^2 - I^{-3/2} \Delta_3 I^{1/2} - \operatorname{Im} f = dI^{-1} \nabla_3(I \nabla_3 \Phi). \quad (2.4)$$

Диссипативные члены сгруппированы в правых частях этих уравнений. Соответственно консервативный предел реализуется при условиях  $\operatorname{Re} f = 0$  и  $d = 0$ . В соответствии с (2.3) величина  $S_3 = I \nabla_3 \Phi$  имеет смысл потока энергии излучения — вектора Пойнтинга в параксиальном приближении.

Начальные условия задают распределение огибающей при  $z = 0$ . Приведённые уравнения позволяют при каждом фиксированном  $z$  определить в трёхмерном пространстве  $\mathbf{r}_3 = \{x, y, \tau\}$  распределения комплексной огибающей  $E$  или вещественных интенсивности  $I$  и фазы  $\Phi$ . Фаза излучения не определена при нулевой интенсивности, что эквивалентно двум условиям:  $\operatorname{Re} E = 0$ ,

$\operatorname{Im} E = 0$ . Соответственно в пространстве  $\{x, y, z, \tau\}$  это поверхности, а в пространстве  $\mathbf{r}_3$  (фиксированное  $z$ ) — линии. При обходе такой линии в пространстве  $\mathbf{r}_3$  по замкнутому контуру в малой окрестности локально ортогональной ей плоскости фаза излучения изменяется на величину  $2\pi m$ , где целое число  $m$  — топологический заряд линии. Мы будем называть такие линии вихревыми, поскольку поток энергии в их окрестности образует вихрь. Линии потока энергии в пространстве  $\mathbf{r}_3$ , касательная к которым в каждой точке этой линии параллельна  $S_3$ , определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dl} = S_x, \quad \frac{dy}{dl} = S_y, \quad \frac{d\tau}{dl} = S_{\tau}, \quad (2.5)$$

где  $l$  — длина линии, отсчитываемая от её произвольной точки. Особым элементом динамической системы (2.5) отвечает условие  $S_3 = 0$ . Особенности возникают, во-первых, при нулевом градиенте фазы,  $\nabla_3 \Phi = 0$ . Это векторное равенство в общем случае удовлетворяется только в изолированных точках пространства  $\mathbf{r}_3$ . Во-вторых, особым элементом отвечает условие нулевой интенсивности,  $I = 0$ , или  $\operatorname{Re} E = \operatorname{Im} E = 0$ , что совпадает с уравнениями для вихревых линий.

Для сравнения с гидродинамикой интерпретируем (2.3) как уравнение непрерывности, в котором интенсивность  $I$  уподобляется плотности жидкости, градиент фазы  $\nabla_3 \Phi$  — её скорости, а вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  — плотности потока. При этом правая часть уравнения (2.3) выступает в качестве "внешних" источников или стоков "жидкости". Движение оптической жидкости оказывается безвихревым всюду, кроме вихревых линий.

Рассмотренная исходно трёхмерная схема (точнее, размерностью  $(3 + 1)$  с учётом ещё и эволюционной переменной) допускает понижение размерности до  $(2 + 1)$  (схема рис. 1в) и  $(1 + 1)$  (рис. 1а). Для этого в схеме обеспечивается ограничение поля за счёт резкой неоднородности линейных характеристик среды, например, зеркал, фиксирующих зависимость огибающей от ископаемых пространственных переменных. При этом факторизация огибающей с такой фиксацией несколько меняет форму нелинейного отклика  $f = f(I)$  по сравнению с таковой в исходном трёхмерном анализе, но в рассматриваемых далее случаях изменение функции с достаточной точностью описывается перенормировкой её параметров. Отметим сразу, что два условия сингулярности:  $\operatorname{Re} E = 0$ ,  $\operatorname{Im} E = 0$ , в схеме с размерностью  $(2 + 1)$  определяют линии в трёхмерном пространстве или точки в двумерном — центры вихрей или дислокации волнового фронта; при размерности схемы  $(1 + 1)$  эти условия выполняются в дискретные моменты времени и при дискретных значениях координаты.

В рассматриваемых схемах излучение занимает как односвязную (рис. 1а, в, г), так и неодносвязную (рис. 1б, д) область; возникающие в последнем случае топологические особенности рассматриваются в разделе 4.2. Если схема рис. 1а отвечает распространению непрерывного излучения (интенсивность не зависит от времени) в планарном волноводе с единственной модой в одном из поперечных направлений, то использование пространственно-временной аналогии позволяет применить результаты анализа и к распространению импульсов излучения в одномодовом световоде, где нелинейное ограничение поля происходит в продольном направлении, так что размерность задачи по-прежнему  $(1 + 1)$ .

### 3. Режимы с однородным распределением интенсивности

Уравнение (2.1) имеет тривиальное решение  $E = 0$  (безгенерационный режим). Режим устойчив относительно малых возмущений (служит аттрактором) при условии  $\text{Re } f_0 < 0$ , которое далее считается выполненным. Здесь  $f_0 = f(I = 0)$  — поляризуемость среды в пределе малых интенсивностей ( $I \rightarrow 0$ ).

Из уравнения (2.3) следует аналог закона сохранения энергии, понимаемой как  $W(z) = \int I(\mathbf{r}_3, z) d\mathbf{r}_3$ . Для вывода интегрируем (2.3) по  $\mathbf{r}_3$ , получая для скорости изменения энергии светлых локализованных структур (с конечной энергией) соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial z} = \int I \text{Re } f d\mathbf{r}_3 - d \int |\nabla_3 E|^2 d\mathbf{r}_3. \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, находим, что безгенерационный режим глобально устойчив (не только к малым возмущениям), если  $\text{Re } f < 0$  при всех фигурирующих в динамике значениях интенсивности.

Из (3.1) при учёте условия устойчивости безгенерационного режима  $\text{Re } f_0 < 0$ , следует, что для существования нетривиальных светлых локализованных (с конечной энергией) структур излучения необходимо, чтобы функция  $\text{Re } f(I)$ , отрицательная при малых интенсивностях, при возрастании интенсивности меняла знак. Однако при больших интенсивностях функция  $\text{Re } f(I)$  вновь должна стать отрицательной. Действительно, в противном случае в системе по мере распространения излучения мог бы устанавливаться однородный в пространстве  $\mathbf{r}_3$  режим с неограниченно возрастающей интенсивностью излучения. Следовательно, для получения нетривиальных светлых локализованных структур функция  $\text{Re } f(I)$  должна как минимум дважды обращаться в нуль, т.е. дополнительно к безгенерационному режиму должны существовать и другие однородные режимы — случай классической оптической бистабильности. Тогда светлая локализованная структура — лазерный солитон — может интерпретироваться как островок лазерной генерации на фоне безгенерационного режима.

Для дальнейшего продвижения необходимо замкнуть (2.1), фиксируя "материальное уравнение", задающее в принятом приближении безынерционности отклик активных и пассивных центров  $f(I)$ . В основном варианте считаем, что отклик центров описывается эффективно двухуровневыми схемами с однородным типом спектрального уширения. Если частоты переходов этих двухуровневых схем и несущая частота излучения близки друг к другу, то функция  $f(I)$  оказывается вещественной и имеет вид [24]

$$f(I) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + \frac{g_0}{1+I/b}. \quad (3.2)$$

В правой части (3.2) первое слагаемое  $(-1)$  отвечает нерезонансному поглощению матрицы (при выбранной нормировке эволюционной переменной),  $g_0$  и  $a_0$  — коэффициенты ненасыщенного усиления и поглощения,  $b$  — отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения, а интенсивность нормирована на величину интенсивности насыщения поглощения.

Помимо безгенерационного режима,  $I = 0$ , уравнение (2.1) допускает существование режимов с не зависящей от

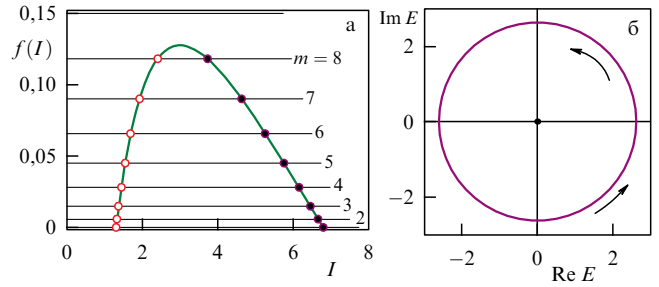


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Функция баланса усиления и потерь  $f(I)$  и пояснение к определению интенсивности моды  $I_h$  (а). Устойчивые режимы отвечают правой ветви  $f(I)$ , на которой расположены чёрные кружки. Квантование топологического заряда  $m$ , показанное на рис. а, и соответствующая фазовая кривая на комплексной плоскости огибающей  $E$ , начало координат которой представляет безгенерационный режим (б), относятся к схеме, приведённой на рис. 1б;  $g_0 = 2,114$ ,  $L = 36$ .

$\mathbf{r}_3$  ненулевой интенсивностью:  $I = I_h = |A_h|^2 > 0$ . Это плосковолновые структуры с наклонным по отношению к оси  $z$  распространением:

$$E = A_h \exp(i\mathbf{K}_3 \mathbf{r}_3 - iK_3^2 z), \quad f(I_h) = dK_3^2. \quad (3.3)$$

Мы рассматриваем условия, когда  $f_0 < 0$  и функция  $f(I)$  обладает максимумом (рис. 2а). Поскольку нерезонансные потери возрастают квадратично по наклону  $K_3$ , его величина ограничена:  $K_3^2 < K_{\max}^2 = \max f(I)/d$ . Второе уравнение в (3.3) позволяет находить интенсивность  $I_h$  по пересечению графика функции  $f(I)$  горизонтальной линией, отвечающей потерям  $dK_3^2$  (рис. 2а). Линейный анализ устойчивости показывает, что критерием устойчивости служит неравенство  $(df/dI)_{I=I_h} < 0$ . Поэтому левая ветвь решений (с меньшими  $I_h$ ) неустойчива относительно малых возмущений, а правая — устойчива. Естественно, наибольшей интенсивностью обладает мода с нулевым наклоном,  $K_3 = 0$ . Отметим, что наклонные структуры испытывают при распространении геометрический сдвиг в направлении  $x$ , поэтому в схеме с реальной (конечной) апертурой они сохраняются только в течение ограниченного времени, пропорционального размеру апертуры. Таким образом, физический смысл имеют только структуры с небольшими наклонами волнового фронта.

Показанное на рис. 2а квантование топологического заряда и иллюстрирующий его рис. 2б относится к схеме, представленной на рис. 1б, и поясняются далее в разделе 4.2. Таким образом, в определённом интервале значений параметров одновременно устойчивы безгенерационный режим и режимы однородной генерации (сплошной спектр).

### 4. Одномерные структуры

Для схемы рис. 1а со щелевым резонатором распределение поля по одному из поперечных направлений фиксируется единственной модой соответствующего планарного волновода. Если дополнительно длина резонатора в направлении преимущественного распространения  $z$  мала (типичный для полупроводниковых микрорезонаторов случай), то генерация представлена единственной продольной модой. Тогда полная огибающая представляется произведением  $F(y, z)E(x, t)$ , где первый множи-

тель описывает фиксированную модовую структуру поля по соответствующим направлениям, а второй, зависящий только от одной поперечной координаты  $x$  и от времени  $t$ , служит огибающей для одномерной задачи. Как отмечалось в разделе 2, понижение размерности ведёт также к модификации функции отклика (3.2), которая с достаточной точностью сводится к перенормировке параметров этой функции. Другим вариантом понижения размерности является усреднение огибающей по устранимым координатам [5]. При этом нецелесообразен переход к сопутствующей системе координат и эволюционной переменной становится время  $t$ :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d) \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + f(|E|^2)E. \quad (4.1)$$

Такого рода приближение среднего поля для понижения размерности впервые для лазеров использовалось в [50]. Здесь мы пренебрегли частотной дисперсией матрицы, учёт которой в рассматриваемом приближении привёл бы в данной задаче только к не принципиальному изменению вида функции  $f(|E|^2)$ . Уравнение (4.1) может быть получено из (2.1) при переобозначении переменных и пренебрежении зависимостью от "лишних" координат. Безгенерационный режим  $E = 0$  по-прежнему устойчив при условии  $f_0 < 0$ , которое мы также полагаем выполненным.

#### 4.1. Бесконечная односвязная апертура

Полагая, что параметры схемы однородны в достаточно широкой области по  $x$ , считаем граничными условиями для светлых локализованных структур излучения требование убывания поля на периферии:

$$E(x = \pm\infty, t) = 0. \quad (4.2)$$

Плосковолновые режимы имеют прежний вид (3.3) с  $\mathbf{K}_3 = K_x \mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{r}_3 = x \mathbf{e}_x$ , где  $\mathbf{e}_x$  — орт оси  $x$ . Устойчивые режимы изображаются на рис. 2а правой ветвью функции  $f(I)$ . Их спектр сплошной с ограничением  $K_x^2 < K_{\max}^2 = \max f(I)/d$ .

Распределение поля установившихся структур имеет вид

$$E(x, t) = F(\xi) \exp(-i\nu t), \quad \xi = x - Vt. \quad (4.3)$$

Функция  $F$  определяется обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором поперечная скорость структуры  $V$  и сдвиг её центральной частоты  $\nu$  играют роль собственных значений:

$$(i + d) \frac{d^2 F}{d\xi^2} + V \frac{dF}{d\xi} + [i\nu + f(|F|^2)]F = 0. \quad (4.4)$$

Плосковолновые режимы со сплошным спектром наклонов  $K_x$  (по отношению к оси  $z$ ) также подчиняются этому уравнению. Но оно описывает и другие, весьма разнообразные режимы с неоднородным распределением интенсивности, которые реализуются при задании соответствующих начальных условий.

Один из классов таких структур отвечает волнам переключения, когда на двух частях апертуры (бесконечной) асимптотически достигаются режимы с однородным распределением интенсивности, но с различающимися уровнями интенсивности; другие названия таких

режимов — доменные стенки и фронты. В рамках нелинейной оптики волны переключения, которые впервые были обнаружены в схемах с внешним некогерентным или когерентным излучением [51, 52], служат одним из основных механизмов формирования локализованных структур — диссипативных солитонов [5, 53]. Например, режим приближается к безгенерационному на одном из краёв апертуры (интенсивность  $I \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ ) и к плосковолновому режиму на другом краю ( $I \rightarrow I_h > 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ ).

Спецификой лазерных схем без внешнего когерентного излучения является сплошной спектр волн переключения, следующий из сплошного характера плосковолновых режимов. Это означает, что при фиксированных параметрах схемы возможны, в зависимости от начальных условий, волны переключения со сплошным спектром скорости  $V$  — спектрального параметра уравнения (4.4). Однако здесь вновь необходимо сделать оговорку об ограниченной реальности таких структур ввиду выхода излучения через края апертуры конечных размеров. В то же время для локализованных "светлых" (с конечной "энергией"  $W = \int |E|^2 dx$ ) структур, у которых поле достаточно быстро убывает на периферии, такие потери отсутствуют, пока сама структура далека от края апертуры, но они приобретают всё большее значение по мере приближения фронта волны переключения или светлого солитона к краю апертуры. Граничное условие для отдалённых от края структур в соответствии с (4.2) имеет вид

$$F(\xi = \pm\infty) = 0. \quad (4.5)$$

Свойства одномерных диссипативных оптических солитонов и их интерпретация как связанных волн переключения описаны в [5] и в цитируемых там оригинальных публикациях. Спектр светлых солитонов дискретен, что является отражением баланса притока и оттока энергии в области их локализации. Ветвь неподвижных структур,  $V = 0$ , отвечает симметричному распределению интенсивности  $I(x) = I(-x)$ , тогда как структуры с асимметричным профилем движутся в направлении  $x$ . Одиночные стационарные солитоны устойчивы в определённом диапазоне параметров, при выходе из него возникают осцилляции различного типа. Наряду с одиночными солитонами имеются и комплексы с различным числом связанных солитонов, которые также могут быть неподвижными (симметричный профиль интенсивности) и движущимися (асимметричный профиль), в том числе с изменяющимися формой и скоростью движения. Отсылая за примерами к [5], перейдём к более подробному рассмотрению родственной одномерной схемы с кольцевой апертурой резонатора, одним из достоинств которой является ограниченность её апертуры.

#### 4.2. Кольцевая апертура

Схема с кольцевой апертурой представлена на рис. 1б, изложение в этом разделе следует [54]. Заметим, что излучение в данном случае распространяется преимущественно в направлении оси кольца  $z$ , а не вдоль его периметра, как, например, в работе [55], где изучались фазовые диссипативные солитоны. При том же управляющем уравнении (4.1) граничное условие заключается теперь в требовании периодичности:

$$E(L, t) = E(0, t). \quad (4.6)$$

Случай бесконечной апертуры отвечает пределу  $L \rightarrow \infty$ . Плосковолновые режимы с однородным распределением интенсивности в силу периодичности (4.2) при конечной длине  $L$  квантованы:  $K_x = 2\pi m/L$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m_{\max}$ , где  $m_{\max}$  — целая часть величины  $(L/2\pi)K_{\max}$ . Устойчивые плосковолновые режимы ( $f'(I_{h,m}) < 0$ ) помечены чёрными кружками на рис. 2а; в его условиях  $m_{\max} = 8$ , так что имеется 17 таких режимов (в численных расчётах здесь и далее приняты значения параметров  $b = 10$ ,  $a_0 = 2$ ,  $d = 0,06$ , если не оговорено иное). Смысл индекса  $m$  поясняется на рис. 2б, где параметрически изображена при постоянном времени  $t$  зависимость  $E(x)$  на комплексной плоскости  $\{\operatorname{Re} E(x), \operatorname{Im} E(x)\}$  при изменении  $x$  от 0 до  $L$ ; начало координат отвечает безгенерационному режиму  $E = 0$ . При обходе соответствующей замкнутой кривой (здесь — окружности) фазовый набег составляет  $2\pi m$ , так что при обычном определении топологического заряда как фазового набег вдоль контура, делённого на  $2\pi$ , индекс  $m$  можно считать топологическим зарядом. Имеется, однако, специфика, обусловленная неоднозначностью занятой излучением области: если обычно контур обхода может быть сжат в точку, то сейчас этот контур фиксирован.

Фазовая кривая ориентирована в соответствии с направлением возрастания координаты  $x$  (показано стрелкой на рис. 2б), контур обходится  $m$  раз против часовой стрелки при  $m > 0$ . Компонента потока энергии (вектора Пойнтинга) вдоль контура имеет на контуре одну и ту же величину:  $S = Id\Phi/dx = KI_h = 2\pi m I_h/L$ , при  $m > 0$  поток направлен вдоль фазовой кривой. Случай  $m = 0$  вырожден, фаза поля  $\Phi$  в этом случае произвольна и имеется стохастический дрейф по фазовой кривой под действием флуктуаций.

Только плосковолновые режимы (с однородным распределением интенсивности) реализуются при сравнительно малых размерах схемы,  $L < L_{\text{cr}}$ , где  $L_{\text{cr}}$  порядка ширины неподвижного солитона при  $L \rightarrow \infty$ . Если  $L > L_{\text{cr}}$ , то возможным становится и формирование структур с неоднородным профилем интенсивности; говорить о солитонах естественно, если область локализации поля значительно меньше длины  $L$ . Для таких стационарных структур по-прежнему справедливы выражение (4.3) и управляющее уравнение (4.4). Для подобных структур на рис. 3 показаны профили амплитуды огибающей и фазовые кривые при различных топологических зарядах  $m$ . Только одна из изображённых структур ( $m = 0$ , рис. 3а) неподвижна (скорость  $V = 0$ ) вследствие симметрии, тогда как другие структуры движутся. Фазовые кривые теперь отличаются от окружностей; они замкнуты и обладают самопересечениями. При  $m = 0$  фазовая кривая вырождена: она состоит из линии, проходимой при изменении  $x$  дважды, в противоположных направлениях, между двумя концевыми точками, являющимися точками возврата (каспами).

Для прочих, асимметричных, структур на рис. 3 фазовые кривые гладкие, они обходят начало координат  $m$  раз (против часовой стрелки при  $m > 0$ ). Как указывалось выше, для схемы размерностью  $(1+1)$  фазовые сингулярности возможны лишь в дискретные моменты времени при дискретных значениях координаты. Такое событие отвечает точному пересечению фазовой кривой начала координат (см. ниже рис. 6б). В такие моменты при прохождении вдоль фазовой кривой начала коорди-

нат фаза скачком меняется на  $\pi$ . На рисунке 3г, д можно также увидеть сохраняющиеся на конечных временных интервалах резкие скачки фазы на величину, отличающуюся от  $\pi$ , но близкую к ней. Это имеет место, если фазовая кривая подходит к началу координат достаточно близко.

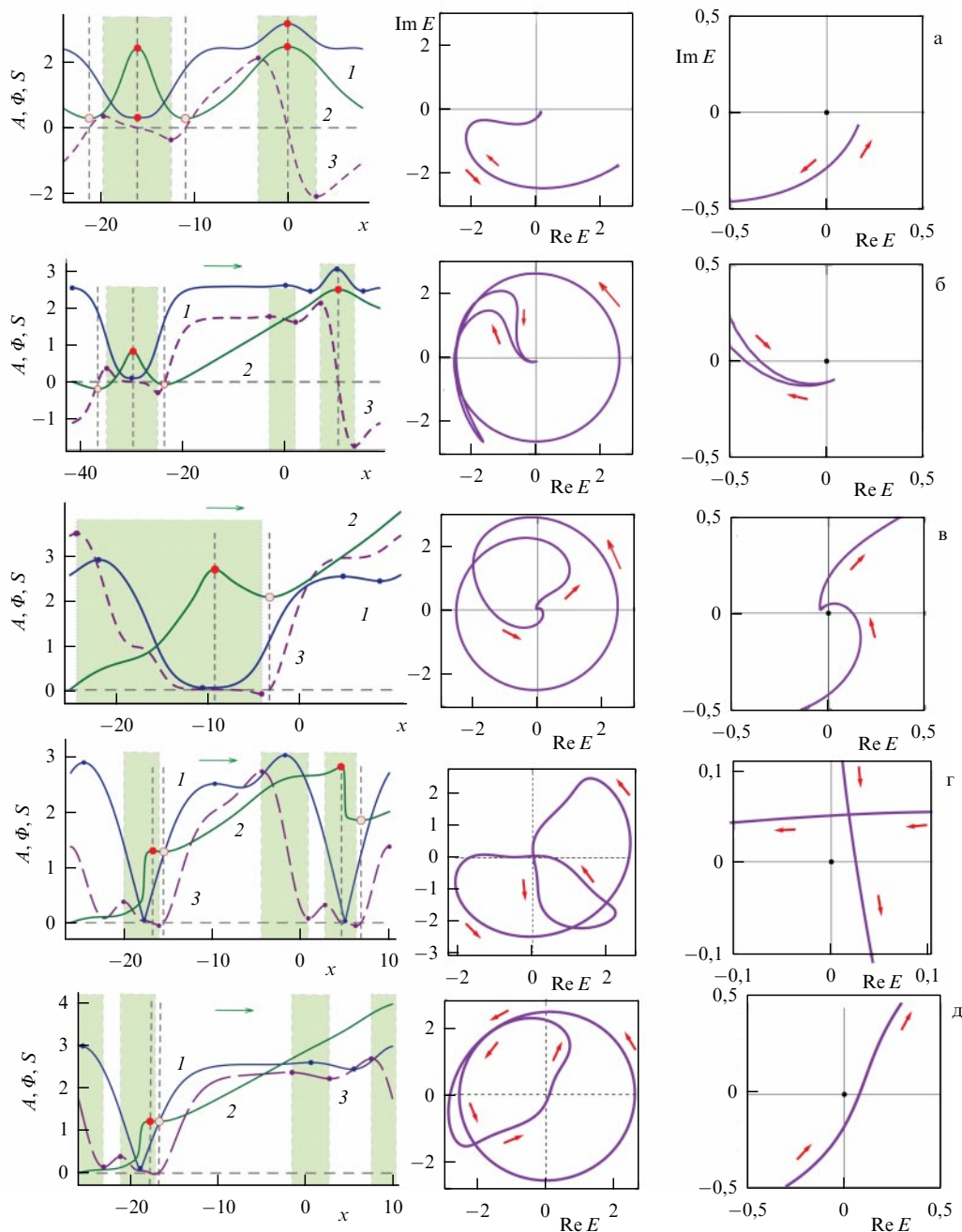
При значительных длинах  $L$  возможны также комплексы подобных солитонных структур и одиночные солитоны с большим общим фазовым набегом (рис. 4). При этом структуру, изображённую на рис. 4в, логично интерпретировать как тёмный солитон с узкими провалами интенсивности на фоне интенсивности плосковолнового режима с наклонным распространением. Для всех структур на рис. 3 фазовые профили имеют экстремумы ( $d\Phi/dx = 0$ ), в которых соответственно поток энергии  $S = 0$ . В этих точках направление потока энергии меняется на противоположное, так что фазовые кривые являются знакопеременными по терминологии [56]. При изменении параметров схемы возникают также структуры с осцилляциями и движением с переменными скоростью и профилем огибающей. Интерпретация этих структур как режимов синхронизации поперечных мод [57] (здесь — с однородным распределением интенсивности и различными зарядами  $m$ ) неэффективна при большом числе таких мод.

Представленные структуры являются аттракторами, их области устойчивости иллюстрирует рис. 5а, б. При плавном изменении параметров (здесь — линейного коэффициента усиления  $g_0$ ) они переходят друг в друга без возникновения промежуточных осциллирующих структур, как это указывают стрелки на рис. 5а, б. По мере уменьшения  $g_0$  структура с зарядом  $m \neq 0$  преобразуется в симметричную структуру с зарядом  $m = 0$ , которая при дальнейшем уменьшении  $g_0$  переходит в безгенерационный режим. Вследствие перекрытия областей устойчивости различных структур имеют место характерные для диссипативных систем явления необратимого гистерезиса (см. раздел 7.3).

Благодаря линейной устойчивости представленных структур топологический заряд при эволюции сохраняется, но только при достаточно слабых отклонениях от этих структур; как мы только что видели, он может изменяться при выходе параметров схемы из области устойчивости соответствующего режима. Такой вывод справедлив и для переходных процессов установления стационарных структур после сильных начальных возмущений. В [54] рассмотрены два варианта таких возмущений. В первом варианте исходно симметричной структуре ( $m = 0$ , рис. 3а) придавался градиент волнового фронта, для чего огибающая структуры домножалась на  $\exp(2i\pi x/L)$ . Тем самым начальная структура приобрела заряд  $m = 1$ . Во втором варианте после установления симметричной структуры с зарядом  $m = 1$  (рис. 3б) резко менялся коэффициент усиления (от  $g_0 = 2,114$  до  $g_0 = 2,122$ ). Затем в обоих вариантах наблюдалось установление стационарных структур. В первом варианте это была структура с зарядом  $m = 2$ , показанная на рис. 3в, а во втором — исходный нулевой заряд временно повышался до  $m = 1$ . Динамика топологического заряда в первом и втором вариантах представлена соответственно на рис. 5в, г.

Преобразования структур происходят в виде серии элементарных топологических реакций, показанных на рис. 6. Так, изменение топологического заряда на еди-

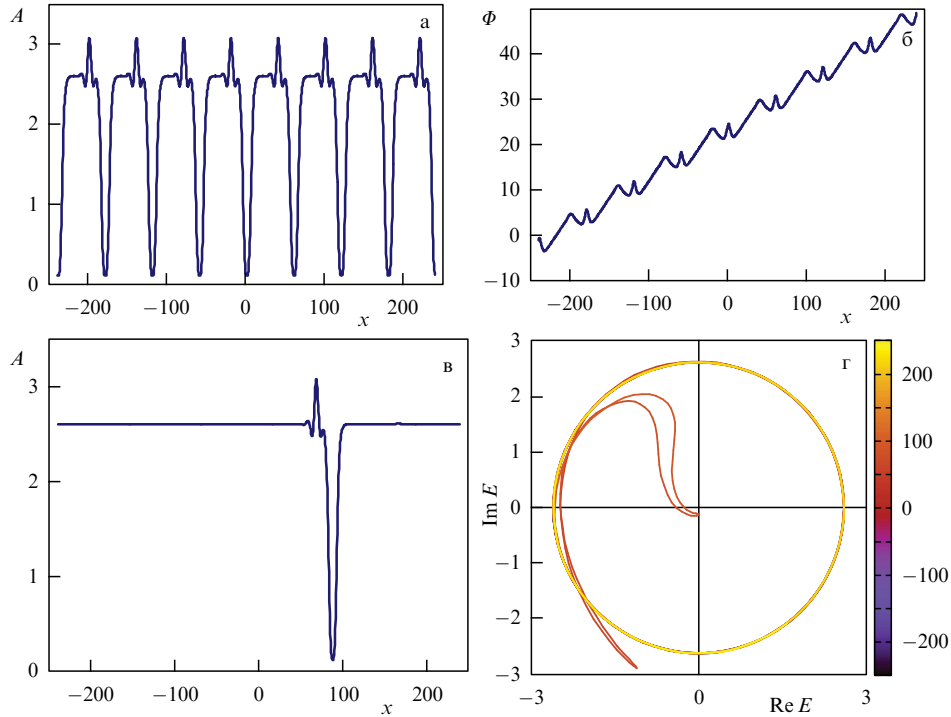




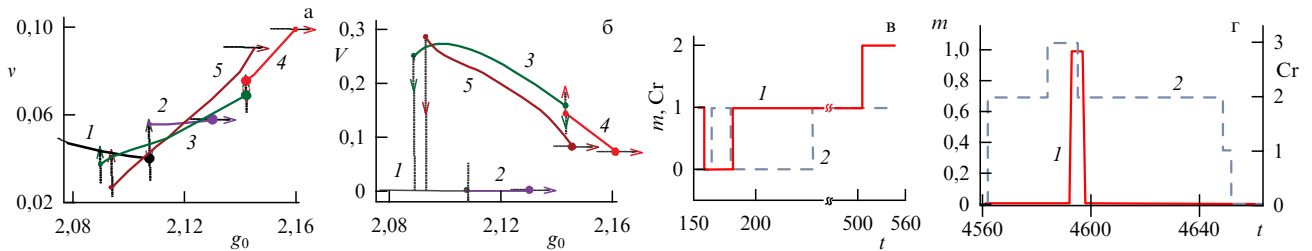
**Рис. 3.** (В цвете онлайн.) Левая колонка: профили вещественной амплитуды  $A = |E|$  (синие кривые 1), фазы  $\Phi$  (зелёные кривые 2) и потока энергии  $S = I(d\Phi/dx)$  (штриховые кривые 3) установившихся структур поля. Экстремумы амплитуды и фазы, отмеченные кружками, совпадают между собой только в случае рис. а. Вертикальные штриховые линии указывают экстремумы фазы и соответственно нули потока энергии. Затенённые и незатенённые полосы отвечают локальному убыванию и возрастанию энергии излучения. Симметричная структура на рис. а ( $m = 0$ ) неподвижна, остальные асимметричны и движутся в направлении, указанном зелёной стрелкой ( $m > 0$ ). Средняя колонка: фазовые кривые, вырожденные в случае рис. а, обладают одним (а–в, д) и двумя (г) возвратами к началу координат, отвечающему безгенерационному режиму  $E = 0$ . Правая колонка: увеличенное изображение фазовых кривых в окрестности начала координат. Красные стрелки на фазовых кривых показывают направление возрастания  $x$ . Топологический заряд  $m = 0$  (а),  $m = 1$  (б, г) и  $m = 2$  (в, д); на рис. а, в–д  $g_0 = 2,114$ ,  $L = 36$ , на рис. б  $g_0 = 2,116$ ,  $L = 60$ .

ницу возникает при пересечении фрагментом фазовой кривой начала координат (рис. ба–в). Если, например, исходно начало координат находилось вне фазовой кривой, топологически эквивалентной окружности, то после указанного пересечения возникает единичный заряд. Но этого недостаточно, например, для показанного на рис. 5в перехода к заряду  $m = 2$ , поскольку в последнем случае фазовая кривая должна содержать не менее двух

петель. Механизм возникновения дополнительных петель требует привлечения самопересечений фазовой кривой. Два реализующихся в динамике типа изменения числа самопересечений представлены на рис. 6г–е и 6ж–и. Для первого типа один фрагмент фазовой кривой приближается к другому (рис. 6г), касается его (рис. 6д) и затем пересекает в двух точках (рис. 6е). Однако при касании указанные фрагменты обладают различными



**Рис. 4.** (В цвете онлайн.) Профили амплитуды (а, в) и фазы (б) для комплекса из восьми солитонов (а, б) и для тёмного солитона (в) с фазовой кривой (г). Топологический заряд  $m = 8$ ,  $g_0 = 2,116$ ,  $L = 480$ .



**Рис. 5.** (В цвете онлайн.) Зависимость нелинейного сдвига частоты  $\nu$  (а) и скорости  $V$  (б) от линейного коэффициента усиления  $g_0$  для: (1) симметричной фундаментальной структуры с топологическим зарядом  $m = 0$  и единственным максимумом интенсивности (нижняя граница устойчивости структуры реализуется при  $g_0 = 2,035$ ); (2) симметричной структуры с зарядом  $m = 0$  и тремя максимумами интенсивности (рис. 3а); (3) асимметричной структуры с  $m = 1$  и двумя скачками фазы на величину  $\sim \pi$  различных знаков (рис. 3г); (4) асимметричной структуры с  $m = 2$  и двумя положительными скачками фазы  $\sim \pi$  (рис. 3д); (5) асимметричной структуры с  $m = 2$  и одним положительным скачком фазы  $\sim \pi$  (рис. 3д). Вертикальные стрелки показывают переходы между структурами, а горизонтальные отвечают переходу в режим с однородным распределением интенсивности. (в, г) Динамика изменения топологического заряда  $m$  (сплошные красные линии 1) и числа самопересечений фазовой кривой  $\text{Cr}$  (штриховые синие линии 2) в варианте с введением набега фазы  $2\pi$  (рис. в,  $L = 36$ ,  $g_0 = 2,114$ ) и с изменением коэффициента усиления  $g_0$  от 2,114 до 2,122 (рис. г).

значениями координаты  $x$ , поэтому такое событие не критично для профиля огибающей. В случае изменения второго типа фрагмент фазовой кривой сильно изгибается (рис. 6ж), так что формируется точка возврата (касп) (рис. 6з), из которой затем рождается замкнутая петля (рис. 6и). Далее в случае пересечения начала координат ветвями порождённых каспами петель топологический заряд может изменяться относительно исходного значения на значительную (целочисленную) величину, тогда как в отсутствие каспов — только на единицу.

Остановимся более подробно на вопросе о каспе, одном из основных объектов теории катастроф [58]. Необходимым условием появления на параметрической кривой  $\{X(x), Y(x)\}$  в точке  $x = x_0$  сингулярности (каска) является выполнение условия  $dE/dx = 0$ , т.е.  $dX/dx = 0$ ,  $dY/dx = 0$ , где  $X(x) = \text{Re } E(x)$ ,  $Y(x) = \text{Im } E(x)$ . Это усло-

вие можно сформулировать в виде  $dA/dx = 0$  и  $d\Phi/dx = 0$ , т.е. экстремумы амплитуды  $A$  (или интенсивности  $I$ ) и фазы  $\Phi$  должны совпадать. Поэтому степенное разложение функций  $X(x)$  и  $Y(x)$  в окрестности точки  $x = x_0$  начинается с квадратичных членов (штрихи обозначают производные):

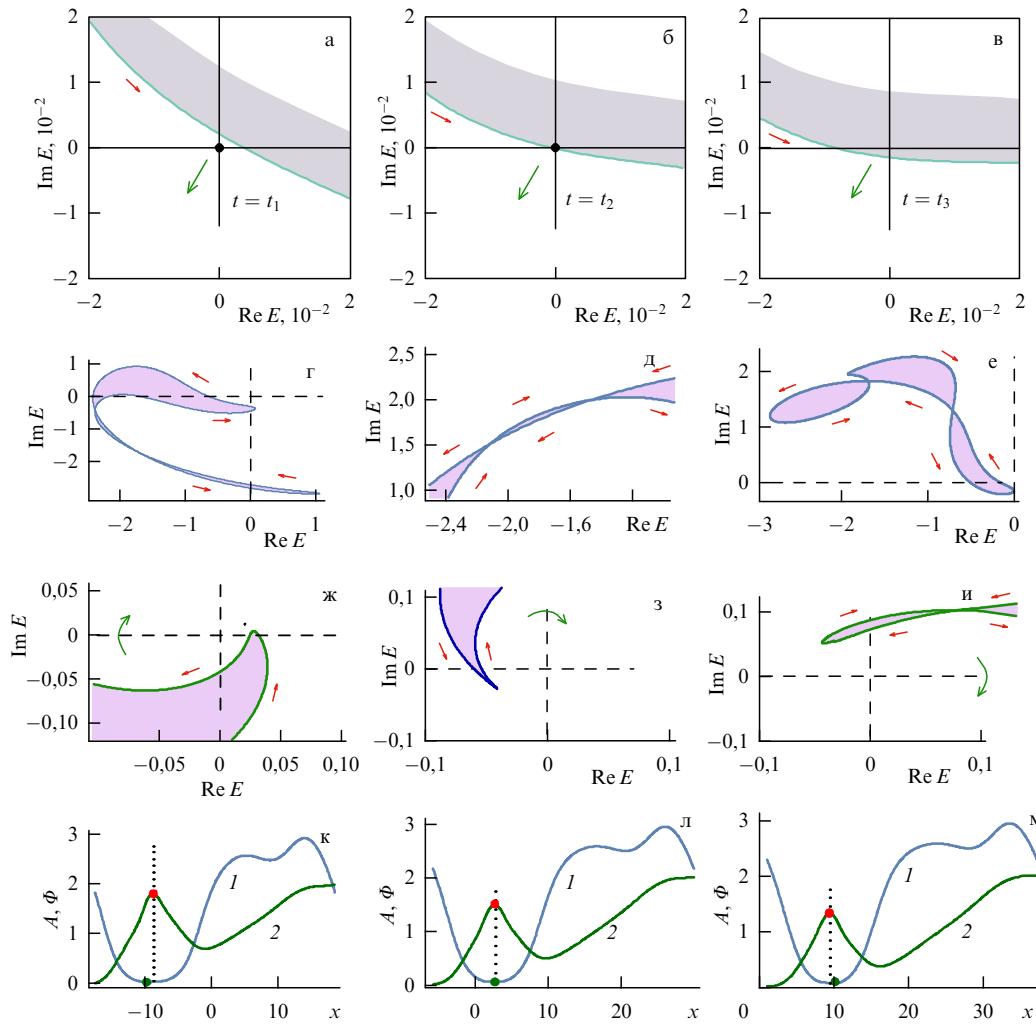
$$X(x) - X_0 = \frac{1}{2} X_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} X_0'''(x - x_0)^3 + \dots, \quad (4.7)$$

$$Y(x) - Y_0 = \frac{1}{2} Y_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} Y_0'''(x - x_0)^3 + \dots$$

Около каска

$$(x - x_0)^2 = -\frac{2(X - X_0)}{X''} = -\frac{2(Y - Y_0)}{Y''}.$$





**Рис. 6.** (В цвете онлайн.) Динамика фрагментов фазовой кривой, иллюстрирующая элементарные реакции изменения топологического заряда  $m$  (а–в) и числа самопересечений  $Cg$  (г–и). Моменты времени: до реакции (левая колонка,  $t = t_1$ ), момент реакции (средняя колонка,  $t = t_2$ ) и после реакции (правая колонка,  $t = t_3$ ). Реакции могут проходить в противоположном направлении, от  $t_3$  к  $t_1$ . Короткие красные стрелки показывают направление возрастания  $x$ , а более длинные зелёные стрелки — направление движения фрагментов фазовых кривых. Число самопересечений  $Cg$  меняется на 2 без возникновения каспов (г–е) и на 1 с одномоментным образованием каспа и его превращением (ж–и) в петлю. (к–м) Профили амплитуды (кривые 1) и фазы (кривые 2), отвечающие рис. ж–и; вертикальные пунктирные линии отмечают положение экстремумов этих профилей. Рисунки а–в, ж–и получены для первого варианта начальных условий, а рис. г–е — для второго. На рисунках а–в  $t_2 = t_1 + \delta t$ ,  $t_3 = t_2 + \delta t$ ,  $\delta t = 1$ ; на рис. г–е  $t_1 = 161$ ,  $t_2 = 184$ ,  $t_3 = 200$ ; на рис. ж–м  $t_1 = 191$ ,  $t_2 = 248$ ,  $t_3 = 281$ .

Отсюда следует, что в самом каспе наклон фазовой кривой  $dY/dX = Y_0''/X_0''$  и её фрагмент расположен в области, в которой  $dY/dX = Y_0''/X_0''$  и  $\text{sgn}(Y - Y_0) = -\text{sgn} Y_0''$ . Наконец, кривизна фазовой кривой

$$K = \frac{X_0'' Y_0''' - Y_0'' X_0'''}{2(X_0''^2 + Y_0''^2)^{3/2}} \frac{1}{x - x_0}. \quad (4.8)$$

Соответственно кривизна, обратно пропорциональная удалению точки фазовой кривой от каспа, обращается в каспе в бесконечность и меняет знак при прохождении точки через касп. Эти выводы подтверждаются численным моделированием.

Отметим, что при указанной реакции касп возникает и исчезает одномоментно и локально в одной точке фазовой кривой. Причём число самопересечений меняется на единицу, а не на 2, как в первом типе изменения. Эти реакции могут происходить в обе стороны, т.е. наряду с увеличением топологического заряда или числа самопересечений фазовой кривой возможно и их убывание.

В рассмотренных случаях события изменения заряда и числа самопересечений чередуются друг с другом; при этом появление каспов необходимо, но не достаточно для указанного выше случая изменения заряда (для этого требуется ещё, чтобы ветвь образовавшейся петли пересекла начало координат). Как показано на рис. 6к–м, появление представленных на рис. 6ж–и каспов действительно отражается в мгновенном и локальном совмещении экстремумов амплитуды и фазы огибающей.

Отметим, что продемонстрированное нарушение принципа сохранения топологического заряда вызвано неодносвязностью области локализации поля и не противоречит его соблюдению в схемах с трёхмерной геометрией, поскольку вихри — сингулярности волнового фронта — могут выходить из области квазиодномерного резонатора или входить в неё извне. Укажем также, что приведённые результаты анализа одномерной лазерной схемы естественным образом обобщаются для случая практически важных оптических микрорезонаторов [25, 26] и широкого класса эффективно одномерных неравно-

весных конденсатов, включая экситон-поляритонные лазеры [59]. При этом ближайшим к рассмотренной схеме является экситон-поляритонный лазер с насыщающимся поглощением [32]. Следует также отметить близость указанного здесь для лазеров процесса к известному в сверхпроводимости [60], гидродинамике [61, 62] и электрической проводимости твёрдых тел [63] эффекту проскальзывания фазы.

## 5. Двумерные структуры

Рассмотрим теперь широкоапертурный лазер с насыщающимся поглощением и эффективно двумерной схемой также в приближении среднего поля (усреднение огибающей в продольном направлении  $z$ ). Управляющее уравнение отличается от (4.1) только включением в лапласиан слагаемого  $\partial^2/\partial y^2$  при сохранении обозначений:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d)\nabla_{\perp}^2 E + f(|E|^2)E. \quad (5.1)$$

Здесь мы ограничимся случаем резонаторов с односвязной и бесконечной апертурой. Естественно, сохраняются условия устойчивости как безгенерационного режима,  $f_0 < 0$ , так и режимов с однородным распределением интенсивности  $(df/dI)_{I=I_h} < 0$ .

Линии потоков энергии излучения в широкоапертурном лазере в фиксированный момент времени определяются уравнениями (ср. с (2.5))

$$\frac{dx}{dl} = S_x(x, y), \quad \frac{dy}{dl} = S_y(x, y). \quad (5.2)$$

Особые точки (5.2)  $(x_0, y_0)$  находятся как решения системы уравнений  $S_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $S_y(x_0, y_0) = 0$ . Поскольку поток энергии равен произведению интенсивности  $I$  и градиента фазы  $\nabla\Phi$ , имеется два типа особых точек. В первом случае разложение огибающей в окрестности особой точки по малым отклонениям от неё  $x$  и  $y$  начинается с линейных членов:

$$E(x_0 + x, y_0 + y) = E_{(x)}x + E_{(y)}y + \dots, \quad (5.3)$$

где производные  $E_{(x)} = dE/dx|_{x=y=0}$  и т.д. вычисляются в особой точке. При ограничении разложения выписанными членами  $(q = \text{Im}(E_{(x)}E_{(y)}^*))$

$$\frac{dx}{dl} = qy, \quad \frac{dy}{dl} = -qx. \quad (5.4)$$

Тогда траектории — концентрические окружности с центром в особой точке, а сама она оказывается центром, т.е. является негрубой и меняет свой тип при учёте следующих членов разложения (5.4). Далее мы продемонстрируем, что для солитона с осесимметричным распределением интенсивности эта точка оказывается фокусом.

Для особых точек второго типа в аналогичном разложении присутствует постоянный член:

$$E(x_0 + x, y_0 + y) = E_0 + E_{(x)}x + E_{(y)}y + \frac{1}{2}E_{(xx)}x^2 + E_{(xy)}xy + \frac{1}{2}E_{(yy)}y^2 \dots \quad (5.5)$$

Теперь поток энергии обращается в нуль при условии  $\text{Im}(E_0^*E_{(x)}) = \text{Im}(E_0^*E_{(y)}) = 0$ , а линии потока опреде-

ляются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \text{Im}(E_0^*E_{(xx)})x + (q + p)y, \\ \frac{dy}{dl} &= (p - q)x + \text{Im}(E_0^*E_{(yy)})y, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $p = \text{Im}(E_0^*E_{(xy)})$ . Характер особой точки определяется величинами

$$\begin{aligned} \sigma &= -\text{Im}(E_0^*E_{(xx)}) - \text{Im}(E_0^*E_{(yy)}), \\ \Delta &= \text{Im}(E_0^*E_{(xx)})\text{Im}(E_0^*E_{(yy)}) - p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

При  $\sigma \neq 0$  и  $\Delta \neq 0$  особая точка оказывается грубой, типа узла, фокуса или седла. В общем случае для разбиения фазовой плоскости потоков энергии на ячейки с топологически различным видом траекторий должны быть известны помимо особых точек нелокальные элементы — предельные циклы (замкнутые траектории с периодическим изменением  $x$  и  $y$  при изменении  $l$ ) и расположения сепаратрис седел [64].

### 5.1. Солитоны с осесимметричным распределением интенсивности

В полярных координатах  $(r, \varphi)$  огибающая солитонов с осесимметричным распределением интенсивности имеет вид

$$E = A_{|m|}(r) \exp(im\varphi - iv_{|m|}t). \quad (5.8)$$

Здесь  $v_m$  — нелинейный сдвиг частоты,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — топологический заряд, показывающий набег фазы  $2\pi m$  при обходе по малому контуру вокруг центра солитона  $r = 0$ ,  $A_m(r)$  — радиальная функция, удовлетворяющая следующему из (5.1) уравнению

$$\frac{d^2 A_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} A_m + \frac{iv_m + f(|A_m|^2)}{i + d} A_m = 0. \quad (5.9)$$

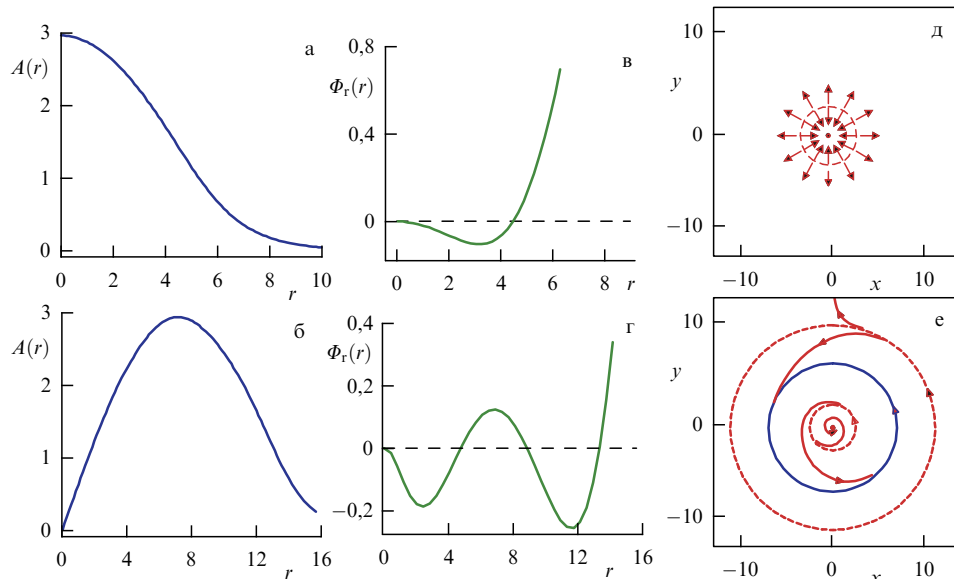
Имеет место вырождение радиальной амплитуды  $A_m(r)$  и сдвига частоты  $v_m$  по знаку топологического заряда  $m$ . Для светлых (с конечной мощностью) солитонов граничные условия требуют конечности при  $r = 0$  и убывания при  $r \rightarrow \infty$ . Помимо "мгновенной" фазы  $\Phi = \arg E$  целесообразно ввести "радиальную" фазу  $\Phi_r = \arg A_m$ . Тогда, отвлекаясь от линейной временной зависимости, мы можем представить мгновенную фазу в виде  $\Phi(r, \varphi) = \Phi_r(r) + m\varphi$ .

Солитоны с  $m = 0$  будем называть фундаментальными, а с ненулевым  $m$  — вихревыми ввиду закручивания потока энергии вокруг центра:

$$\mathbf{S}_{\perp} = |A_m(r)|^2 \left( \frac{d\Phi_r}{dr} \mathbf{e}_r + \frac{m}{r} \mathbf{e}_{\varphi} \right). \quad (5.10)$$

Радиальные профили модуля и фазы огибающей таких солитонов показаны на рис. 7. Около центра амплитуда максимальна для фундаментального солитона и обращается в нуль для вихревых. На периферии амплитуда всех солитонов экспоненциально убывает.

Обратим внимание на радиальную зависимость  $\Phi_r$ . Для фундаментального солитона функция  $\Phi_r(r)$  имеет только один максимум (при  $r = 0$ ) и один минимум. Однако для вихревого солитона имеются два максимума и два минимума функции  $\Phi_r(r)$ . Это отражается на внутренней структуре солитонов, определяемой структурой



**Рис. 7.** (В цвете онлайн.) Радиальные профили амплитуды огибающей (а, б), радиальной фазы (в, г) и поперечные потоки энергии излучения (д, е), стрелки указывают направление поперечного вектора Пойнтинга для фундаментального ( $m=0$ ) (а, в, д) и вихревого ( $m=1$ ) (б, г, е) солитонов.

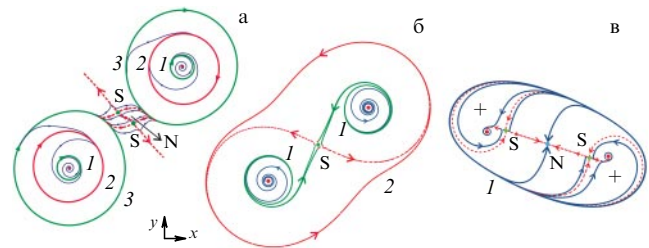
потоков энергии (рис. 7д, е). Для фундаментальных солитонов потоки радиальны, энергия течёт к центру при малых  $r$  и от центра на периферию с изменением направления на единственной окружности, делящей фазовую плоскость потоков на две ячейки. Но для вихревых солитонов имеется три разделительные окружности — три предельных цикла. Поэтому фазовая плоскость состоит для них из четырёх ячеек. Разделительные замкнутые линии (в данном случае окружности) служат важным признаком лазерных солитонов.

Отметим также, что определение топологического заряда здесь такое же, как и для консервативных систем, включая описываемые уравнением Гросса–Питаевского для конденсата Бозе–Эйнштейна при нулевой температуре [65]. В то же время диссипативность лазерной системы вносит в динамику принципиальные изменения — вихревые лазерные солитоны являются аттракторами, что невозможно в консервативных системах.

## 5.2. Неосесимметричные солитоны и солитонные комплексы

Большое число таких структур представлено в [5] и цитируемых там работах. Общим для светлых лазерных солитонов является дискретный спектр их собственных значений. Для широкого класса лазерных солитонов важны три собственных значения, связанных с симметрией уравнения (5.1) по отношению к сдвигу фазы излучения, сдвигу поперечных координат и повороту. Соответственно такие солитоны характеризуются нелинейным сдвигом частоты  $\nu$ , абсолютным значением поперечной скорости  $V$  и угловой скоростью  $\Omega$ . Эти три собственных значения отвечают трём интегральным характеристикам с дискретными значениями: мощности  $P_z(z) = \int I(\mathbf{r}_\perp, z) d\mathbf{r}_\perp$ , поперечному потоку энергии  $\mathbf{P}_\perp(z) = \int \mathbf{S}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z) d\mathbf{r}_\perp$  и аксиальной составляющей углового момента  $M_z(z) = \int (xS_y - yS_x) d\mathbf{r}_\perp$ .

Приведём примеры связанных пар вихревых солитонов, иллюстрирующие три типа их связи. На рисунке 8а показана фазовая плоскость потоков энергии в случае



**Рис. 8.** (В цвете онлайн.) Потоки энергии излучения для двух вихревых солитонов в случаях слабой (а), сильной (б) и сверхсильной (в) связи, различаемых по наличию и числу индивидуальных для вихрей предельных циклов. Особыми точками являются устойчивые фокусы, на которые наматываются линии потока (центры вихрей, помеченные красными точками), седла S и узлы N. Предельные циклы и сепаратрисы седла делят фазовую плоскость на ячейки с топологически различающимся характером линий потоков, направление которых указано стрелками. Периферийная область потоков не показана.

слабой связи — у каждого из двух солитонов сохранились по три индивидуальных замкнутые линии (слабо деформированные окружности). При сильной связи (рис. 8б) внешние индивидуальные замкнутые линии обобществились, но у каждой дислокации, понимаемой как центр вихря или точка сингулярности волнового фронта, осталось по одному индивидуальному предельному циклу. Наконец, на рис. 8в мы видим пример сверхсильной связи, при которой у дислокаций вообще не осталось индивидуальных предельных циклов [66]. Эти солитоны принадлежат к числу жёстких, у которых распределения интенсивности и потоков энергии со временем не изменяются с точностью до сдвига по поперечным координатам и поворотов как целое. В зависимости от симметрии этих двух распределений реализуются четыре типа движения "эйлеровой механики", представленные в [5]: неподвижная структура, равномерное прямолинейное движение структуры вдоль оси симметрии, вращение вокруг неподвижного центра симметрии и так называемое лун-

ное движение, при котором центр структуры вращается по окружности, а сама структура поворачивается вокруг этого центра с тем же периодом. Комплексы, показанные на рис. 8, обладают симметрией относительно инверсии и поэтому вращаются вокруг центра симметрии с постоянной угловой скоростью. Также в [5] приведена схема "солитонного коллаидера", в котором реализуется формирование комплексов солитонов с сильной связью при соударении индивидуальных вихревых солитонов.

### 5.3. Поляризационные сингулярности

**5.3.1. Параксиальные скалярные солитоны.** Выше мы рассматривали скалярные структуры излучения, у которых доминирует одна поляризационная компонента, пренебрегая второй. Более общим является случай векторных (поляризационных) структур с эллиптической поляризацией. Такие структуры обладают существенно более богатой, но в меньшей степени изученной топологией [67–71]. Нам уже встречались двумерные структуры с изолированными фазовыми сингулярностями, характеризующимися целочисленным топологическим зарядом. Для двумерных векторных структур реализуются и неизолированные (краевые) фазовые дислокации, расположенные на линиях. Основное внимание в этом разделе будет уделено поляризационным сингулярностям (см. также [5, 72] и раздел 7.4). Для них не определен выбор между большой и малой осями поляризационного эллипса (чисто круговая поляризация, С-точки) или направление вращения со временем вектора электрической напряженности по эллипсу (чисто линейная поляризация, Л-точки). Аналогом целочисленного топологического заряда  $m$  для изолированных фазовых сингулярностей служит полуцелый или целочисленный индекс Пуанкаре  $\eta$  — число оборотов главной оси поляризационного эллипса при обходе по кругу с малым радиусом вокруг точки поляризационной сингулярности [70, 71]. В вырожденных случаях точки сингулярности могут составлять линии или даже заполнять области апертуры.

Следуя [73], динамику двумерных поляризационных структур в широкоапертурном лазере описываем в квазиоптическом приближении и приближении среднего поля посредством замены скалярного уравнения (5.1) системой двух уравнений того же типа для амплитуд декартовых компонент огибающей  $\mathbf{E} = \{E_x, E_y\}$  или амплитуд круговых поляризаций  $E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}$ . Отметим, что детектироваться могут как те, так и другие компоненты по отдельности, так что имеет смысл говорить о фазовых сингулярностях любых поляризационных компонент. Для полупроводниковых лазеров с вертикальным резонатором принимаем модель "вращающегося спина" (spin-flip model) [74, 75]. Пренебрегая не имеющими принципиального значения для анализа поперечной структуры излучения быстрыми осцилляциями населенностей, запишем соответствующую систему двух безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} = (i + d)\nabla_{\perp}^2 E_{\pm} + f_{\pm}(I, \delta I)E_{\pm}. \quad (5.11)$$

Здесь

$$f_{\pm}(I, \delta I) = -1 - \frac{a_0}{1 + I} + (1 - i\alpha)g_{\pm}(I, \delta I),$$

$$g_{\pm}(I, \delta I) = N \left( 1 \pm \frac{\epsilon_J b \delta I}{1 + \epsilon_J b I} \right),$$

$$N = \frac{g_0}{1 + bI} \left[ 1 - \frac{\epsilon_J b^2 \delta I^2}{(1 + bI)(1 + \epsilon_J b I)} \right]^{-1}, \quad (5.12)$$

$I = |E_+|^2 + |E_-|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2$  — суммарная интенсивность,  $\delta I = (|E_-|^2 - |E_+|^2)$  — разность интенсивностей круговых компонент,  $\alpha$  — характеризующий полупроводниковые лазеры  $\alpha$ -фактор, безразмерный параметр  $\epsilon_J$  определяется отношением скоростей релаксации и оказывается малым,  $1/201 \leq \epsilon_J \leq 1/3$  [74].

При  $\epsilon_J = 0$  функции  $f_+$  и  $f_-$  совпадают между собой и зависят только от суммарной интенсивности  $I$  ( $f_+ = f_- = f(I)$ ). В этом случае имеется семейство солитонов с непрерывно изменяющимся параметром, порождаемое скалярным солитоном — одним из представленных выше устойчивых решений скалярного уравнения (5.1). Например, для осесимметричного распределения интенсивности координатную зависимость скалярных вихревых солитонов можно представить в виде  $E_s(r, \varphi) = A_{|m|}(r) \exp(im\varphi)$  (с учётом вырожденности решений (5.9) по знаку топологического заряда). Тогда решениями (5.11) будет семейство солитонов

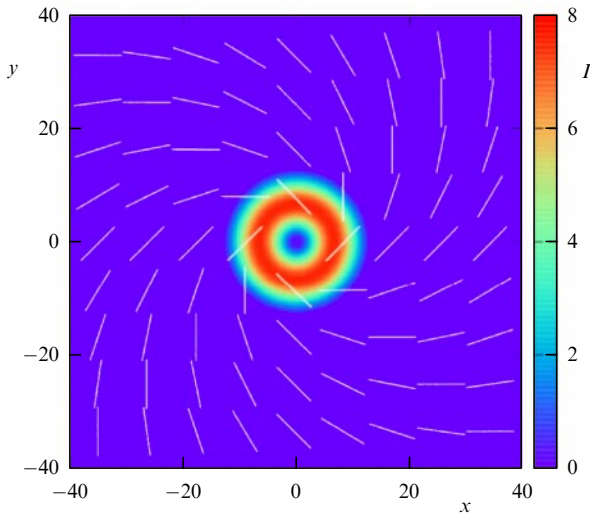
$$E_+(r, \varphi) = \exp(im_+\varphi) A_{|m_+|}(r) \cos \theta,$$

$$E_-(r, \varphi) = \exp(im_-\varphi) A_{|m_-|}(r) \sin \theta \quad (5.13)$$

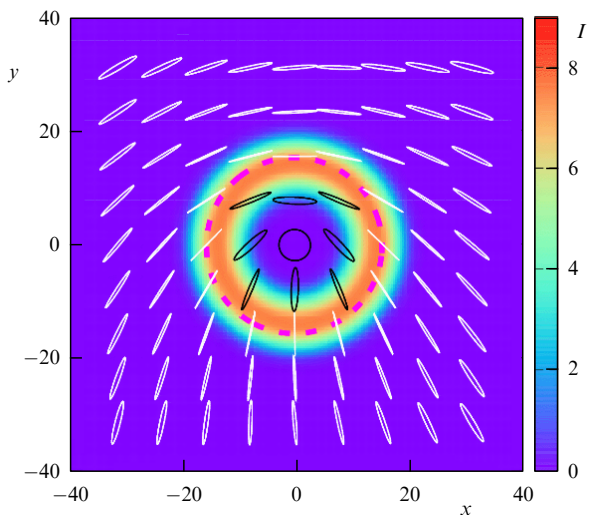
с  $m_+ = -m_-$  и произвольным параметром  $\theta$  (общий временной множитель опускаем). Сплошной спектр таких диссипативных солитонов объясняется инвариантностью управляющих уравнений к поворотам в плоскости интенсивностей  $(I_+, I_-)$ .

Однако при  $\epsilon_J > 0$ , когда функции  $f_+$  и  $f_-$  различаются и зависят также от разности интенсивностей поляризационных компонент, вырождение снимается и сплошной спектр солитонных структур превращается в дискретный. В начальный момент времени  $E_+$  и  $E_-$  можно задать в виде (5.13) с  $m_+ = -m_-$ . Оказывается, что со временем (тем большим, чем меньше  $\epsilon_J$ ) интенсивности компонент с противоположными знаками топологического заряда выравниваются. Результирующая векторная структура, иллюстрируемая рис. 9, по всей апертуре лазера обладает линейной поляризацией и индексом Пуанкаре  $\eta = 1$ .

В более общем случае топологические заряды круговых поляризационных компонент могут различаться и по модулю. Если различие модулей невелико, то устанавливается векторный солитон с более сложной поляризационной структурой. На рисунке 10 мы показываем такую структуру для солитона с топологическими зарядами круговых поляризаций  $m_+ = 2$ ,  $m_- = 3$ . Видно, что в центре поляризация круговая, на окружности с радиусом, отвечающим внешнему радиусу кольца суммарной интенсивности, поляризация чисто линейная (Л-линия) и на периферии — эллиптическая с направлением вращения, противоположным таковому для центральной области. Индекс Пуанкаре  $\eta = 1/2$ , т.е. при обходе точки сингулярности поляризационный эллипс поворачивается на пол оборота. Для декартовой поляризационной компоненты  $E_x$  рис. 11 свидетельствует о краевой дислокации при  $m_+ = -m_- = 1$  ( $E_x = 0$  на линии  $x = 0$ ) и о наличии изолированных фазовых дислокаций при разли-



**Рис. 9.** (В цвете онлайн). Направление линейной поляризации (светлые отрезки) и распределение суммарной интенсивности (цветовая шкала справа) для векторного солитона вида (5.13) с  $m_+ = -m_- = 1$ ;  $\varepsilon_J = 0,04$ .



**Рис. 10.** (В цвете онлайн). Поляризационные эллипсы и распределение суммарной интенсивности (цветовая шкала справа) для топологических зарядов  $m_+ = 2$ ,  $m_- = 3$ ;  $\varepsilon_J = 0,04$ . Белые эллипсы соответствуют левосторонней поляризации, чёрные — правосторонней. Штриховая окружность — L-линия, на которой поляризация излучения линейна.

чающихся, но близких по модулю топологических индексов круговых компонент. Более полный набор и анализ лазерных солитонов с поляризационными сингулярностями приведены в [73].

**5.3.2. Проявления непараксиальности.** Наше рассмотрение в разделе 5.3.1 основывалось на квазиоптическом (параксиальном) приближении, справедливом для пучков с шириной, значительно превышающей длину волны. По мере уменьшения ширины пучка возрастает роль эффектов непараксиальности. Такие эффекты проявляются прежде всего в усложнении поляризационной структуры излучения. В случае достаточно широких пучков эффекты слабой непараксиальности анализировались в [76] (см. также [5]) для фундаментальных

лазерных солитонов, а в [77] — для вихревых солитонов.

В параксиальном приближении поляризация излучения считалась одной и той же на всей апертуре лазера. Однако из уравнения Максвелла для диэлектрической проницаемости  $\tilde{\mathbf{D}}$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (5.14)$$

в слабонепараксиальном приближении следует

$$E_z \approx \frac{i}{k_0} \operatorname{div}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} \rightarrow \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_x}{\partial x}. \quad (5.15)$$

Приближение использует малость параметра  $(k_0 w)^{-1}$ , где  $w$  — характерная ширина солитона. Другая поляризационная компонента  $E_y$  и поправки к основной компоненте  $E_x$  появляются только в следующих порядках по параметру  $(k_0 w)^{-1}$ . Тем самым поляризация в общем случае является эллиптической и изменяется по поперечному сечению. Примечательно, что поляризационные эллипсы расположены в плоскости, включающей в себя ось  $z$  (основное направление распространения излучения), а не ортогональны ей. Учёт компоненты  $E_y$  показывает малые наклоны эллипсов, которыми мы будем пренебрегать.

Для вихревого солитона с осесимметричным распределением интенсивности в параксиальном приближении

$$E_x(r, \varphi) = A_m(r) \exp(im\varphi) = (x + iy)^m B_m(x^2 + y^2), \quad (5.16)$$

где  $A_m(r) = r^m B_m(r^2)$ . Выражение (5.16) можно представить в виде

$$E_x = |E_x| \exp(i\Phi_x), \quad \Phi_x = m\varphi + \arg B_m(r^2). \quad (5.17)$$

Тогда, согласно (5.15),

$$E_z(r, \varphi, z) = |E_z| \exp(i\Phi_z), \quad (5.18)$$

где фаза

$$\Phi_z = \frac{\pi}{2} + (m-1)\varphi + \arg \left[ mB_m + 2r^2 \exp(i\varphi) \cos \varphi \frac{dB_m}{dr^2} \right]. \quad (5.19)$$

Эллиптическая поляризация превращается в линейную, если

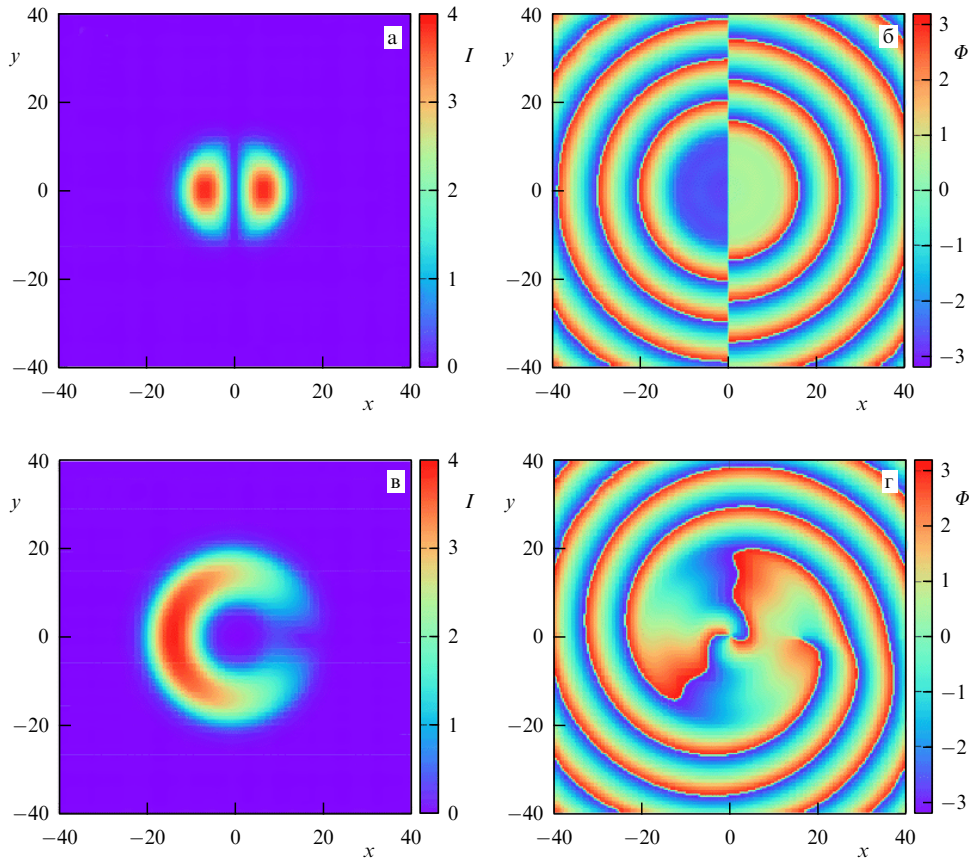
$$\delta\Phi = 0 \quad \text{или} \quad \delta\Phi = \pi, \quad (5.20)$$

где  $\delta\Phi = \Phi_z - \Phi_x$ . Направление вращения вектора напряжённости  $\tilde{\mathbf{E}}$  по поляризационному эллипсу определяется знаком  $\sin \delta\Phi$  и меняется на обратное при изменении этого знака. Из (5.17) и (5.19) следует

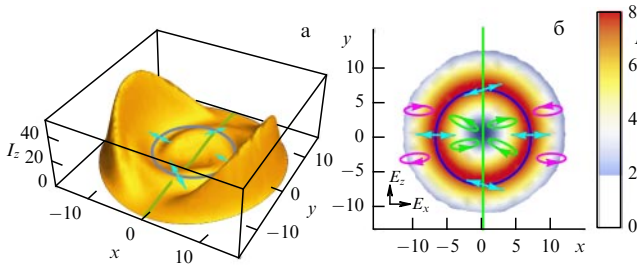
$$\operatorname{sgn} \sin \delta\Phi = \operatorname{sgn} \left( x \frac{d}{dr} |A_m(r)| \right). \quad (5.21)$$

Согласно (5.21) условие (5.20) выполняется на двух L-линиях на апертуре лазера  $(x, y)$ , которые показаны на рис. 12. Первая из них — прямая, совпадающая с осью  $x = 0$  (она ортогональна направлению основной поляризации излучения). Вторая L-линия — окружность, на которой интенсивность параксиального солитона макси-





**Рис. 11.** (В цвете онлайн.) Поперечные распределения интенсивности  $I$  и фазы  $\Phi$  декартовой поляризационной компоненты  $E_x$ : (а, б)  $m_+ = -m_- = 1$ , (в, г)  $m_+ = 2, m_- = 3$ . Распределение интенсивности у компоненты  $E_y$  повернуто на угол  $\pi/2$ .



**Рис. 12.** (В цвете онлайн.) Распределения амплитуды (а) и интенсивности (б) двумерного слабонепараксиального солитона с топологическим зарядом  $m = 1$  в плоскости  $(x, y)$  (цветовая шкала справа) и схематическое представление поляризационных эллипсов в плоскости  $(E_x, E_z)$ ; стрелки показывают направление вращения вектора  $\vec{E}$ . Поляризация на рис. б становится линейной на окружности, на которой максимальна интенсивность параксиального солитона, и на оси  $x = 0$  (L-линии).

мальна (см. рис. 7). Вся апертура разделяется этими линиями на четыре ячейки с противоположными направлениями вращения вектора  $\vec{E}$  по поляризационному эллипсу со временем.

## 6. Схема с внешним когерентным сигналом

Топология излучения в эффективно двумерных лазерных схемах значительно богаче, чем в одномерных, что делает актуальной задачу управления такой топологией. Как известно, с помощью слабых и плавных

поперечных неоднородностей можно контролировать движение и локализацию солитонов различного типа, а изменение топологии структур может быть достигнуто при столкновении солитонов (схема "солитонного коллайдера") [5]. В этом разделе мы продемонстрируем сравнительно простой и эффективный метод управления топологией структур с помощью слабого внешнего поддерживающего когерентного излучения [66].

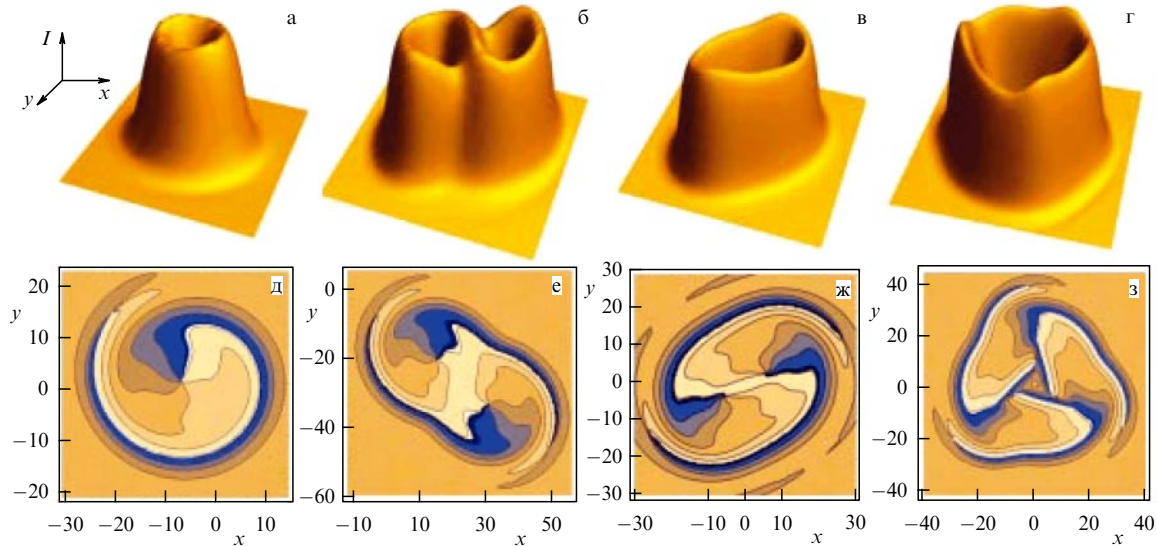
Безразмерное управляющее уравнение для огибающей поля лазера с быстрым насыщающимся поглощением и слабым поддерживающим сигналом — плоской монохроматической волной с амплитудой  $E_{in}$  — в приближении среднего поля удобно записать, считая несущей частотой частоту сигнала [21]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E + i\theta E + f(|E|^2)E + E_{in}. \quad (6.1)$$

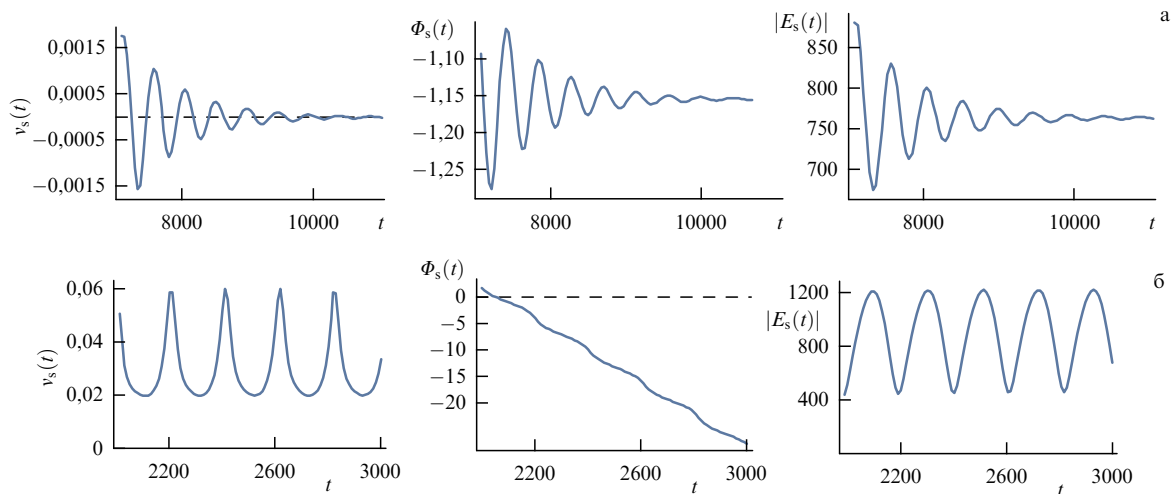
Здесь  $\theta$  — полагаемая малой отстройка частоты продольной моды резонатора от частоты поддерживающего излучения. Мы сохраняем область параметров, в которой при  $E_{in} = 0$  имеются представленные на рис. 7 и 8 лазерные солитоны, и полагаем, что амплитуда поддерживающего излучения много меньше их максимальной амплитуды,  $|E_{in}| \ll |E|_{max}$ .

Рассмотрим влияние слабого поддерживающего излучения на одиночный вихревой солитон с осесимметричным профилем интенсивности и топологическим зарядом  $m$ . На периферии солитона вместо нулевого поля устанавливается фон с малой амплитудой  $E_b \approx$





**Рис. 13.** (В цвете онлайн.) Поперечные профили интенсивности (а–г) и линии равной фазы (д–з) для солитонов, возникающих из свободных осесимметричных солитонов с топологическим зарядом  $m = 1$  (а, д),  $m = 2$  (б, в, е, ж) и  $m = 3$  (г, з) при введении поддерживающего излучения с амплитудой  $E_{in} = 0,01$ . Параметры:  $g_0 = 2,10$  (а, д),  $2,11$  (б, е),  $2,09$  (в, г, ж, з);  $\theta = 0,08$  (а, д),  $0,06$  (б, е),  $0,01$  (в, ж),  $0,015$  (г, з).



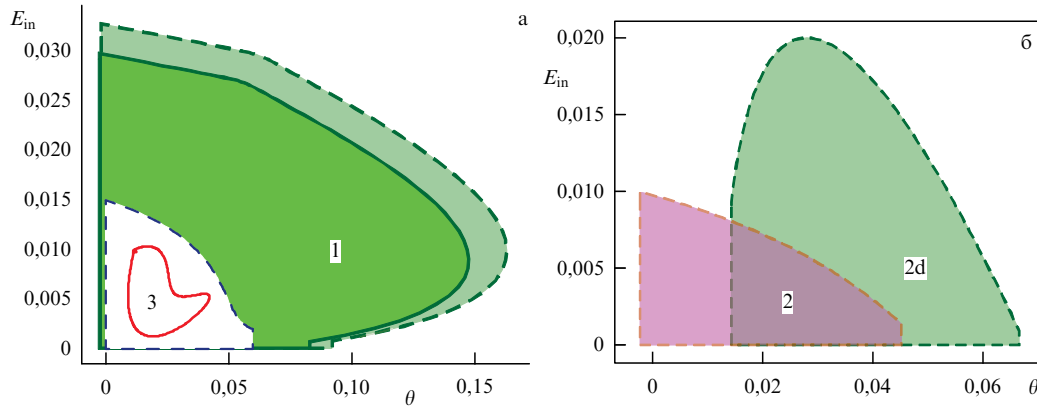
**Рис. 14.** (В цвете онлайн.) Временная зависимость мгновенной интегральной частоты  $\nu_s$ , интегральной фазы  $\Phi_s$  и модуля интегрального поля  $E_s$  при установлении режима синхронизации (а) и периодических биений (б) треугольного солитона ( $m_0 = 3$ , рис. 9г);  $g_0 = 2,09$ ,  $E_{in} = 0,01$ ,  $\theta = 0,015$  (а),  $0$  (б).

$\approx -E_{in}/(f_0 + i\theta)$ . Устойчивость солитона сохраняется, если параметры не близки к граничным для области устойчивости солитона в отсутствие поддерживающего излучения. Соответственно "ведомый" солитон можно рассматривать как результат интерференции "свободного" лазерного солитона и низкоамплитудного фона.

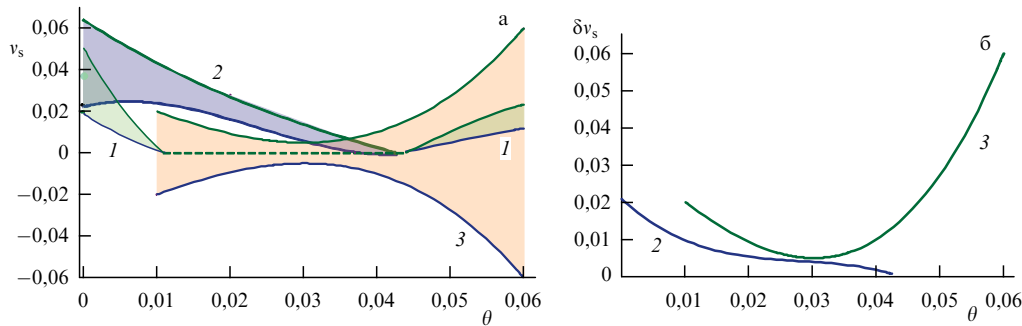
Наличие поддерживающего излучения приводит прежде всего к нарушению центральной симметрии вихревого солитона ( $m \neq 0$ ), так что такие структуры начинают двигаться, оставаясь жёсткими, и/или осциллировать при любых величинах  $E_{in}$  и  $\theta$ . Далее кратная центральная дислокация с зарядом  $m$  ( $|m| > 1$ ) расщепляется на  $|m|$  дислокаций с единичным зарядом. Одновременно из периферии подходят к центру также  $|m|$  дислокаций с противоположными по знаку единичными зарядами. При возрастании  $E_{in}$  центральные и периферийные дислокации сближаются и в конце концов при

превышении  $|E_{in}|$  критического значения сливаются и аннигилируют. Распределение интенсивности становится слабо асимметричным, как это показано на рис. 13 для "ведомых" солитонов с исходными топологическими зарядами от  $m = 1$  (рис. 13а, д) до  $m = 3$  (рис. 13г, з).

При  $|m| = 1$  и очень малых амплитудах  $E_{in}$  центральная и периферийная дислокации вращаются вокруг центра солитона с угловой скоростью, близкой к разности частот свободного солитона (с учётом нелинейного сдвига частоты) и поддерживающего излучения. Ввиду возникающей слабой асимметрии распределения интенсивности эта структура не жёсткая. При превышении  $E_{in}$  некоторого порога  $E_{in,thr}$  наступает синхронизация и структура становится жёсткой. Это означает, что распределения интенсивности и потоков энергии стационарны в системе координат, связанной со структурой. Переходный процесс показан на рис. 14а для интеграль-



**Рис. 15.** (В цвете онлайн.) Границы областей синхронизации (сплошные линии) и периодических биений (штриховые линии) солитонов с исходным топологическим зарядом  $m_0 = 1, 3$  (а) и  $m_0 = 2$  (б) (значения  $m_0$  указаны внутри областей). Область 2d соответствует солитону с сильной связью (рис. 9в);  $\min I_{\text{in,thr}} \approx 10^{-5}$ ,  $g_0 = 2,09$  (в областях 1–3),  $g_0 = 2,11$  (2d).



**Рис. 16.** (В цвете онлайн.) Границы временных изменений мгновенной частоты  $v_s$  (а) и амплитуда её изменений (б) в зависимости от расстройки  $\theta$  для ведомого треугольного солитона с сильной связью (область 1,  $m_0 = 3$  (рис. 9г)), солитона со сверхсильной связью (область 2,  $m_0 = 2$  (рис. 9в)) и солитона с сильной связью (область 3,  $m_0 = 2$  (рис. 9в)). Горизонтальная штриховая линия отвечает полной синхронизации. В областях 1 и 2  $E_{\text{in}} = 0,005$ ,  $g_0 = 2,09$ , в области 3  $E_{\text{in}} = 0,010$ ,  $g_0 = 2,11$ .

ных характеристик

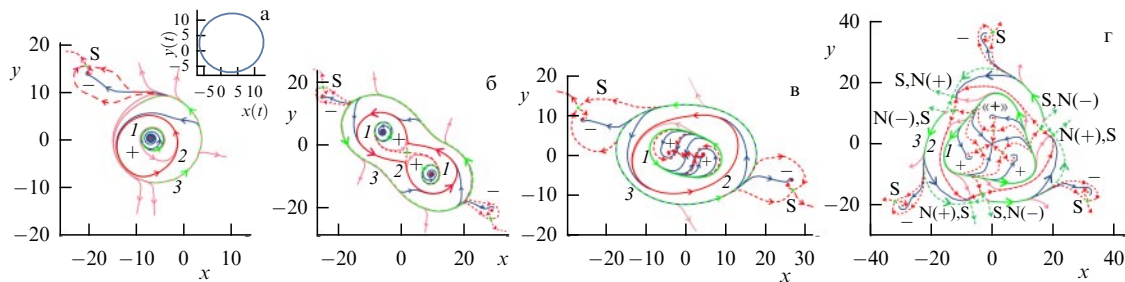
$$E_s(t) = \int E(x, y, t) dx dy, \quad \Phi_s(t) = \arg E_s, \quad v_s(t) = \frac{d\Phi_s}{dt}. \quad (6.2)$$

Однако такая синхронизация реализуется только в определённой области параметров схемы. Вне этой области устанавливается режим периодических биений (рис. 14б) либо происходят преобразование или разрушение локализованной структуры. Области параметров, отвечающие различным структурам, показаны на рис. 15. При выходе за границу области устойчивости периодических биений (затенённые области) наблюдаются следующие сценарии слияния центральных и периферийных дислокаций (центров вихрей). Если выход из области происходит за счёт увеличения расстройки  $\theta$ , то центральные дислокации движутся от центра и аннигилируют с периферийными дислокациями. При потере устойчивости при постоянной величине  $\theta$  и возрастании  $E_{\text{in}}$ , напротив, периферийные дислокации приближаются к центру, где и происходит их аннигиляция с центральными, уже в области высоких интенсивностей. Для  $|m| > 1$  при возрастании  $\theta$  и сохранении  $E_{\text{in}}$  расщепившиеся центральные дислокации достигают периферии и аннигилируют с периферийными последовательными парами. С убыванием  $E_{\text{in}}$  вплоть до нуля при постоянной расстройке  $\theta$  наблюдается переход к свободному солитону, но асим-

метричному при  $|m| > 1$ , если только такой солитон устойчив при заданном значении усиления  $g_0$ . В противном случае структура рассасывается с установлением безгенерационного режима  $E = 0$  на всей апертуре лазера.

На рисунке 16 мы показываем диапазон изменения мгновенной частоты  $v_s(t)$  для установившихся солитонов. В принятых условиях полная синхронизация с  $v_s(t) \equiv 0$  достигается только для солитона с единичным топологическим зарядом (штриховая линия). Другие солитоны во всей области устойчивости испытывают периодические биения.

Наконец, рис. 17 демонстрирует фазовую плоскость потоков энергии излучения для ведомых солитонов, показанных на рис. 13. Представлены случаи сильной связи, когда имеется по одному индивидуальному предельному циклу для двух основных дислокаций (рис. 17б), и сверхсильной связи без индивидуальных предельных циклов (рис. 17в, г). Солитоны, порождённые осесимметричным вихревым солитоном с  $m_0 = 1$  (рис. 17а) и треугольным солитоном с  $m_0 = 3$  (рис. 17г), — жёсткие, они синхронизированы поддерживающим излучением. При  $m_0 = 2$  солитоны не полностью синхронизированы, в их структуре проявляются периодические биения с малой амплитудой (около 2%). Движение солитонов подчиняется "эйлеровой механике" жёстких диссипативных структур [5]. Так, при  $m_0 = 2$  (рис. 17б, в) и  $m_0 = 3$  (рис. 17г) имеются оси симметрии к повороту второго и



**Рис. 17.** (В цвете онлайн.) Потоки энергии для ведомых солитонов, возникающих из исходных осесимметричных солитонов с топологическим зарядом  $m_0 = 1$  (а), 2 (б, в) и 3 (г). Знаки плюс и минус указывают знак центральной и периферийной дислокаций (особые точки типа фокуса). Замкнутые кривые 1 — неустойчивые предельные циклы; на рис. а — в замкнутые кривые 2 и 3 — устойчивый и неустойчивый предельные циклы, на рис. г замкнутая кривая 2 — устойчивый предельный цикл, а 3 — линия, составленная из сепаратрисных линий, включающая пары седло (S)–узел (N). Устойчивые и неустойчивые узлы обозначены соответственно как  $N(+)$  и  $N(-)$ . Замкнутые кривые разделяют ячейки с различной топологией потоков энергии излучения. Вставка на рис. а демонстрирует круговую траекторию центра солитона  $\mathbf{R}_c(t)$ . Параметры:  $g_0 = 2,10$  (а), 2,11 (б), 2,09 (в, г);  $E_{in} = 0,010$  (а, б), 0,005 (в, г);  $\theta = 0,08$  (а), 0,06 (б), 0,03 (в) и 0,037 (г).

третьего порядков. Поэтому рассматриваемые солитоны вращаются вокруг неподвижного центра симметрии с постоянной угловой скоростью. При  $m_0 = 1$  (рис. 17а) элементы симметрии отсутствуют. Тогда реализуется лунное движение: энергетический центр солитонов  $\mathbf{R}_c(t) = \int \mathbf{r}_\perp I(\mathbf{r}_\perp, t) d\mathbf{r}_\perp / \int I(\mathbf{r}_\perp, t) d\mathbf{r}_\perp$ ,  $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ , вращается по окружности и одновременно вся структура поворачивается с тем же периодом.

Медленное изменение параметров позволяет реализовать гистерезисные явления. Например, исходя от осесимметричного солитона с зарядом  $m_0 = 3$ , увеличив амплитуду поддерживающего излучения  $E_{in}$ , мы получим вращающийся треугольный солитон с тремя разнесёнными дислокациями. Если затем плавно уменьшать  $E_{in}$  до нуля, то структура солитона сохранится, т.е. три центральные дислокации не сольются — останутся разнесёнными друг от друга. Аналогичный гистерезис имеет место при изменении расстройки  $\theta$  и при других значениях  $m_0$ . Такой гистерезис демонстрирует бистабильность солитонов осесимметричного и треугольного типов и в отсутствие поддерживающего излучения.

Результаты, представленные в этом разделе, показывают нетривиальность явления синхронизации пространственно распределённых систем. Даже слабое поддерживающее излучение способно контролируемым образом изменять топологию двумерных вихревых лазерных солитонов и их комплексов. С его помощью можно управлять числом и расположением дислокаций, а также характером их взаимодействия между собой. Поддержание высокого контраста (отношения максимальной интенсивности к фоновой) вместе с подавлением дрейфа фазы свободных солитонов (см. раздел 9) и богатством набора ведомых структур различных типов делает перспективным их применение для топологически защищённых информационных операций. Описанные эффекты, по-видимому, несложно наблюдать в широкопертурных полупроводниковых лазерах, комбинируя схемы с насыщающимся поглощением [78–80] и поддерживающим излучением [81–86].

## 7. Трёхмерные структуры

Наиболее богаты разнообразными структурами схемы с трёхмерной геометрией. Сингулярности распределения поля при фиксированном значении эволюционной переменной  $z$  возникают при одновременном обращении в

нуль правых частей системы (2.5), т.е. при нулевом потоке энергии излучения,  $S_3 = 0$ . Поскольку  $S_3 = IV_3\Phi$ , возникают два варианта удовлетворения данного условия. Во-первых, это сингулярность при нулевой интенсивности излучения,  $I = 0$ , что достигается при условиях

$$\operatorname{Re} E(x, y, \tau) = 0, \quad \operatorname{Im} E(x, y, \tau) = 0. \quad (7.1)$$

В трёхмерном пространстве два последних условия в общем случае определяют линии, параметрическая форма которых  $\{x(l), y(l), \tau(l)\}$  ( $l$  — длина линии). Это вихревые линии, так как вблизи них поток энергии излучения имеет вихревую форму. Второй вариант реализации сингулярности отвечает векторному равенству  $\nabla_3 \Phi = 0$ , которое эквивалентно трём скалярным условиям:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = 0. \quad (7.2)$$

В общем случае (7.2) определяют изолированные точки в трёхмерном пространстве  $\mathbf{r}_3 = \{x, y, \tau\}$ .

### 7.1. Вихревые линии

Вихревые линии формируются и в линейном режиме; например, гауссовы пучки высших порядков монохроматического излучения обладают незамкнутыми и замкнутыми вихревыми линиями [87]. Вихревые линии с более сложной топологией, в том числе узловые, продемонстрированы применительно к распространению излучения в вакууме теоретически и экспериментально в [88]. Однако в линейных средах такие структуры при эволюции расплываются и становятся необнаружимыми. Далее мы остановимся только на нелинейных структурах, обращая особое внимание на особенности их топологии. Укажем прежде всего свойства вихревых линий применительно к лазерным солитонам.

Топологические трёхмерные лазерные солитоны обладают по крайней мере одной вихревой линией (мы не причисляем к топологическим фундаментальные солитоны). При обходе вокруг линии в её малой окрестности в плоскости, ортогональной касательной линии, в силу однозначности поля фазовый набег  $\delta\Phi = 2\pi m$  с целым числом  $m$  — топологическим зарядом. В рассматриваемых системах устойчивы только вихревые линии с единичным зарядом,  $m = \pm 1$ . Ориентацию линий можно выбрать так, что  $m = 1$ . Вихревые линии интересующей

нас лазерной (диссипативной) схемы будут характеризоваться, во-первых, геометрически по топологическим характеристикам и, во-вторых, по особенностям потоков энергии.

Как и в линейных средах, эти линии могут быть как замкнутыми, так и незамкнутыми, концы которых в пространстве  $\mathbf{r}_3$  уходят на периферию солитонов (на бесконечность). Формально незамкнутую линию можно также замкнуть, дополнив её дугой бесконечно большого радиуса с центром в окрестности солитона. Асимптотически (на периферии светлых солитонных структур) незамкнутые вихревые линии приближаются к прямым. Это можно показать аналитически для слабо связанных фундаментальных лазерных солитонов [21]. Такие одиночные солитоны, описываемые локализованными решениями уравнения (2.2), обладают сферически-симметричным распределением поля, экспоненциально убывающего на больших расстояниях от центра солитона с координатой  $\mathbf{r}_n$ :

$$E_n(\mathbf{r}) = A \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \exp(-q|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n| + i\Phi_n), \quad (7.3)$$

$$q = q' + iq'', \quad q' > 0.$$

На больших расстояниях от центра солитона можно использовать аналог мультипольного разложения [89]:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n| \rightarrow r - (\mathbf{n}, \mathbf{r}_n)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Тогда, оставляя зависимость от  $\mathbf{r}_n$  только в показателе экспоненты, для комплекса таких слабо связанных солитонов получим

$$E(\mathbf{r}) \approx \frac{A}{r} \exp(-qr) \sum_n \exp[q(\mathbf{n}, \mathbf{r}_n) + i\Phi_n]. \quad (7.4)$$

Теперь условия (7.1) для определения вихревых линий примут вид

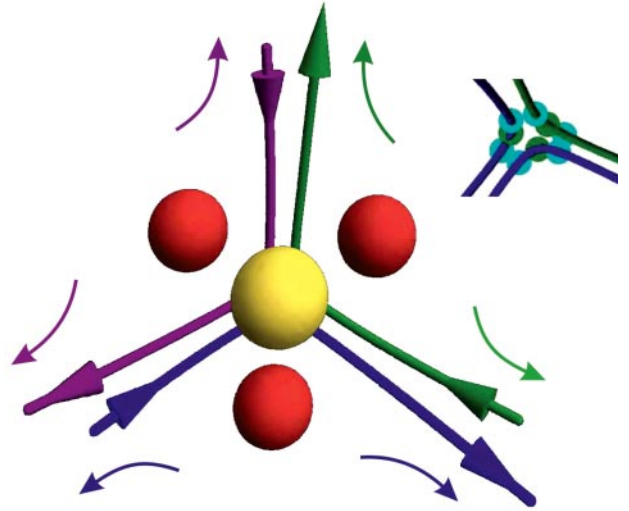
$$\sum_n \exp[q'(\mathbf{n}, \mathbf{r}_n)] \cos[q''(\mathbf{n}, \mathbf{r}_n) + \Phi_n] = 0,$$

$$\sum_n \exp[q'(\mathbf{n}, \mathbf{r}_n)] \sin[q''(\mathbf{n}, \mathbf{r}_n) + \Phi_n] = 0, \quad (7.5)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Это система трёх уравнений для определения трёх неизвестных:  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ , задающих направление прямых линий. Дискретный набор решений задаёт асимптотики вихревых линий вида гипербол. На рисунке 18 это иллюстрируется примером для пирамидального жёсткого комплекса четырёх фундаментальных солитонов, три из которых имеют одинаковую фазу:  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ , а четвёртый противофазен им:  $\Phi_4 = \pi$ . Ввиду наличия плоскостной симметрии, проходящих через вершину и высоту пирамиды, комплекс движется без вращения прямолинейно (в сопровождающей системе отсчёта). Ряд других жёстких комплексов фундаментальных трёхмерных солитонов, их движение и взаимодействие рассматриваются в [5] (см. также приведённые там ссылки). Асимптотика численно найденных вихревых линий близка к получаемой аналитически. Этот вывод подтверждается численно и для более сложных локализованных структур.

На самой вихревой линии поток энергии обращается в нуль,  $S_3 = 0$ , в силу чего все точки вихревой линии являются особыми для динамической системы (2.5) (не-



**Рис. 18.** (В цвете онлайн.) Поверхности изоинтенсивности (сферы) и три гиперболоподобные вихревые линии для пирамидального комплекса четырёх слабо связанных фундаментальных солитонов (вид со стороны оси симметрии). Три солитона (неосевые) обладают одинаковой фазой, а четвёртый (центральный) им противофазен. Прямые стрелки на линиях показывают направление их ориентации, а изогнутые стрелки — направление продольной составляющей потока энергии, которое меняется на противоположное в сверхособых точках. На вставке: центральная часть вихревых линий со сверхособыми точками на них (кружки).

изолированные особые точки). В локальной окрестности вихревой линии система (2.5) обладает симметрией относительно оси, параллельной касательной к вихревой линии; для определённости примем, что это ось  $\tau$ . В цилиндрических (локально цилиндрических) координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\tau$  огибающая поля может быть записана в виде  $E = A(\rho, \tau) \exp(i\varphi)$ . При малых  $\rho$  функция  $A(\rho, \tau)$  разлагается в ряд по нечётным степеням  $\rho$ :  $A(\rho, \tau) = \rho f(\tau) - \rho^3 g(\tau) + \dots$ . Тогда в низшем по  $\rho$  приближении

$$S_\rho = -\rho^3 F_\rho(\tau), \quad S_\varphi = \rho F_\varphi(\tau), \quad S_\tau = \rho^2 F_\tau(\tau), \quad (7.6)$$

где

$$F_\rho(\tau) = 2 \operatorname{Im}(f^* g), \quad F_\varphi(\tau) = |f|^2, \quad F_\tau(\tau) = \operatorname{Im}\left(f^* \frac{df}{d\tau}\right). \quad (7.7)$$

Согласно (7.6), вблизи вихревой линии основной составляющей потока энергии является азимутальная компонента. Наименьшей величиной обладает радиальная составляющая; согласно расчётам,  $F_\rho(\tau) > 0$ , в соответствии с чем вихревая линия в системе (2.5) является аттрактором. Наибольший интерес для нас представляет продольная составляющая потока энергии. Расчёты показывают, что возможно изменение знака функции  $F_\tau(\tau)$  в некоторых точках вихревой линии. При наличии таких сверхособых точек вихревой линии, в которых  $F_\tau(\tau) = 0$ , мы будем называть эту линию знакопеременной, а при их отсутствии — знакопостоянной. Незамкнутые вихревые линии обязательно имеют нечётное число сверхособых точек (например, по три на рис. 18), тогда как замкнутые вихревые линии могут быть как знакопостоянными, так и знакопеременными.



## 7.2. Светлые топологические солитоны

Трёхмерные лазерные солитоны характеризуются, во-первых, топологией их скелетов — совокупности всех вихревых линий. Этот момент общий как для консервативных, так и для диссипативных солитонов. Во-вторых, для лазерных (диссипативных) солитонов важной является классификация структуры энергетических потоков — фактор, не проявляющийся для консервативных систем. Из количественных интегральных характеристик, помимо энергии светлого солитона  $W(z) = \int I(\mathbf{r}_3, z) d\mathbf{r}_3$ , далее мы будем использовать также тензор инерции, вычисляемый относительно центра структуры  $\mathbf{R}_c(z)$ :

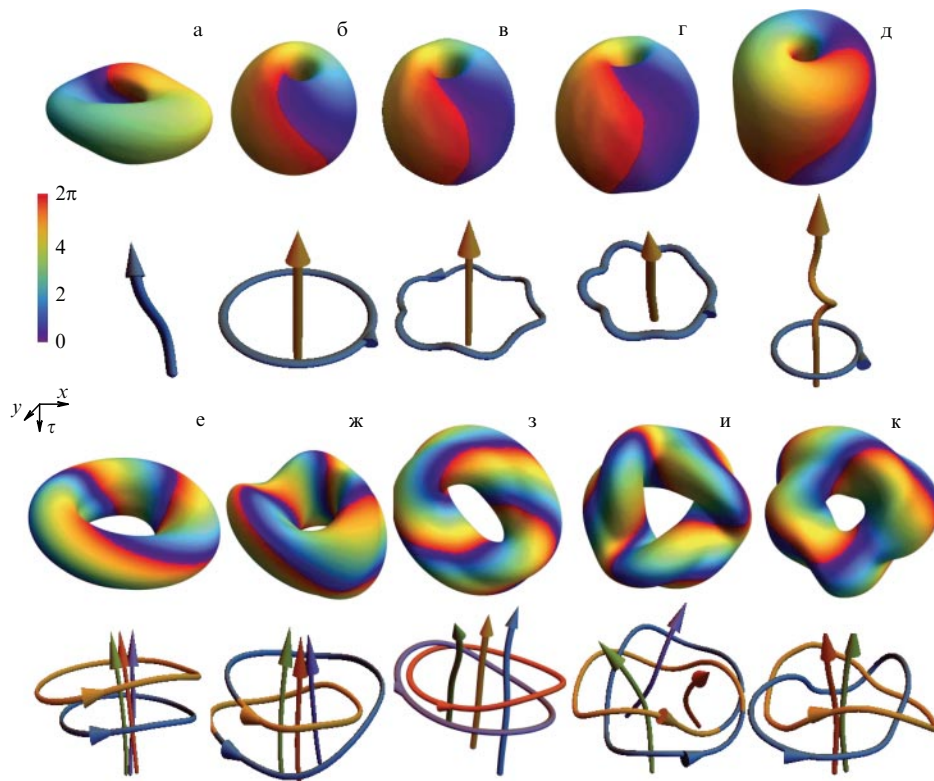
$$J_{ij}(z) = \int (r_i^2 \delta_{ij} - r_i r_j) I(\mathbf{r}_3, z) d\mathbf{r}_3. \quad (7.8)$$

В работах [56, 90–94] найден и исследован широкий класс светлых (с конечной энергией) трёхмерных топологических лазерных солитонов, который иллюстрируется на рис. 19. Наличие у всех них незамкнутых (бесконечных) вихревых линий затрудняет в ряде случаев прямое использование известных топологических характеристик, например, числа пересечений в проекции скелета на плоскость, Cr, или числа пересечений со знаком для ориентированных линий, Lk (см. [56]). Мы примем здесь такой подход: укажем способ построения начального распределения поля для локализованной структуры путём установления после описываемого управляющим уравнением (2.2) переходного процесса и снаб-

дим характеристиками этого распределения установившуюся структуру, убедившись, что в переходном процессе топология не изменяется.

Описанный в [91] алгоритм построения начального распределения "хула-хуп" солитонов следующий. Исходными являются двумерный солитон или сильно связанный комплекс таких солитонов, изученные достаточно детально [5]. Двумерная структура обладает осью симметрии порядка  $N_{2D}$  и суммарным топологическим зарядом  $m_{2D}$  (мы рассматриваем здесь только структуры с одинаковым знаком заряда). Такое двумерное распределение огибающей расположим в плоскости, включающей ось  $\tau$ , например в плоскости  $y = 0$ , при этом центр симметрии находится от этой оси на расстоянии  $\rho_2$ , превышающем размеры двумерной структуры. Будем поворачивать двумерное распределение вокруг оси  $\tau$ , изменяя угол  $\varphi = \arctan(y/x)$  от 0 до  $2\pi$ , так чтобы двумерный центр симметрии описывал окружность радиусом  $\rho_2$  с центром на оси  $\tau$ , одновременно разворачивая это распределение в поворнутой на угол  $\varphi$  исходной плоскости (мгновенной осью разворота служит текущая касательная к указанной окружности) вокруг двумерного центра симметрии на угол  $\theta(\varphi) = -s\varphi/N_{2D}$  с целочисленным индексом закрученности  $s$ . В результате такого построения траекториями дислокаций двумерной структуры в пространстве  $\mathbf{r}_3$  будут замкнутые винтовые линии (а также окружности при  $s = 0$ ).

Сформированное таким образом трёхмерное поле огибающей непрерывно. Однако структура не будет



**Рис. 19.** (В цвете онлайн.) Лазерные солитоны с различной топологией. Первый и третий ряды — поверхности изоинтенсивности по уровню  $I/I_{\max} = 0,15$ , второй и четвёртый ряды — скелеты этих солитонов. (а) Прецессон,  $s = 0$ , Cr = 0, Lk = 0. (б–д) Яблочные солитоны,  $s = 0$ , Cr = 2, Lk = 1. (е) Двухкольцевой солитон,  $s = 0$ , Cr = 8, Lk = 4. (ж) "Солитон с тривиальным узлом +",  $s = -1$ , Cr = 9, Lk = 4. (з) Хопф +,  $s = -2$ , Cr = 10, Lk = 5. (и) Трилистник +,  $s = -3$ , Cr = 11, Lk = 4. (к) Соломон +,  $s = -4$ , Cr = 12, Lk = 6. Знак + подчёркивает отличие от традиционных структур с таким названием ввиду наличия незамкнутых вихревых линий. Цветовая шкала указывает значение фазы на поверхностях.



устойчивой из-за "центробежных сил", вызванных значительным угловым моментом поля с замкнутыми вихревыми линиями с единичными топологическими зарядами. Для компенсации момента введём незамкнутые вихревые линии, расположенные вдоль оси  $\tau$ . Это достигается домножением указанного распределения поля на  $\exp(iM_0\varphi)$  с целочисленным индексом  $M_0$ . Заметим, что формирование замкнутых вихревых линий вызывает появление и незамкнутых линий, ориентированных также вдоль оси  $\tau$ . Поэтому полное число незамкнутых вихревых линий структуры  $N_U$  с топологическим зарядом каждой линии  $m = 1$  в общем случае отличается от  $|M_0|$ , а их суммарный топологический заряд  $M$  зависит также от  $N_C$  — числа замкнутых вихревых линий, причём  $M$  совпадает с  $N_U$ :

$$M = N_U = M_0 + s \frac{N_C}{N_{2D}}. \quad (7.9)$$

Незамкнутые линии не зацеплены друг с другом и по построению ориентированы вдоль оси  $\tau$ .

Индекс  $M$  определяет общий набег фазы при обходе вокруг незамкнутых вихревых линий в плоскости  $(x, y)$ :  $\delta\Phi = 2\pi M$ . Отметим, что вследствие симметрии управляющего уравнения (2.2) относительно зеркального отражения  $x \rightarrow -x$  или  $y \rightarrow -y$  топологические солитоны имеют зеркальных двойников (без дополнительной симметрии распределения их огибающих поля не совпадают). Тем самым задание ориентации замкнутых линий относительно незамкнутых (последние в рассматриваемых случаях исходно однонаправлены) также существенно определяет топологию солитона. При совпадении направления движения направления вращения солитона и "антисолитона" противоположны, а характер устойчивости сохраняется. Задание начального порождающего двумерного солитона, вместе с числом незамкнутых вихревых линий  $N_U$  и индексом закрученности  $s$ , полностью характеризует топологию скелета трёхмерного распределения поля. Расчёты показывают, что для сохранения топологической структуры в переходном процессе необходимо выполнение условия  $|M_0| \geq |M| > 0$ .

В [90, 91] найдены тэнгл-солитоны (от англ. tangle) (в русскоязычной литературе встречаются также термины "тангл", "связка" и "плетение") с единичным топологическим зарядом всех вихревых линий. В этом случае указанное условие устойчивости солитона требует выбора отрицательного индекса закрученности,  $s < 0$ . Изменение знака  $s$  для устойчивого лазерного солитона без изменения знаков топологических зарядов его вихревых линий порождает другую локализованную структуру, не приводимую к исходному солитону поворотами. Смена знака  $s$  эквивалентна отражению  $\tau \rightarrow -\tau$  с последующей сменой знака топологических зарядов замкнутых линий  $m_C$ , т.е. с заменой их ориентации противоположной. Новая структура существенно отличается от исходной, и выяснение её устойчивости требует дополнительного исследования.

Порождающими двумерными структурами для изображённых на рис. 19 солитонов служат: фундаментальный солитон,  $m_{2D} = 0$ , единственная незамкнутая вихревая линия при отсутствии замкнутых (рис. 19а); вихревой солитон,  $m_{2D} = 1$ ,  $N_{2D} = \infty$ , одна незамкнутая вихревая линия, окружённая одной замкнутой (рис. 19б–д); сильно связанная пара вихревых солитонов с одинаковыми зарядами,  $m_{2D} = 2$ ,  $N_{2D} = 2$  (рис. 19е–к). При этом

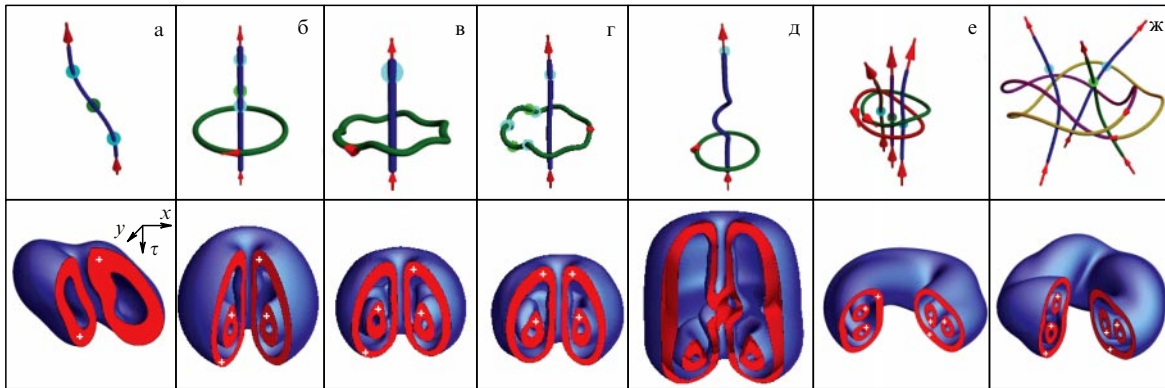
индекс закрученности  $s = 0$  (рис. 19а–е),  $s = 1$  (рис. 19ж),  $s = 2$  (рис. 19з),  $s = 3$  (рис. 19и),  $s = 4$  (рис. 19к).

Топологические характеристики скелетов солитонов — совокупности вихревых линий — определим, следуя терминологии [95]. Вводим плоские проекции этих трёхмерных линий, изображая пересечения перекрёстком двух линий: сплошной — расположенной в трёхмерном пространстве выше, и с разрывом (расположенной ниже) (см. рис. 23 в разделе 7.3). Индекс перекрёстка ориентированных линий, расположенных для определённости в плоскости  $(x, y)$ , можно определить как  $\varepsilon = \text{sgn}\{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2\}_\tau$ . Здесь  $\mathbf{t}_{1,2}$  — касательные к проекциям кривых, причём первой в векторном произведении выбирается сплошная линия. Сумма индексов перекрёстков — это число зацеплений вихревых линий  $Lk$ , которое является топологическим инвариантом, т.е. сохраняется при гладких деформациях этих линий. Другим топологическим инвариантом, обозначаемым через  $Cr$ , служит минимальное число пересечений вихревых линий скелета в проекции на плоскость при варьировании этой плоскости. Значения инвариантов  $Lk$  и  $Cr$  указаны в подписи к рис. 19.

На рисунке 19 светлые лазерные солитоны расположены в порядке возрастания топологической сложности их скелетов (напомним, что фундаментальный солитон без вихревых линий не принадлежит к числу топологических солитонов). Наиболее простой топологический солитон обладает единственной незамкнутой вихревой линией, изогнутой и при некоторых параметрах прецессирующей, ввиду чего мы называем его прецессором (рис. 19а). У яблочных солитонов, показанных на рис. 19б–д, к незамкнутой вихревой линии добавляется одна замкнутая, охватывающая незамкнутую. Незамкнутая линия прямолинейна, если замкнутая обладает симметрией относительно поворотов (рис. 19б, в), и криволинейна в прочих случаях (рис. 19г, д); незамкнутая линия вращается винтообразным образом в случае рис. 19д.

Скелет "двухкольцевого" солитона (рис. 19е) состоит из пучка трёх незамкнутых вихревых линий, образовавшихся за счёт расщепления топологически троекратно заряженной "родительской" прямолинейной вихревой линии, и двух окружающих их незацепленных замкнутых линий. Остальные четыре солитона, показанные в двух нижних рядах (рис. 19ж–к), заимствуют принятые в топологии названия для структур, состоящих только из замкнутых вихревых линий; мы добавляем к традиционным названиям + для указания наличия в скелетах и незамкнутых линий. В случае рис. 19ж это тривиальный узел вместе с тремя незамкнутыми линиями (при их изъятии единственная замкнутая линия плавными деформациями может быть преобразована в окружность). В случае рис. 19з имеются две однократно зацепленные замкнутые вихревые линии (зацепление Хопфа), опоясывающие три незамкнутые линии. Замкнутая линия на рис. 19и — узловая (трилистник), внутри неё имеются три незамкнутые линии. Наконец, рис. 19к иллюстрирует узел, а точнее зацепление Соломона, в котором две замкнутые вихревые линии дважды зацеплены; дополнительно присутствуют две незамкнутые вихревые линии.

Другой, важный для классификации и специфический для диссипативных солитонов, фактор связан со структурой энергетических потоков — полем вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}_3$ . Заметим, что волновой фронт многих консервативных солитонов, например, в среде с насыщающейся кер-



**Рис. 20.** (В цвете онлайн.) Лазерные солитоны с различной структурой энергетических потоков и топологией. (а) Прецессор. (б–д) Яблочные солитоны. (е) Солитон-Хопф+. (ж) Трилистник+. Верхний ряд: вихревые линии со сверхособыми точками (кружки). Нижний ряд: дивергенция потока энергии излучения  $S_3$ , области со знаком + ( $\text{div } S_3 > 0$ , красный цвет) отвечают источникам излучения, со знаком минус (–) ( $\text{div } S_3 < 0$ , синий цвет) соответствуют стокам.

ровской нелинейностью [96] плоский, так что можно считать  $\nabla\Phi_3 = 0$  и  $S_3 = 0$ , следовательно, для таких солитонов потоки энергии излучения отсутствуют. Для диссипативных солитонов локальной характеристикой векторного поля  $S_3$  служит дивергенция потока энергии: в зависимости от того, входит ли энергия преимущественно внутрь или выходит из элементарного объёма через его границы,  $\nabla_3 S_3 < 0$  (первый вариант, сток энергии) или  $\nabla_3 S_3 > 0$  (второй вариант, источник энергии). Вообще говоря, стоки и источники энергии следовало бы определять с явным учётом диссипативных факторов в уравнении (2.3), но расчёты показывают лишь слабое влияние этих факторов ввиду малости коэффициентов диффузии и приблизительного динамического баланса усиления и поглощения.

Кроме того, важны наличие и число сверхособых точек на вихревых линиях, в которых изменяется знак  $S_\tau$  — продольной (вдоль вихревой линии) составляющей потока энергии. Число таких точек на незамкнутых вихревых линиях должно быть нечётным, поскольку на периферии поток энергии направлен от центра солитона, а на замкнутых линиях — чётным.

На рисунке 20 мы показываем сверхособые точки для ряда солитонов, представленных на рис. 19. Как видно из рис. 20б–д, хотя для всех четырёх типов солитонов-яблок топология одинакова, они различаются между собой по числу сверхособых точек на незамкнутой и замкнутой вихревых линиях. Укажем также, что среди устойчивых лазерных солитонов имеются "твердотельные" (распределения интенсивности и потоков энергии при распространении не меняются с точностью до перемещений и поворотов в целом) и "деформирующиеся" солитоны с квазипериодически осциллирующими по мере распространения распределениями интенсивности и потоков энергии.

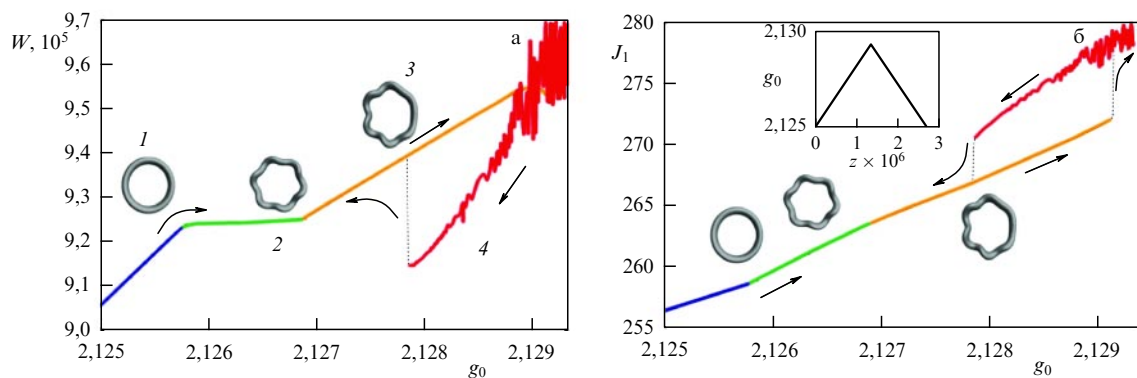
Солитоны-яблоки различных типов существуют в разных областях пространства параметров, частично перекрывающихся. Мы выберем в качестве основного варьируемого параметра линейный коэффициент усиления  $g_0$ . Из рисунка 21а можно увидеть диапазоны существования и устойчивости различных яблочных солитонов. Перекрытие этих областей для асимметричных стационарного "твердотельного" и осциллирующего деформирующегося солитонов принципиально позволяет

говорить о возможности защищённой от возмущений записи информации не только топологическими характеристиками, но и энергетической характеристикой — числом сверхособых точек вихревых линий.

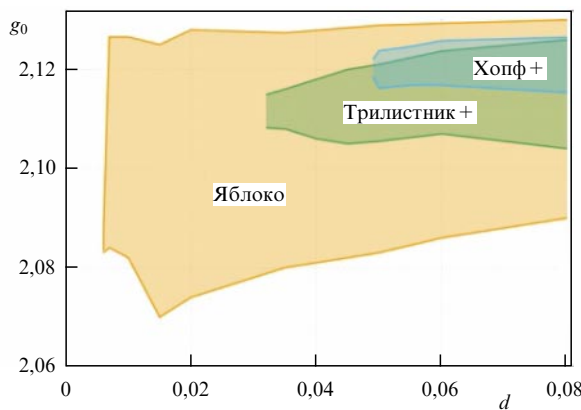
### 7.3. Гистерезисные явления

Указанное сохранение топологических и энергетических характеристик (информации) возможно лишь при определённых ограничениях на изменения параметров. Пусть с увеличением длины распространения  $z$  линейный коэффициент усиления  $g_0$  сначала плавно возрастает, пересекая границу устойчивости исходного типа солитонов, а затем также плавно возвращается к исходному значению (см. вставку на рис. 21б). Как видно из рис. 21, для асимметричных стационарного "твердотельного" и осциллирующего солитонов имеет место обратимый гистерезис — после восстановления параметров число сверхособых точек также восстанавливается (при неизменности топологических характеристик). Такой гистерезис можно связать с фазовым переходом первого рода — жёстким возбуждением, или субкритической бифуркацией. В то же время переходы между идеальным симметричным яблоком и асимметричными яблоками двух типов, при которых сохраняется не только топология, но и число сверхособых точек, могут быть сопоставлены с фазовыми переходами второго рода — мягким возбуждением, или суперкритической бифуркацией.

Как видно из рис. 22, области устойчивости обсуждаемых солитонов перекрываются. Поэтому при изменении линейного коэффициента усиления с пересечением границ областей устойчивости неизбежно изменение топологии солитона. Моделирование показывает, что изменение топологии лазерного солитона происходит посредством топологических реакций двух типов (рис. 23). Первый тип (рис. 23а–г) представляет приближение и касание двух вихревых линий с последующим переключением их ветвей. В точке касания касательные к линиям, отвечающие их ориентации, противоположны. Такая реакция может проходить в обе стороны. Ко второму типу относятся реакции (рис. 23д–ж), включающие в себя сильный изгиб вихревой линии и затем отрыв от неё замкнутой вихревой линии и, возможно, последовательное отделение нескольких таких петель.



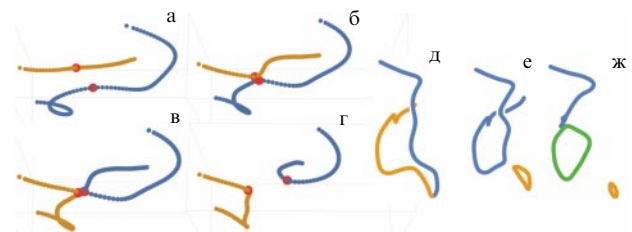
**Рис. 21.** (В цвете онлайн.) Диапазоны устойчивости яблочных солитонов различных типов и гистерезисное изменение энергии солитона (а) и минимального собственного значения тензора инерции (б) при медленном продольном возрастании и убывании (стрелки) линейного коэффициента усиления (показанного на вставке). На рисунке а участок 1 отвечает режиму симметричного яблока, 2 — яблока с азимутальной модуляцией замкнутой вихревой линии, 3 — асимметричному яблоку, 4 — асимметричному осциллирующему яблоку.



**Рис. 22.** (В цвете онлайн.) Области устойчивости солитонов: яблока (симметричного), трилистника + и Хопфа + на плоскости параметров коэффициент диффузии  $d$  — линейный коэффициент усиления  $g_0$ .

При медленном изменении коэффициента усиления, аналогичном показанному на вставке рис. 21б, сравнительно быстро происходит каскад указанных топологических реакций (см. детали в [56]) — их результат иллюстрируется на рис. 24а. Начальной структурой здесь служил солитон трилистник +, который при медленном возрастании коэффициента усиления преобразовывался сначала в солитон Хопф +, а затем после непродолжительных промежуточных топологических реакций — в яблочный солитон, устойчивый в наиболее широкой области параметров. При медленном убывании коэффициента усиления солитон сохраняется как яблочный. Таким образом, здесь имеет место необратимый гистерезис солитона. Причём при одном и том же значении коэффициента усиления энергия конечного яблочного солитона заметно меньше энергии исходного топологически более сложного трилистника +.

На рисунке 24б показано изменение с возрастанием и убыванием коэффициента усиления топологического инварианта  $S_g$  (минимального числа пересечений). Если исходная структура — устойчивый трилистник +, то при убывании коэффициента усиления он исчезает с установлением во всей системе безгенерационного режима. В случае возрастания коэффициента усиления трилистник + превращается в солитон Хопф +. Далее, если коэффи-



**Рис. 23.** (В цвете онлайн.) Два типа элементарных топологических реакций с вихревыми линиями диссипативных структур: противонаправленное пересоединение (а – г) и отрыв замкнутой вихревой линии от родительской (д – ж).

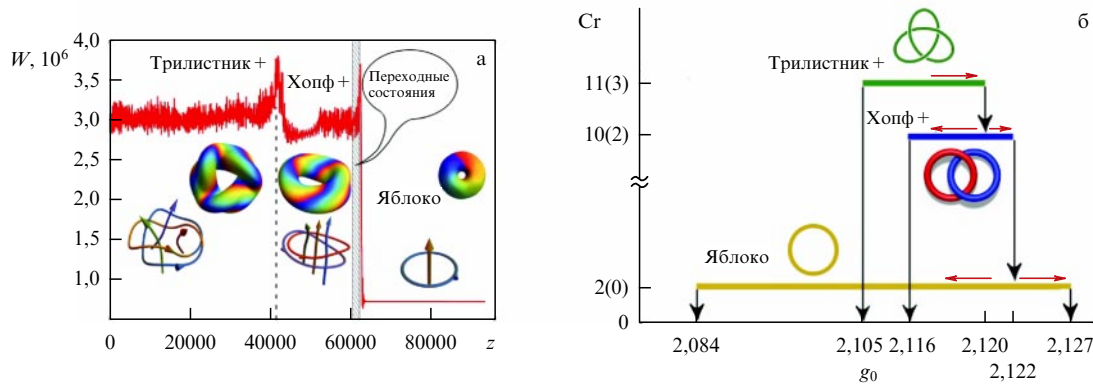
циент усиления убывает, то, как и в предыдущем случае, устанавливается безгенерационный режим, тогда как при возрастании коэффициента усиления происходит переход к яблочному солитону. Последний исчезает с установлением безгенерационного режима как при возрастании, так и при убывании коэффициента усиления. Отметим, что при всех топологических преобразованиях топологическая структура упрощается — уменьшается топологический инвариант  $S_g$ . Кроме того, рис. 24б показывает, в каких пределах сохраняются топологические инварианты, — эти пределы совпадают с пределами устойчивости соответствующих солитонов.

#### 7.4. Трубочатые солитоны

В этом разделе мы рассмотрим светлые солитоны (с конечной мощностью излучения), которые являются промежуточными между двумерными и трёхмерными. В примыкающем к двумерной геометрии случае эту задачу можно рассматривать как выход за рамки приближения среднего поля ввиду учёта продольного изменения огибающей поля. В противоположном пределе переход к модели неограниченной нелинейной среды реализуется, например, в кольцевых резонаторах с достаточно большой длиной.

Для скалярных солитонов, следуя [77], исходим из управляющего уравнения (2.2). Рассмотрим сначала симметричное распределение с прямолинейной вихревой линией (ср. с (5.8)):

$$E(\mathbf{r}_3, z) = A_{|m|}(r) \exp(-iq_{|m|}z + im\varphi). \quad (7.10)$$



**Рис. 24.** (В цвете онлайн.) (а) Изменение энергии солитона с возрастанием линейного коэффициента усиления с последовательными скачкообразными преобразованиями солитона трилистник+ в солитон Хофф+ и затем в яблочный солитон, который сохраняется при убывании коэффициента усиления. На вставках показаны поверхности изоинтенсивности и полные скелеты солитонов. (б) Зависимость минимального числа пересечений от коэффициента усиления. На шкале  $Sg$  числа слева указывают число пересечений всех вихревых линий, а правые (в скобках) — только замкнутых. Горизонтальные стрелки, направленные вправо, отвечают возрастанию коэффициента усиления, а влево — его убыванию. На вставках показаны замкнутые вихревые линии.

Здесь огибающая не зависит от переменной  $\tau$ , а для остальных переменных принята цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$  с  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; как и ранее,  $m$  — целочисленный топологический заряд. Подставив (7.10) в (2.2), получим уравнение, совпадающее с уравнением симметричных двумерных солитонов (5.9) при замене  $q \rightarrow v$ . Однако из устойчивости двумерной структуры не следует устойчивости соответствующей трёхмерной, так как в последнем случае важна, кроме того, устойчивость относительно возмущений, модулированных по дополнительной координате  $\tau$ . Более того, такие структуры оказываются неустойчивыми относительно малых возмущений [77].

Действительно, хотя решения вида (7.10) с  $m = 1$  и существуют, они оказываются неустойчивыми из-за изгибов и фрагментации прямолинейной вихревой линии. Тем не менее стабилизация вихревой линии становится возможной при переходе от неограниченной среды к кольцевому резонатору с конечной длиной  $L$ , что реализуется, например, для волоконного лазера. Стабилизирующая роль конечной длины обусловлена тем, что она ограничивает набор возможных "опасных" возмущений, служа их фильтром.

Динамику схемы с конечной длиной резонатора  $L$  описываем управляющим уравнением в неподвижной (лабораторной) системе координат (в которой частотная дисперсия учитывается членом с  $\partial^2 E / \partial z^2$ , поскольку в низшем приближении из уравнения переноса следует  $\partial^2 E / \partial t^2 = v_g^2 (\partial^2 E / \partial z^2)$ ) и периодическим по  $z$  условием:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} - (i + d_{\perp}) \Delta_{\perp} E - (i + d_{\parallel}) D_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = f(|E|^2) E, \quad (7.11)$$

$$E(x, y, z + L, t) = E(x, y, z, t). \quad (7.12)$$

Расчёты [77] показывают наличие критической длины резонатора  $L_{cr}$ , зависящей от топологического заряда  $m$ . Трубчатые структуры с прямолинейной вихревой линией устойчивы в резонаторах с докритической длиной,  $L < L_{cr}$  (рис. 25а). При превышении критической длины вихревая линия изгибается (рис. 25б, г). Линии с зарядом  $|m| > 1$  при несколько большей длине резонатора расщепляются на  $|m|$  линий с единичным зарядом (рис. 25в, д, е).

При ещё больших длинах  $L$  происходит фрагментация вихревых линий и формирование трёхмерных солитонов (при параметрах в области их устойчивости) или затухание поля.

Анализ поляризационных особенностей трубчатых солитонов при учёте эффектов слабой непараксиальности сводится к проведённому в разделе 5.3 для симметричных структур с прямолинейной вихревой линией [77]. Как мы видели, такие параксиальные солитоны устойчивы в резонаторах с докритической длиной. В этом случае поляризационная структура в произвольных поперечных сечениях трубчатого солитона неизменна и совпадает с таковой для двумерного лазерного солитона (см. рис. 12).

## 8. Тёмные топологические солитоны

В разделе 7 для схем с различной геометрической размерностью мы рассматривали светлые лазерные солитоны, поле которых на периферии быстро убывает, обеспечивая конечность энергии солитона. Вместе с тем имеет смысл и рассмотрение тёмных солитонов, с ненулевым и однородным уровнем интенсивности на периферии и локализованным провалом интенсивности с центральной области солитона. Хотя энергия "идеальных" тёмных солитонов бесконечно велика, что не может быть реализовано экспериментально, такие модели при достаточно широкой апертуре схемы адекватно описывают центральную область солитонов, слабо чувствительную к поведению поля в удалённой периферийной области. Тем самым тёмные солитоны, как и консервативные схемы [1], доступны экспериментально. При этом они могут обладать рядом преимуществ над светлыми, включая более широкую область устойчивости в пространстве параметров.

Тёмные лазерные солитоны существуют в схемах с различной размерностью, но здесь мы ограничимся анализом трёхмерных схем, допускающих структуры с наиболее разнообразной топологией. Для трубчатых тёмных солитонов анализ близок к представленному в разделе 7.4. Специфика тёмных солитонов, отличающая их от светлых, заключается в граничных условиях на периферии. Отметим высокую чувствительность результатов



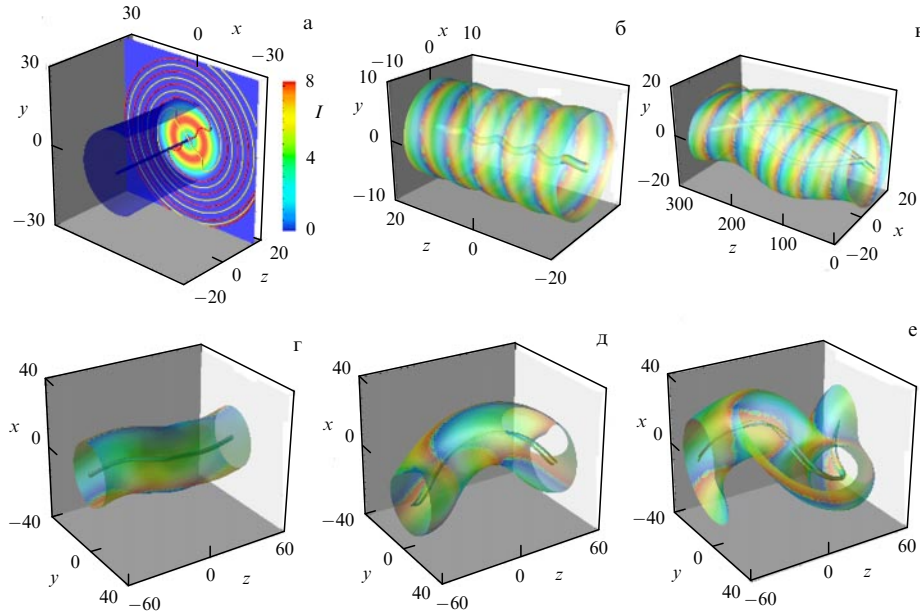


Рис. 25. (В цвете онлайн). Поверхности изоинтенсивности для трубчатых солитонов с топологическим зарядом  $m = 1$  (а) и  $m = 2$  (б–е) в резонаторе длиной  $L = 36$  (а), 42 (б), 300 (в) и 110 (г–е).

к этим условиям. В представленных ниже численных расчётах [97] для снижения этой зависимости использовались "прозрачные граничные условия" с минимизацией фиктивного отражения от краёв расчётной области посредством выбора поперечного профиля потерь излучения в периферийной области.

Вновь исходным служит управляющее уравнение (2.2). Для симметричного распределения с прямолинейной вихревой линией поле имеет вид (7.10), но с иной асимптотикой на периферии:

$$\frac{d|A_m(r)|^2}{dr} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (8.1)$$

Для радиальной функции  $A_m(r)$  получим уравнение, совпадающее с уравнением симметричных двумерных солитонов (5.9) при замене  $q \rightarrow v$ . Однако, как и в случае светлых трубчатых солитонов (см. раздел 7.4), из устойчивости двумерной структуры не следует устойчивости соответствующей трёхмерной, так как в последнем случае важна ещё устойчивость к возмущениям, модулированным по дополнительной координате  $t$ .

Решения вида (8.1) с  $m = 1$  также неустойчивы из-за изгибов и фрагментации прямолинейной вихревой линии. Стабилизация вихревой линии вновь оказывается возможной при переходе от неограниченной среды к кольцевому резонатору с конечной длиной  $L$ , что реализуется, например, для волоконного лазера. Динамику такой схемы описываем управляющим уравнением (7.11) и периодическим по  $z$  условием (7.12). Начальным условием служит симметричный тёмный солитон с зарядом  $m = 1$ .

В отличие от светлых солитонов, тёмный солитон при малых длинах резонатора,  $L < L_{\min}$  (при выбранных параметрах  $L_{\min} \approx 5$ ), со временем разрушается: его центр в поперечной плоскости начинает двигаться по спирали и в конце концов уходит на периферию, в результате во всей внутренней области резонатора устанавливается режим однородной генерации. Далее при

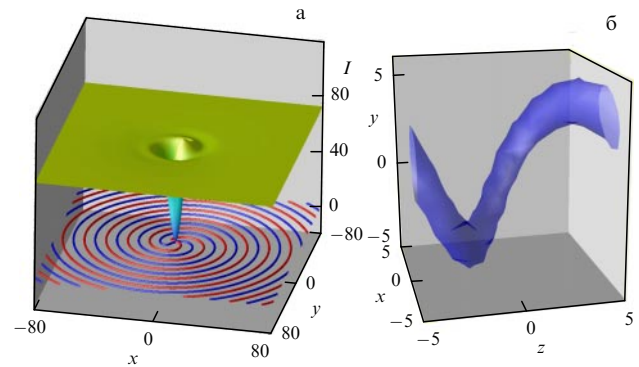
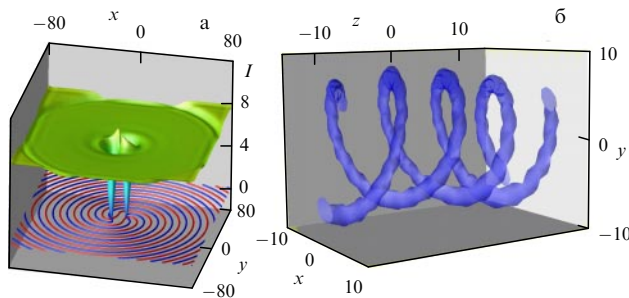


Рис. 26. (В цвете онлайн.) (а) Распределение интенсивности для тёмного солитона с топологическим зарядом  $m = 1$  при  $z = L/2$  и линии  $\text{Re } E = 0$  и  $\text{Im } E = 0$  (ниже). (б) Вихревая линия, показанная поверхностью изоинтенсивности по уровню  $I/I_{\max} = 0,06$  при  $z = L/2$ ;  $g_0 = 2,15$ ,  $d = 0,05$ ,  $L = 10$ .

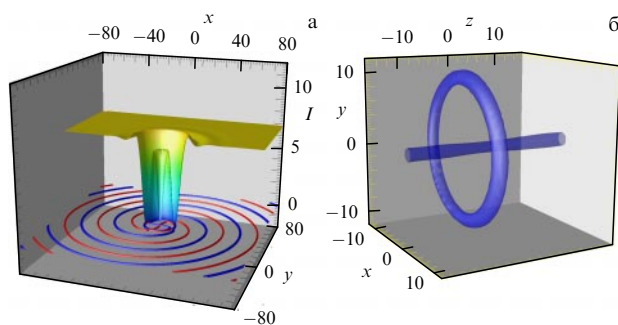
длинах  $L$ , превышающих критическое значение  $L_{\max}$  ( $L_{\max} \sim 20$ ), исходно одиночная вихревая линия фрагментируется, как и для неограниченной среды, указанным выше образом. Поэтому будем рассматривать только схемы с промежуточными длинами резонатора,  $L_{\min} < L < L_{\max}$ . Здесь следует различать два варианта стабилизации вихревой линии.

Во-первых, вихревая линия может просто искривиться, что приводит к устойчивому асимметричному распределению поля (рис. 26). Ещё более устойчивыми и при этом существующими в более широком интервале длин резонатора оказываются структуры, в которых вихревые линии являются отрезками "двойной спирали" с одинаковыми топологическими зарядами, задаваемыми изменённым начальным условием (рис. 27). В зависимости от длины  $L$  спирали делают один ( $L \approx 12$ ) или два ( $L \approx 25$ ) оборота. При небольших отклонениях от этих длин спирали сохраняют устойчивость, но теряют винтовую симметрию. Структуры с двумя спиральными вихревыми линиями также являются жёсткими.





**Рис. 27.** (В цвете онлайн.) (а) Распределение интенсивности для тёмного солитона с суммарным топологическим зарядом  $m = 2$  при  $z = L/2$  и линии  $\text{Re } E = 0$  и  $\text{Im } E = 0$  (ниже). (б) Двойная вихревая линия (поверхность изоинтенсивности по уровню  $I/I_{\text{max}} = 0,06$ );  $g_0 = 2,15$ ,  $d = 0,05$ ,  $L = 25,6$ .



**Рис. 28.** (В цвете онлайн.) (а) Распределение интенсивности в поперечном сечении в плоскости круговой вихревой линии и линии  $\text{Re } E = 0$ ,  $\text{Im } E = 0$  (ниже) для тёмного солитона. (б) Поверхности изоинтенсивности по уровню  $I/I_{\text{max}} = 0,06$ , демонстрирующие вихревые линии;  $g_0 = 2,117$ ,  $d = 0,045$ ,  $L = 30$ .

Во-вторых, интересный сценарий стабилизации прямолинейной вихревой линии тёмного солитона реализуется при меньших значениях линейного коэффициента усиления  $g_0$ . В этом случае структура сохраняет симметрию, но возникает дополнительная замкнутая (круговая) вихревая линия (рис. 28). Круговая линия движется с заметной скоростью вдоль прямолинейной вихревой линии без потери симметрии. Такая структура сохраняет устойчивость даже при сравнительно больших длинах резонатора. Заметим, что родственная структура представлена в [13] для другой системы — оптического параметрического генератора в неограниченной среде с квадратичной нелинейностью.

Как мы видели, продольные ограничения реальной схемы позволяют формировать устойчивые топологические (вихревые) тёмные солитоны. Область их устойчивости весьма велика, она практически совпадает с областью классической бистабильности плосковолновых режимов. Естественный вопрос о влиянии поперечных ограничений схемы на топологические локализованные структуры обсуждается в разделе 10.

## 9. Квантовые флуктуации

Квантовые флуктуации поля лазерных солитонов и среды, в которой они распространяются, представляют интерес не только с общенаучной, но и с практической точки зрения, поскольку эти флуктуации ограничивают предельные возможности информационных приложений

солитонов. Для консервативных временных солитонов теоретически предсказаны и экспериментально реализованы сжатые состояния, отвечающие солитонам, с уровнем шумов, меньшим, чем уровень шума в обычном когерентном состоянии [98–100]. Аналогичные исследования квантовых флуктуаций пространственных консервативных солитонов выполнены в [101–103].

Для диссипативных оптических солитонов квантовые эффекты исследованы не столь детально. Результаты по генерации сжатого излучения таких солитонов в схеме параметрического генератора суммированы в монографии [104]. В работах [105–107] (см. также [5]) для пространственных солитонов в широкоапертурном пассивном нелинейном интерферометре с когерентным поддерживающим излучением выведено квантовое уравнение Ланжевена. Решение этого уравнения в приближении слабости флуктуаций (линеаризованный подход) позволило найти статистическую дисперсию флуктуаций среднего положения и импульса солитона и условия реализации сжатых состояний.

Однако исследования квантовых флуктуаций лазерных, в особенности топологических лазерных, солитонов в настоящее время только начинаются. Хотя подход здесь имеет много общего с теорией солитонов в нелинейном интерферометре, в лазерном случае имеется и своя существенная специфика. Прежде всего, для лазеров с насыщающимся поглощением важен учёт флуктуаций активной и пассивной среды, обеспечивающей резонансную нелинейность (в случае интерферометра нелинейность керровская и нерезонансная). Далее, для топологических лазерных солитонов существенна угловая селективность потерь в схеме, в отсутствие которой область устойчивости этих солитонов в пространстве параметров сжимается в точку [5].

В данном разделе мы прежде всего приведём управляющее уравнение для описания флуктуаций двумерных лазерных солитонов [108]. Это уравнение в случае быстрого отклика среды обобщает классическое управляющее уравнение (5.1) благодаря введению в него стохастической ланжевенской силы. Рассматривается схема широкоапертурного лазера с насыщающимся поглощением и внешним поддерживающим излучением (классический аналог см. в разделе 6). При нулевой интенсивности поддерживающего излучения эта схема сводится к собственно лазерной, а при замене материальных уравнений для среды — к схеме нелинейного интерферометра с поддерживающим излучением. Затем, по аналогии со случаем нелинейного интерферометра, развивается подход линеаризации [109]. Далее, следуя [110], мы представим некоторые результаты численного решения полного квантового уравнения Ланжевена. Мы ограничимся здесь схемой широкоапертурного кольцевого лазера с насыщающимся поглощением при использовании прежнего приближения среднего поля (усреднения огибающей в продольном направлении).

### 9.1. Лазерные уравнения Гейзенберга – Ланжевена

Схема вывода управляющих уравнений следующая [108]. Общий гамильтониан системы складывается из гамильтониана поля в матрице без активных, с лазерным усилением (индекс  $g$ ), и пассивных, с насыщающимся поглощением (индекс  $a$ ), центров  $\hat{H}_{\text{field}}$ , гамильтонианов этих центров  $\hat{H}^g$  и  $\hat{H}^a$ , а также гамильтонианов взаимодействия поля и центров  $\hat{V}^g$  и  $\hat{V}^a$  (дипольное приближе-

ние); дополнительно учитываются нерезонансные потери и дисперсия в матрице, накачка и релаксационные процессы, приводящие к появлению в управляющих уравнениях стохастических ланжевеновских источников. Для поля гамильтониан строится из классического с заменой огибающей  $E$  оператором уничтожения  $\hat{a}$ ,  $E^*$  — оператором рождения  $\hat{a}^\dagger$ :

$$\hat{H}_{\text{field}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \int [\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}(\mathbf{r}_\perp, t) + \hat{a}(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t)] d\mathbf{r}_\perp \quad (9.1)$$

( $\hbar$  — приведённая постоянная Планка). Центры моделируются по-прежнему двухуровневыми схемами с частотой перехода  $\omega_c$ , отстроенной от несущей частоты  $\omega_0$  на  $\delta\omega$ . Энергии уровней обозначим через  $W_1$  и  $W_2$  ( $W_2 - W_1 = \hbar\omega_c$ ). Тогда

$$\hat{H}^g = \int [W_1\hat{\sigma}_1(\mathbf{r}_\perp, t) + W_2\hat{\sigma}_2(\mathbf{r}_\perp, t)] d\mathbf{r}_\perp, \quad (9.2)$$

$$\hat{H}^a = \int [W_1\hat{\pi}_1(\mathbf{r}_\perp, t) + W_2\hat{\pi}_2(\mathbf{r}_\perp, t)] d\mathbf{r}_\perp.$$

Операторы  $\hat{\sigma}_{1,2}$  и  $\hat{\pi}_{1,2}$  имеют смысл числа атомов на соответствующем уровне на единичной площади апертуры. Наконец, гамильтонианы взаимодействия поля с центрами

$$\hat{V}^g = \hbar g_g \int [\hat{\sigma}(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t) + \hat{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}(\mathbf{r}_\perp, t)] d\mathbf{r}_\perp, \quad (9.3)$$

$$\hat{V}^a = \hbar g_a \int [\hat{\pi}(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t) + \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t)\hat{a}(\mathbf{r}_\perp, t)] d\mathbf{r}_\perp.$$

В (9.3) постоянные взаимодействия поля и центров в дипольном приближении  $g_{g,a} = \mu_{g,a}[\omega_0/(2\varepsilon_0\hbar L)]^{1/2}$ ,  $\mu_{g,a}$  — матричные элементы дипольного перехода между рабочими уровнями центров,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость матрицы на несущей частоте,  $L$  — длина резонатора. Введены также операторы коллективной когерентности активных и пассивных центров  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\pi}$  [108]. Операторы подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{a}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] = \left(1 - \frac{1 - id}{2k_0^2} \Delta_\perp\right) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= [\hat{\sigma}_1(\mathbf{r}_\perp, t) - \hat{\sigma}_2(\mathbf{r}_\perp, t)] \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ [\hat{\sigma}_1(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= \hat{\sigma}(\mathbf{r}_\perp, t) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ [\hat{\sigma}_2(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= -\hat{\sigma}(\mathbf{r}_\perp, t) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= [\hat{\pi}_1(\mathbf{r}_\perp, t) - \hat{\pi}_2(\mathbf{r}_\perp, t)] \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ [\hat{\pi}_1(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= \hat{\pi}(\mathbf{r}_\perp, t) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ [\hat{\pi}_2(\mathbf{r}_\perp, t), \hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}'_\perp, t)] &= -\hat{\pi}(\mathbf{r}_\perp, t) \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Эффективный коэффициент диффузии по-прежнему считается малым,  $0 < d \ll 1$ .

Релаксация центров и некогерентная широкополосная накачка учитываются введением скоростей распада когерентности ( $\Gamma$  и  $\gamma$ ), населённостей ( $\Gamma_{1,2}$  и  $\gamma_{1,2}$ ) рабочих уровней (активных и пассивных) центров и средних скоростей заселения верхнего уровня активных центров  $R_g$  и нижнего уровня пассивных центров  $R_a$ . Считаем, что оба уровня активных и пассивных центров распадаются со скоростями  $\Gamma_{1,2}$  и  $\gamma_{1,2}$  на некоторые уровни, отличные

от рабочих. Для простоты положим  $\Gamma = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ ,  $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ , что строго справедливо для разреженных атомных газов. Обозначим через  $\kappa$  скорость убывания поля в резонаторе при осевом распространении волны. Тогда управляющие уравнения Гейзенберга — Ланжевена формулируются следующим образом:

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial t} = (i + d) \frac{v_g}{2k_0} \Delta_\perp \hat{a} - \frac{\kappa}{2} \hat{a} + g_g \hat{\sigma} + g_a \hat{\pi} + \hat{F}_a, \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = -(\Gamma - i\delta\omega) \hat{\sigma} + g_g(\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1) \hat{a} + \hat{F},$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_1}{\partial t} = -\Gamma_1 \hat{\sigma}_1 + g_g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger) + \hat{F}_1, \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial t} = R_g - \Gamma_2 \hat{\sigma}_2 - g_g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger) + \hat{F}_2,$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial t} = -(\gamma - i\delta\omega) \hat{\pi} + g_a(\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_1) \hat{a} + \hat{G},$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_1}{\partial t} = R_a - \gamma_1 \hat{\pi}_1 + g_a(\hat{\pi}^\dagger \hat{a} + \hat{\pi} \hat{a}^\dagger) + \hat{G}_1, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2}{\partial t} = -\gamma_2 \hat{\pi}_2 - g_a(\hat{\pi}^\dagger \hat{a} + \hat{\pi} \hat{a}^\dagger) + \hat{G}_2.$$

Корреляционные соотношения для ланжевеновских источников  $\hat{F}$  и  $\hat{G}$  следуют из флуктуационно-диссипативной теоремы при использовании результатов [111]. Выпишем ненулевые корреляторы, обозначаемые угловыми скобками:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_i^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t) \hat{F}_j(\mathbf{r}'_\perp, t') \rangle &= \langle \hat{F}_i^\dagger \hat{F}_j \rangle \delta(t - t') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ \langle \hat{F}_i(\mathbf{r}_\perp, t) \hat{F}_j(\mathbf{r}'_\perp, t') \rangle &= \langle \hat{F}_i \hat{F}_j \rangle \delta(t - t') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \quad i, j = 1, 2, \\ \langle \hat{F}_2 \hat{F}_2 \rangle &= \Gamma_2 \bar{\sigma}_2 + R_g(1 - s_g), \quad \langle \hat{F}^\dagger \hat{F} \rangle = \Gamma_1 \bar{\sigma}_2 + R_g, \\ \langle \hat{F}_1 \hat{F}_1 \rangle &= \Gamma_1 \bar{\sigma}_1, \quad \langle \hat{F}_1 \hat{F} \rangle = \Gamma_1 \bar{\sigma}, \\ \langle \hat{F} \hat{F}_2 \rangle &= \Gamma_2 \bar{\sigma}, \quad \langle \hat{F} \hat{F}^\dagger \rangle = \Gamma_2 \bar{\sigma}_1. \end{aligned} \quad (9.10)$$

В (9.10) помимо средней скорости накачки  $R_g$  введён параметр степени её регулярности  $s_g$ ,  $0 < s_g < 1$ . При  $s_g = 0$  центры возбуждаются и переходят на верхний рабочий уровень независимо друг от друга и случайно во времени (пуассоновская накачка), а при  $s_g = 1$  накачка строго регулярная, без шумов (субпуассоновская). При введении аналогичного параметра для накачки на нижний уровень пассивных центров  $s_a$  получим следующие выражения для корреляторов:

$$\begin{aligned} \langle \hat{G}_i^\dagger(\mathbf{r}_\perp, t) \hat{G}_j(\mathbf{r}'_\perp, t') \rangle &= \langle \hat{G}_i^\dagger \hat{G}_j \rangle \delta(t - t') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ \langle \hat{G}_i(\mathbf{r}_\perp, t) \hat{G}_j(\mathbf{r}'_\perp, t') \rangle &= \langle \hat{G}_i \hat{G}_j \rangle \delta(t - t') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \quad i, j = 1, 2, \\ \langle \hat{G}_1 \hat{G}_1 \rangle &= \gamma_1 \bar{\pi}_1 + R_a(1 - s_a), \quad \langle \hat{G} \hat{G}^\dagger \rangle = \gamma_2 \bar{\pi}_1 + R_a, \\ \langle \hat{G}^\dagger \hat{G} \rangle &= \gamma_1 \bar{\pi}_2, \quad \langle \hat{G}_2 \hat{G}_2 \rangle = \gamma_2 \bar{\pi}_2, \\ \langle \hat{G} \hat{G}_2 \rangle &= \gamma_2 \bar{\pi}, \quad \langle \hat{G}_1 \hat{G} \rangle = \gamma_1 \bar{\pi}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Приведённые операторные уравнения полностью описывают рассматриваемую лазерную схему, но они не очень удобны для анализа и расчётов ввиду некоммутативности операторов. Поэтому в квантовой электродинамике [112] и квантовой оптике [41] широко применяется  $c$ -числовое представление, в котором операторы заменяются  $c$ -числовыми функциями. Такая процедура оправдана для вычисления квантовых средних значений опера-

тора, который состоит из суммы нормальных произведений операторов рождения и уничтожения (операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения, порядок коммутирующих операторов, естественно, безразличен). Операторы всегда можно привести к нормальному виду, воспользовавшись коммутационными соотношениями. Применительно к уравнениям (9.7) – (9.9) нормальное произведение операторов имеет вид  $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}^\dagger \hat{\pi}^\dagger \hat{\sigma}_2 \hat{\pi}_2 \hat{\sigma}_1 \hat{\pi}_1 \hat{\sigma} \hat{a}$  [41]. Наконец, требуется переформулировать вид ланжеоновских источников для нормально упорядоченных парных средних. Таким образом, вместо (9.7) – (9.9) получаем

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (i + d) \frac{v_g}{2k_0} \Delta_\perp a - \frac{\kappa}{2} a + g_g \sigma + g_a \pi + F_a, \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -(\Gamma - i\delta\omega)\sigma + g_g(\sigma_2 - \sigma_1)a + F, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} &= -\Gamma_1\sigma_1 + g_g(\sigma^*a + \sigma a^*) + F_1, \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} &= R_g - \Gamma_2\sigma_2 - g_g(\sigma^*a + a^*\sigma) + F_2, \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} &= -(\gamma - i\delta\omega)\pi + g_a(\pi_2 - \pi_1)a + G, \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial t} &= R_a - \gamma_1\pi_1 + g_a(\pi^*a + a^*\pi) + G_1, \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial t} &= -\gamma_2\pi_2 - g_a(\pi^*a + \pi a^*) + G_2. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Корреляционные соотношения для ланжеоновских источников приводятся ниже (см. (9.20)).

Управляющие уравнения (9.12) – (9.14) полностью описывают рассматриваемую лазерную схему. Они могут быть существенно упрощены в случае быстрого по сравнению со скоростью изменения огибающей поля отклика среды, т.е. при условиях  $\kappa \ll \Gamma, \Gamma_{1,2}, \gamma, \gamma_{1,2}$ . Это позволяет адиабатически исключить из рассмотрения переменные активных и пассивных центров и получить замкнутое уравнение для огибающей поля. Для простоты предположим также, что скорости релаксации верхних и нижних рабочих уровней центров существенно различаются ( $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  и  $\gamma_1 \ll \gamma_2$ ). При этих условиях можно считать, что после короткого переходного периода центры мгновенно отслеживают состояние поля. Полагая, что в (9.13) и (9.14) временные производные равны нулю, а частоты рабочих переходов в центрах совпадают с несущей частотой ( $\delta\omega = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} \Gamma\sigma &= g_g(\sigma_2 - \sigma_1)a + F, \\ \Gamma_1\sigma_1 &= g_g(\sigma^*a + \sigma a^*) + F_1, \\ \Gamma_2\sigma_2 &= R_g - g_g(\sigma^*a + a^*\sigma) + F_2, \\ \gamma\pi &= g_a(\pi_2 - \pi_1)a + G, \\ \gamma_1\pi_1 &= R_a + g_a(\pi^*a + a^*\pi) + G_1, \\ \gamma_2\pi_2 &= -g_a(\pi^*a + \pi a^*) + G_2. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Выражая из алгебраических соотношений (9.15) и (9.16) атомные переменные через амплитуду поля  $a$  и вводя обозначения

$$I_g = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4g_g^2}, \quad I_a = \frac{\gamma_1\gamma_2}{4g_a^2}, \quad g_0 = \frac{R_g}{\kappa I_g}, \quad a_0 = \frac{R_a}{\kappa I_a}, \quad (9.17)$$

получим замкнутое управляющее уравнение для поля в  $c$ -числовом представлении:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (i + d) \frac{v_g}{2k_0} \Delta_\perp a + \frac{\kappa}{2} f(|a|^2)a + \Phi_a + \Phi_g, \quad (9.18)$$

$$f(|a|^2) = -1 + \frac{g_0}{1 + |a|^2/I_g} - \frac{a_0}{1 + |a|^2/I_a}. \quad (9.19)$$

Здесь  $|a|^2 = I$  представляет интенсивность генерации или число фотонов,  $g_0$  и  $a_0$  — линейные коэффициенты усиления и резонансного поглощения,  $I_g$  и  $I_a$  — интенсивности насыщения усиления и поглощения в отсутствие частотных расстрой.

Наконец, корреляционные соотношения для ланжеоновских источников  $\Phi_a$  и  $\Phi_g$ :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i^*(t, \mathbf{r}_\perp) \Phi_j(t', \mathbf{r}'_\perp) \rangle &= \langle \Phi_i^* \Phi_j \rangle \delta_{i,j} \delta(t - t') \delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ i, j &= g, a, \\ \langle \Phi_g^2 \rangle &= -\frac{R_g}{2I_g} \frac{a^2/I_g}{(1 + I/I_g)^2} \left(1 + \frac{s_g}{2}\right), \\ \langle |\Phi_g|^2 \rangle &= \frac{R_g}{I_g(1 + I/I_g)} - \frac{R_g}{2I_g} \frac{I/I_g}{(1 + I/I_g)^2} \left(1 + \frac{s_g}{2}\right), \\ \langle \Phi_a^2 \rangle &= \frac{R_a}{I_a} \frac{a^2/I_a}{(1 + I/I_a)^2} \left(1 - \frac{s_a}{2}\right), \\ \langle |\Phi_a|^2 \rangle &= \frac{R_a}{2I_a} \frac{I/I_a}{(1 + I/I_a)^2} \left(1 - \frac{s_a}{2}\right). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Отметим, что эти корреляторы пропорциональны соответствующим скоростям накачки  $R_g$  и  $R_a$ . При наличии внешнего когерентного поддерживающего излучения с частотой, сдвинутой относительно несущей на величину  $\delta\omega_{\text{in}} = (\kappa/2)\theta$ , и амплитудой, пропорциональной  $a_{\text{in}}$ , в (9.18) возникает дополнительный член (теперь несущей выбрана частота поддерживающего излучения):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= (i + d) \frac{v_g}{2k_0} \Delta_\perp a + \frac{\kappa}{2} (a_{\text{in}} + i\theta a) + \\ &+ \frac{\kappa}{2} f(|a|^2)a + (\Phi_a + \Phi_g). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Если ввести безразмерное время  $t' = (\kappa/2)t$ , безразмерные поперечные координаты  $(x', y') = (x, y)\sqrt{\kappa k_0}/v_g$  и безразмерные амплитуды поля  $E = a/\sqrt{I_a}$ ,  $E_{\text{in}} = a_{\text{in}}/\sqrt{I_a}$ , то (9.21) примет вид (штрихи опущены)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d)\Delta_\perp E + f(|E|^2)E + E_{\text{in}} + i\theta E + \chi_g Q_E, \quad (9.22)$$

где

$$\chi_g Q_E = \frac{1}{(\kappa/2)\sqrt{I_a}} (\Phi_a + \Phi_g), \quad \chi_g = \sqrt{\frac{\kappa k_0}{I_a v_g}}. \quad (9.23)$$

При пренебрежении стохастическим источником  $Q_E$  уравнение (9.22) переходит в классическое.

## 9.2. Линеаризованное уравнение

### Гейзенберга – Ланжевена

Следуя [109], исходим из уравнения для амплитуды электромагнитного поля  $E$  в  $c$ -числовом представлении (9.22). Рассмотрим слабые флуктуации поля в окрестности классического солитона с амплитудой  $e_s$  и соответ-

ствующей интенсивностью  $I_s = |e_s|^2$ :

$$E(t, x) = e_s(x) + \delta e(t, x). \quad (9.24)$$

Уравнение Ланжевена (9.22) переходит в детерминистическое классическое уравнение для поля солитона  $e_s(x)$  при пренебрежении стохастическим источником,  $\chi_g Q_E \rightarrow 0$ , и замене  $E(t, x) \rightarrow e_s(x)$ :

$$(i + d)\Delta_\perp e_s + i\theta_{in} e_s + f(I_s)e_s + E_{in} = 0. \quad (9.25)$$

При этом для "свободного" лазера без внешнего поддерживающего излучения величина  $\theta_{in} = v$  играет роль собственного значения, или нелинейного сдвига частоты излучения солитона относительно частоты продольной моды. При наличии поддерживающего излучения поле на периферии классического фундаментального солитона приближается к постоянной величине  $e_h =$

$= e_s(x \rightarrow \pm\infty)$ , которой отвечает интенсивность  $I_h = |e_h|^2 > 0$ . Для выделения этого фона в функции нелинейности удобно использовать также функцию  $\delta f_s(I_s) = f_s(I_s) - f_s(I_h)$ , где  $f_s(I_s) = f(I_s) - f(0)$ . Напомним, что функция  $f(I)$  (см. (2.1)) становится комплексной при наличии расстройек между частотами рабочих переходов усиления и поглощения и частотой продольной моды лазера. Мы будем рассматривать только стационарные (в классическом пределе) режимы, отвечающие режиму захвата.

Линеаризация (9.22) относительно  $\delta e$  приводит к неоднородному линейному стохастическому уравнению, которое в матричной форме имеет вид

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right)U(t, x) + LU(t, x) = iW(t, x), \quad (9.26)$$

где

$$U(t, x) = \{\delta e(t, x), \delta e^*(t, x)\}^{\text{Tr}}, \quad W(t, x) = \chi_g \{Q_E(t, x), Q_E^*(t, x)\}^{\text{Tr}}, \quad (9.27)$$

$$\gamma = -\text{Re} f(0) - \text{Re} f_s(I_h), \quad \theta = \theta_{in} + \text{Im} f(0) + \text{Im} f_s(I_h), \quad (9.28)$$

$$L = \begin{bmatrix} (1 - id)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \theta + \text{Im} f_{s1} - i \text{Re} f_{s1}, & -if_{s2} \\ -if_{s2}^*, & -(1 + id)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \theta - \text{Im} f_{s1} - i \text{Re} f_{s1} \end{bmatrix}, \quad (9.29)$$

$$f_{s1} = f_{s1}(x) = \delta f_s(I_s(x)) + I_s f'_s(I_s(x)), \quad f_{s2} = f_{s2}(x) = f'_s(I_s(x))e_s^2(x), \quad f'_s = \frac{df_s}{dI}. \quad (9.30)$$

Ищем решение (9.26) разложением по собственным функциям отвечающего (9.26) однородного уравнения. Собственная функция с собственным значением  $\lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} U(t, x) &= U_\lambda(x) \exp(-\gamma t - i\lambda t) + U_\lambda^\dagger(x) \exp(-\gamma t + i\lambda^* t), \\ U_\lambda^\dagger(x) &= \sigma_1 U_\lambda^*(x), \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ U_\lambda(x) &= \{\varphi_\lambda(x), \bar{\varphi}_\lambda(x)\}^{\text{Tr}}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Здесь  $\bar{\varphi}_\lambda^*(x) = \varphi_{-\lambda^*}(x)$ . Тогда для оператора  $L$  и эрмитово-сопряжённого оператора  $L^\dagger = \sigma_1 L^* \sigma_1 = L^{\text{Tr}*}$

$$(L + \lambda)U_\lambda = 0, \quad (L - \lambda^*)U_\lambda^\dagger = 0, \quad (L^\dagger + \lambda^*)U_\lambda^\dagger = 0. \quad (9.32)$$

Отсюда следует, что для каждого собственного значения  $L$  есть второй собственный вектор:

$$\begin{aligned} U_\lambda^\dagger(x) &= \sigma_1 U_\lambda^*(x) = \{\bar{\varphi}_\lambda^*(x), \varphi_\lambda^*(x)\}^{\text{Tr}} = \\ &= \{\varphi_{-\lambda^*}(x), \bar{\varphi}_{-\lambda^*}(x)\}^{\text{Tr}} = U_{-\lambda^*}(x). \end{aligned} \quad (9.33)$$

При  $\text{Re} \lambda = 0$  эти два вектора совпадают,  $U_\lambda^\dagger = U_\lambda$ . В отличие от оператора в случае среды с чисто "консервативной" керровской нелинейностью [105, 106], оператор  $\sigma_3 L$  не эрмитов, поэтому его собственные векторы не ортогональны. Здесь введена матрица Паули

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произвольное (слабое) возмущение представляется разложением по функциям сплошного и дискретного спектра. Динамика возмущений описывается с помощью функции Грина  $G$ :

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t, x, x') U(0, x') + \\ &+ \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(t - t', x, x') W(t', x'). \end{aligned} \quad (9.34)$$

В векторной записи функция Грина имеет вид

$$G(t, x, x') = \sum_\lambda \exp(-\gamma t - i\lambda t) |U_\lambda(x)\rangle \langle U_\lambda(x')|, \quad (9.35)$$

стохастическая функция  $W$  выражается как

$$\begin{aligned} W(t, x) &= \chi_g \sum_\lambda w_\lambda(t) |U_\lambda(x)\rangle, \\ w_\lambda(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [\varphi_\lambda^*(x) Q_E(t, x) + \varphi_{-\lambda^*}(x) Q_E^*(t, x)]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Сплошной спектр не даёт вклада в интересующие нас здесь среднеквадратичные флуктуации координаты центра и импульса солитона, поэтому ограничимся анализом только дискретного спектра (локализованные возмущения). Также для определения этих величин нам потребуются только нечётные (по отношению к центру солитона) собственные векторы дискретного спектра. К числу таких состояний принадлежит, прежде всего, нейтральная мода оператора  $L + i\gamma$ , которая соответствует собственному вектору задачи (9.32) с собственным значением  $-i\gamma$ . Это не зависящее от времени решение отве-

чающего (9.26) однородного уравнения

$$U_0(x) = \{\varphi_0(x), \varphi_0^*(x)\}^{\text{Tr}}, \quad \varphi_0(x) = -e_s'(x). \quad (9.37)$$

Наличие такого решения вызвано трансляционной инвариантностью управляющего уравнения (9.22) (в отсутствие ланжевеновского источника). Поскольку профиль классического фундаментального солитона симметричный, решение (9.36) нечётное.

Другие собственные значения и функции дискретного спектра  $L$  определяются численно. В расчёте фиксировалась конечная ширина лазера по координате  $x$ :  $w_x = 40$ , что практически не меняет характеристик классического солитона ввиду экспоненциального убывания его поля на периферии. Расчёт показывает, что дискретный спектр оператора  $L$  помимо собственного значения нейтральной моды  $-i\gamma$  содержит пару значений вида  $-i\lambda_{\pm 1} = \gamma_1 \mp i\omega_1$ . Это отличает лазерную схему от схемы интерферометра с керровской нелинейностью, где второе собственное значение также чисто мнимое ( $i\gamma$ ). Расщепление уменьшается по мере возрастания амплитуды поддерживающего излучения, что естественным образом объясняется приближением лазерной схемы к схеме интерферометра. Собственные функции дискретного спектра локализованы, и они экспоненциально убывают на периферии солитона, тогда как фаза в этой области линейно возрастает с удалением от центра. Расчёты, проведённые для параметров области устойчивого одномерного фундаментального солитона при  $g_0 = 2,08$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 10$ ,  $d_0 = 0,06$  и  $\theta_{\text{in}} = 0,047$ , приводят к значениям  $\gamma_1 = 0,69$ ,  $\omega_1 = 0,51$  для свободного лазера ( $E_{\text{in}} = 0$ ) и к  $\gamma_1 = 0,73$ ,  $\omega_1 = 0,15$  для лазера с амплитудой поддерживающего излучения  $E_{\text{in}} = 0,02$ .

Часть решения неоднородного уравнения (9.26), отвечающая вкладу функций дискретного спектра, записывается в виде

$$\begin{aligned} |U(t)\rangle &= u_0|U_0\rangle + \exp[-(\gamma - \gamma_1)t] \sum_{\pm 1} u_{\pm 1} \exp(\mp i\omega_1 t) |U_{\pm 1}\rangle + \\ &+ \chi_g \int_0^t dt' w_0(t') |U_0\rangle + \chi_g \exp[-(\gamma - \gamma_1)t] \sum_{\pm 1} \exp(\mp i\omega_1 t) \times \\ &\times \int_0^t dt' \exp[(\gamma - \gamma_1)t'] w_{\pm 1}(t') \exp(\pm i\omega_1 t') |U_{\pm 1}\rangle. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Здесь фигурируют коэффициенты разложения начальных возмущений и стохастической силы

$$u_{0,\pm 1} = \langle U_{0,\pm 1} | U(0) \rangle, \quad w_{0,\pm 1}(t) = \chi_g^{-1} \langle U_{0,\pm 1} | W(t) \rangle, \quad (9.39)$$

которые являются статистическими величинами. Теперь развитый в [105, 106] подход позволяет найти динамику возмущения координаты центра  $\delta x$  и импульса  $\delta p$  солитона, которые могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= i^{-1} \left\langle \frac{1}{2} (U_{+1}^\dagger + U_{-1}^\dagger) \sigma_3 \right| U(t) \rangle, \\ \delta p(t) &= i^{-1} \langle U_0^\dagger \sigma_3 | U(t) \rangle. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Окончательно получаем статистически усреднённые квадраты флуктуаций этих величин:

$$\langle \langle \delta \hat{x}^2(t) \rangle \rangle = 4\chi_g^2 U_{\text{im}}^2 \overline{w_0^2} t +$$

$$\begin{aligned} &+ \chi_g^2 U_{11}^2 \left\{ 1 + \frac{\overline{w_1^2}}{\gamma - \gamma_1} (1 - \exp[-2(\gamma - \gamma_1)t]) \right\} + \\ &+ \chi_g^2 U_{11}^2 \frac{\overline{w_1^2}}{|\kappa_1|} \left\{ \cos \vartheta_{11} - \cos(\vartheta_{11} - 2\omega_1 t) \exp[-2(\gamma - \gamma_1)t] \right\} + \\ &+ 8\chi_g^2 U_{11} U_{\text{im}} \frac{\overline{w_0 w_1}}{|\kappa_1|} \times \\ &\times \left\{ \sin \vartheta_{01} - \sin(\vartheta_{01} - \omega_1 t) \exp[-(\gamma - \gamma_1)t] \right\}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \delta \hat{p}^2(t) \rangle \rangle &= \chi_g^2 |U_{01}|^2 \left\{ \exp[-2(\gamma - \gamma_1)t] + \right. \\ &+ \frac{\overline{w_1^2}}{\gamma - \gamma_1} (1 - \exp[-2(\gamma - \gamma_1)t]) + \\ &+ \left. \frac{\overline{w_1^2}}{|\kappa_1|} (\cos \vartheta_{\kappa} - \cos(\vartheta_{\kappa} - 2\omega_1 t) \exp[-2(\gamma - \gamma_1)t]) \right\}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

При выводе (9.41) и (9.42) использовались определения для скалярных произведений неортогональных собственных векторов

$$\begin{aligned} U_{11} &= \langle U_{-1}^\dagger \sigma_3 | U_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx (|\varphi_1|^2 - |\varphi_{-1}|^2), \\ U_{01} &= \langle U_0^\dagger \sigma_3 | U_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\varphi_0^* \varphi_1 - \varphi_0 \varphi_{-1}^*), \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$U_{\text{im}} = \text{Im } U_{01}$$

и обозначения

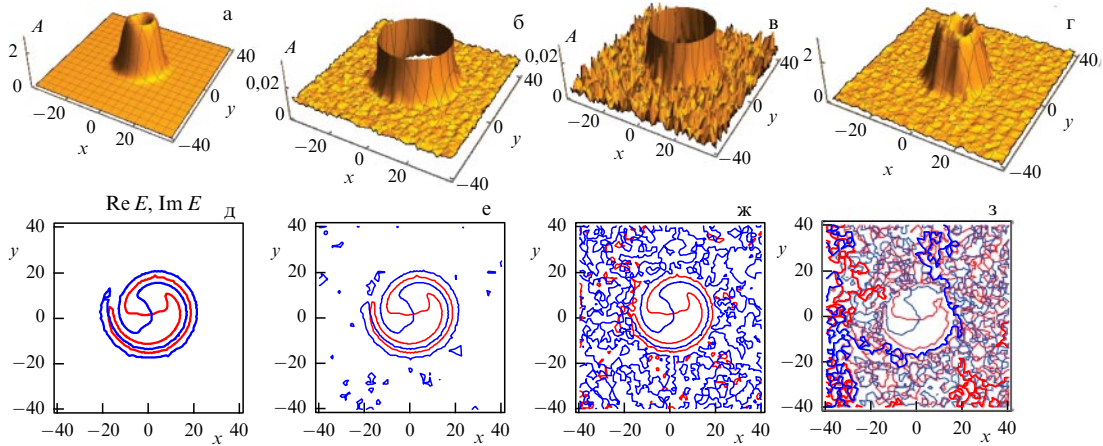
$$\begin{aligned} \vartheta_{11} &= \arg \frac{\overline{w_1^2}}{\kappa_1}, \quad \vartheta_{01} = \arg \frac{\overline{w_0 w_1}}{\kappa_1}, \\ \vartheta_{01} &= \arg U_{01}, \quad \vartheta_{\kappa} = \vartheta_{11} + 2\vartheta_{01}. \end{aligned}$$

В соответствии с (9.41) и (9.42) дисперсия флуктуаций неограниченно возрастает при приближении к границе устойчивости солитона, когда  $\gamma_1 \rightarrow \gamma$ . В области устойчивости солитона  $\gamma_1 < \gamma$ , как и в случае интерферометра, квадрат флуктуаций координаты центра солитона преимущественно линейно возрастает со временем (рассмотрение ограничено временами, при которых возмущение остаётся слабым). Новым моментом служит появление наряду с линейным возрастанием экспоненциально затухающих осцилляций дисперсии с частотой  $2\omega_1$ . Это вызвано указанным выше расщеплением собственного значения дискретной моды  $-i\lambda_{\pm 1} = \gamma_1 \mp i\omega_1$  и представляет собой проявление диссипативного характера оптической нелинейности лазерной среды.

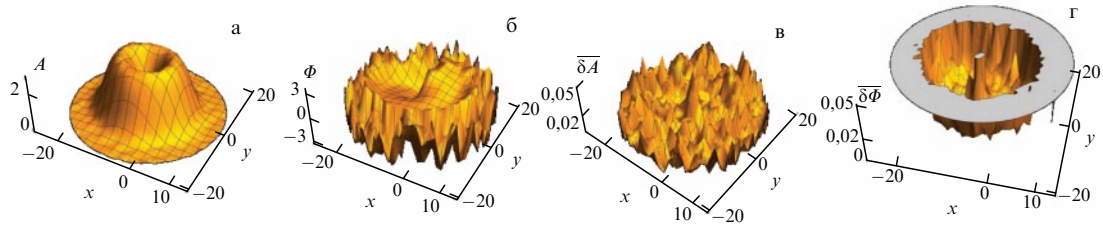
### 9.3. Численное моделирование

От ограничений на слабость проявлений флуктуаций свободно прямое численное решение квантово-механического уравнения Гейзенберга – Ланжевена в  $c$ -числовом представлении. В [110] численно решались уравнения для вещественных амплитуды и фазы, которые следуют из (9.22) при замене  $E(\mathbf{r}_\perp, t) \rightarrow A(\mathbf{r}_\perp, t) \exp(i\Phi(\mathbf{r}_\perp, t))$ ,  $E_{\text{in}} \rightarrow A_{\text{in}} \exp(i\Phi_{\text{in}})$ . Интенсивность стохастического источника удобно характеризовать безразмерным параметром  $\chi_g$ ; эта интенсивность возрастает с увеличением потерь в резонаторе, требующим соответствующего увеличения накачки. При фиксированных значениях макропараметров  $g_0$ ,  $a_0$  и  $b$  величина  $\chi_g$  изменяется в широких пределах при изменении микропараметров





**Рис. 29.** (В цвете онлайн.) Профили вещественной амплитуды  $A = |E|$  (а–г) и контурные линии фазы  $\Phi = \arg E$  (д–з) (красные кривые соответствуют  $\text{Im } E = 0$ , а синие —  $\text{Re } E = 0$ ).  $\chi_g = 0$  (а, д), 0,001 (б, е), 0,01 (в, ж), 0,1 (г, з),  $g_0 = 2,1$ ,  $\theta = 0,08$ . Профили (б, в) обрезаны по интенсивности, чтобы подчеркнуть периферию. В масштабе максимальной интенсивности они визуально практически совпадают с профилями на рис. а.



**Рис. 30.** (В цвете онлайн.) Профили стохастической амплитуды  $A(x, y)$  (а), фазы  $\Phi(x, y)$  (б) и их среднеквадратичных отклонений  $\overline{\delta A}(x, y)$  (в) и  $\overline{\delta \Phi}(x, y)$  (г).  $\chi_g = 0,01$ , остальные параметры те же, что и на рис. 29.

активных и пассивных центров. Далее приводятся результаты моделирования квантовых флуктуаций двумерного солитона в лазере при наличии когерентного поддерживающего излучения с малой амплитудой  $A_{\text{in}} = 0,01$ . Исходным состоянием (в отсутствие флуктуаций) служил симметричный солитон с топологическим зарядом  $m = 1$  (см. рис. 7).

Результаты моделирования показывают, что солитон в среднем со временем мало меняется при увеличении значения  $\chi_g$  вплоть до  $\chi_g = 0,1$ . На рисунке 29 приведены профили амплитуды и контурные линии постоянной фазы для трёх значений  $\chi_g$ . Видно, что при увеличении амплитуды стохастической силы возрастают возмущения амплитуды, а на периферии распределения фазы, первоначально однородной (равной фазе поддерживающего излучения), при  $\chi_g \geq 0,01$  появляются пары дислокаций (пересечения синих и красных линий на рисунке), которые лишь "экранируют" влияние периферийной дислокации (см. [50]) при изменении величины  $\chi_g$  вплоть до  $\chi_g = 0,1$  (рис. 29г).

На рисунке 30 приведены пространственные профили стохастической амплитуды и фазы в сравнении с усреднёнными по времени среднеквадратичными отклонениями, которые определены для каждой точки поперечного сечения следующими выражениями:

$$\overline{\delta Z^2}(x, y) = \langle (Z - \bar{Z})^2 \rangle_t = \langle Z^2 \rangle_t - \bar{Z}^2, \quad Z = A, \Phi. \quad (9.44)$$

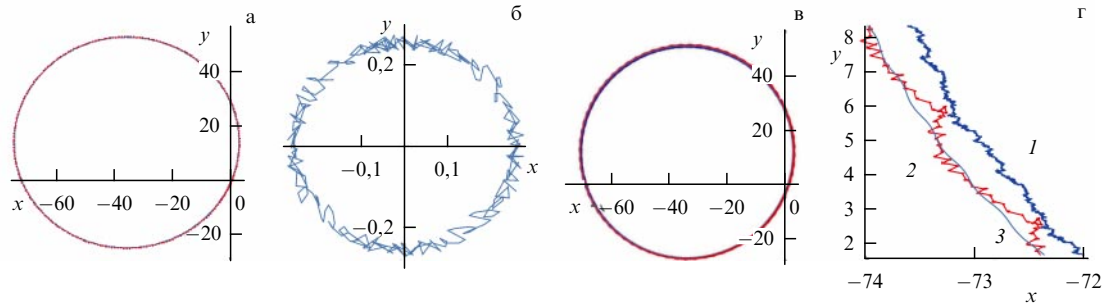
Из рисунка 30г видно, что флуктуации фазы на периферии солитона, где поле мало из-за малой величины амплитуды внешнего поля, и в центре, где поле стре-

мится к нулю в области дислокации, становятся большими (график обрезан на уровне  $\overline{\delta \Phi} = 0,05$ ).

Вектор энергетического центра солитона задаём, усредняя координату поля по его интенсивности:

$$\tilde{x}(t) = \frac{\langle x A(x, y, t)^2 \rangle_{x, y}}{\langle A(x, y, t)^2 \rangle_{x, y}}, \quad \tilde{y}(t) = \frac{\langle y A(x, y, t)^2 \rangle_{x, y}}{\langle A(x, y, t)^2 \rangle_{x, y}}. \quad (9.45)$$

На рисунке 31 приведены результаты расчётов динамических изменений (стохастических траекторий) центра инерции и положения основной дислокации солитона. В классическом случае (рис. 31а, б) небольшой по абсолютной величине вектор разности двух положений (порядка 1 % от ширины солитона) поворачивается в соответствии с лунным движением и дополнительно осциллирует с амплитудой порядка 0,1 %. Последнее обстоятельство связано с неполной синхронизацией солитона и внешнего излучения, что приводит к небольшому дрожанию положения дислокации относительно энергетического центра. Введение квантовых возмущений с максимальной из рассмотренных амплитуд стохастической силы (рис. 29г) приводит к "утолщению траекторий" (рис. 31в) и увеличению амплитуды осцилляций разности положений. Несмотря на то что периферийная дислокация, вызванная вводом поддерживающего пучка, полностью исчезает в "море" дислокаций, порождённых квантовыми возмущениями (рис. 29г), асимметрия профиля интенсивности сохраняется, как сохраняется в среднем и лунное движение солитона. Амплитуда квантовых



**Рис. 31.** (В цвете онлайн.) Траектории энергетического центра солитона (синие кривые) и положения дислокации (красные кривые) при  $\chi_g = 0$  (а) и  $\chi_g = 0,1$  (в). (б) Малый вектор разности представленных на рис. а положений центров солитона и дислокации. (г) Фрагменты траекторий, показанных на рис. в, для энергетического центра солитона (кривая 1), центра дислокации (кривая 2) и их классического движения (кривая 3). Остальные параметры те же, что и на рис. 29.

возмущений положения дислокаций несколько больше амплитуды возмущений положения центра инерции (рис. 31г). То же можно сказать и о возмущениях положения максимума интенсивности, которое, как и положение энергетического центра, задаётся небольшой величиной интенсивности поддерживающего пучка, необходимого для синхронизации средней фазы солитона при сохранении устойчивости последнего. То, что флуктуации проявляются сильнее на периферии солитона и в окрестности топологических особенностей, коррелирует с естественным повышением значимости квантовых эффектов при уменьшении интенсивности излучения.

## 10. Дополнительные факторы

Напомним, что управляющее уравнение (2.1) является только базовым и требует уточнения и обобщения для учёта различных факторов; некоторые из них мы перечислим в этом разделе.

**Анизотропия "диффузии".** Выше мы основывались преимущественно даже не на самом уравнении (2.1), а на его упрощённой версии (2.2), получающейся из (2.1) при равенстве "эффективных коэффициентов диффузии"  $d_{\perp}$  и  $d_{\parallel}$ . При различии этих коэффициентов ( $d_{\perp} \neq d_{\parallel}$ ) пространство  $\mathbf{r}_3 = (x, y, \tau)$  становится анизотропным. Это вызывает эффекты ориентации трёхмерных лазерных солитонов, изученные в [90].

**Частотные расстройки.** Также мы полагали, главным образом, функцию  $f(I)$  вещественной (см. (3.2)), что в рамках двухуровневой модели активных и пассивных центров справедливо при близости частот рабочих переходов этих центров существенному диапазону частот излучения (частотные отстройки много меньше ширин спектральных контуров центров). Учёт расстройек выполнен для одномерных и двумерных схем в ряде работ, ссылки на которые приведены в [5]. Основной эффект расстройек — развитие неустойчивостей самофокусировочного типа, в том числе приводящих к делению солитонов на части и даже их "амёбоподобной" динамике [5].

Можно также указать, что спектральное уширение в большинстве работ в этой области считалось однородным. Описание неоднородного уширения требует более сложного моделирования, которое, правда, заметно упрощается для однонаправленного распространения излучения и использования принципа эргодичности [113, 114].

**Неоднородности параметров схемы.** Этот важный вопрос изучался в большом числе работ (см. ссылки в

[5]). При наличии в схеме неоднородности параметров исчезает инвариантность относительно пространственных сдвигов. Если случайные неоднородности могут вызывать захват (локализацию) диссипативных оптических солитонов, то введение регулярных неоднородностей позволяет управлять их положением и даже предложить вариант аналого-цифровой обработки информации [5].

Неоднородности неизбежно создают ограничения размеров реальных схем. В разделе 8 мы уже провели анализ некоторых следствий продольных ограничений схемы. Что касается поперечных ограничений, то их роль для трёхмерных лазерных солитонов можно выявить, например, в градиентном световоде с квадратичным изменением показателя преломления по удалению от оси световода. В этом случае управляющее уравнение (2.2) включает дополнительный член:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (i + d)\nabla_3^2 E + f_m E + i\beta r_{\perp}^2 E. \quad (10.1)$$

**Неоднородность, фокусирующая при  $\beta < 0$  и дефокусирующая при  $\beta > 0$ .** Рассмотрим воздействие такой неоднородности на представленный в разделе 7.2 светлый яблочный солитон с осью симметрии  $z$  или  $\tau$ . При дефокусировочной неоднородности ( $\beta > 0$ ) солитон, который первоначально двигался строго вдоль оси  $z$ , начинает под действием возмущений смещаться в сторону, деформируется, увеличивается по размерам и разрушается. Если неоднородность является фокусирующей ( $\beta < 0$ ), то результат зависит от её величины. При сильном фокусировании ( $|\beta| > 10^{-7}$ ) яблоко сжимается в поперечных направлениях и удлиняется в продольном, двигаясь вдоль оси  $z$ . Его замкнутая вихревая линия уходит на периферию солитона в области малых интенсивностей, после чего яблоко разделяется на два прецессона, которые затем разрушаются (коллапсируют), поскольку оказываются вне своей области устойчивости.

При меньших значениях  $|\beta|$  яблочный солитон сохраняет устойчивость. Тем самым яблочный солитон устойчив в фокусирующем потенциале с коэффициентом  $-10^{-7} < \beta < 0$ . Для устойчивости более сложных топологических солитонов предельная величина  $|\beta|$  должна быть на порядок меньше. Эти выводы позволяют оценить возможности формирования и свойства топологических лазерных солитонов в реальных пространственно ограниченных схемах.

**Релаксационные эффекты.** Выражающаяся соотношением (3.2) безынерционность отклика среды нарушается

для многих типов лазерных сред, отклик которых на излучение определяется состоянием поля не только в тот же момент времени, но на предыдущем временном интервале. Учёт новых степеней свободы, связанных со средой, приводит к ограничению областей устойчивости лазерных солитонов и появлению их новых типов [5].

Предельным выражением "равноправия" степеней свободы поля и среды служат диссипативные (лазерные) солитоны самоиндуцированной прозрачности, которые являются обобщением хорошо известных солитонов Мак-Колла и Хана [115, 116] для случая схем с усилением и нелинейным поглощением. В таких средах с двухуровневыми активными и пассивными центрами импульс переводит активные (с усилением) центры с верхнего рабочего уровня на нижний, обеспечивая съём запасённой энергии ( $\pi$ -импульсы). Одновременно для пассивных центров передний фронт импульса вызывает переход с нижнего уровня на верхний, а задний фронт возвращает центры на нижний уровень, минимизируя поглощение излучения ( $2\pi$ -импульсы). Первоначально подобный механизм был предложен как режим когерентной синхронизации мод с генерацией сравнительно длинных импульсов в лазере [117]; диссипативными солитонами такие импульсы можно считать, если их размеры много меньше длины резонатора лазера. Экспериментально указанный механизм подтверждён для титан-сапфирового лазера с поглостителем [118, 119]. Для безрезонаторной схемы диссипативные солитоны самоиндуцированной прозрачности были найдены численным моделированием в [113, 120, 121] в режиме предельно коротких импульсов, включая квазиуниполярные (теме квазиуниполярных импульсов излучения посвящены обзоры [23, 122, 123]). Это одномерные временные солитоны; топологические солитоны самоиндуцированной прозрачности пока не получены, хотя и представляют безусловный интерес.

## 11. Заключение

Свойства рассмотренных в обзоре топологических структур вытекают из анализа единого и сравнительно простого управляющего обобщённого уравнения Гинзбурга–Ландау (2.1), которое адекватно отражает многие основные механизмы генерации лазеров с насыщающимся поглощением — наличие насыщающегося с возрастанием интенсивности излучения лазерного усиления и нерезонансного и резонансного нелинейного поглощения. Хотя в реальных лазерных системах имеется и значительное число дополнительных факторов, анализ показывает, что они не препятствуют формированию удивительно разнообразных лазерных солитонов. Тем не менее, насколько нам известно, до сих пор экспериментально получены только двумерные топологические лазерные солитоны с осесимметричным распределением интенсивности и единичным зарядом [124, 125]; можно надеяться, что данный обзор будет способствовать проведению дальнейших экспериментов.

Важным представляется то, что обладающие нетривиальной внутренней структурой топологические лазерные солитоны демонстрируют богатство физики широкого класса открытых (диссипативных) нелинейных систем, особенно ярко выраженное для трёхмерных солитонов. В частности, выше отмечалась родственность несохранения топологического заряда в одномерной схеме, рассмотренной в разделе 4.2, явлению проскаль-

зывания фазы в сверхпроводимости, гидродинамике и др. Ряд топологических особенностей лазерных солитонов имеет общие черты с таковыми для консервативных систем [126], что можно связать со взаимной компенсацией факторов притока и оттока энергии в квазистационарных условиях. Но и здесь само наличие таких потоков, отсутствующих в случае консервативных систем, вносит дополнительные особенности в структуру и динамику солитонов. Взаимодействие топологических и диссипативных (энергетических) факторов обнаруживается и в характере гистерезиса при изменении параметров системы: потеря устойчивости лазерного солитона с сохранением его топологии может быть сопоставлена с плавным и обратимым фазовым переходом второго рода, тогда как при дестабилизации с нарушением топологии солитона гистерезисный процесс скачкообразен и даже необратим.

Можно полагать, что демонстрация как обширного набора топологических лазерных солитонов, так и их интересных свойств и взаимопревращений окажется полезной для поиска аналогичных явлений в других диссипативных нелинейных системах, в первую очередь в неравновесных конденсатах Бозе–Эйнштейна. Если ограничиться чисто оптическими и лазерными схемами, то дальнейшего развития темы естественно ожидать в условиях существования степеней свободы, связанных с инерционностью отклика среды (эффект самоиндуцированной прозрачности), и квантово-оптических явлений, весьма актуальных при важной для приложений минимизации размеров и энергии солитонов.

По нашему мнению, богатство физики и прикладной потенциал лазерных солитонов оправдывают развитие экспериментальных исследований в этой области. Отметим также, что, хотя анализ квантовых флуктуаций топологических диссипативных солитонов находится в начальной стадии, дополнение метода линеаризации управляющих уравнений прямым моделированием стохастического управляющего уравнения позволяет значительно ослабить ограничения аналитического подхода. Это делает реальным обнаружение новых проявлений взаимодействия топологических и квантовых эффектов.

**Благодарности.** Обзор составлен при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках проекта 19-12-50174 и основан на исследованиях, выполненных по гранту Российского научного фонда (РНФ) 18-12-00075. Моделирование квантовых флуктуаций поддержано грантом РФФИ 18-02-00402. Безвременная смерть помешала нашему коллеге Л.А. Нестерову стать соавтором этого обзора. Авторы благодарны А.Н. Шацеву, Ю.М. Голубеву и Т.Ю. Голубевой за сотрудничество. Часть результатов, представленных в обзоре, получена с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого ([www.scc.spbstu.ru](http://www.scc.spbstu.ru)).

## Список литературы

1. Kivshar Yu S, Agrawal G P *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego, CA: Academic Press, 2003); Пер. на русск. яз.: Кившарь Ю С, Агравал Г П *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005)
2. Akhmediev N, Ankiewicz A *Solitons: Non-Linear Pulses and Beams* (London: Chapman and Hall, 1997); Пер. на русск. яз.: Ахмедиев

- диев Н Н, Анкевич А *Солитоны: нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003)
3. Захаров В Е, Манаков С В, Новиков С П, Питаевский Л П *Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния* (М.: Физматлит, 1980); Пер. на англ. яз.: Novikov S, Manakov S V, Pitaevskii L P, Zakharov V E *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method* (New York: Springer, 1984)
4. Розанов Н Н *Диссипативные оптические солитоны. От микро- нано- и атто-* (М.: Физматлит, 2011)
5. Розанов Н Н *Диссипативные оптические и родственные солитоны* (М.: Физматлит, 2021)
6. Джэкив Р *УФН* **149** 139 (1986); Jackiw R *Comments Nucl. Part. Phys.* **13** 141 (1984)
7. Rosanov N N "I Transverse patterns in wide-aperture nonlinear optical systems", in *Progress in Optics* Vol. 35 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: Elsevier, 1996) p. 1
8. Розанов Н Н *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (М.: Наука. Физматлит, 1997)
9. Mandel P *Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press 1997)
10. Розанов Н Н *УФН* **170** 462 (2000); Rozanov N N *Phys. Usp.* **43** 421 (2000)
11. Weiss C O et al., in *Spatial Solitons* (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 82, Eds S Trillo, W Torruellas) (Berlin: Springer, 2001) p. 393
12. Rosanov N N *Spatial Hysteresis and Optical Patterns* (Berlin: Springer, 2002)
13. Staliūnas K, Sánchez-Morcillo V J *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators* (Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 183) (Berlin: Springer, 2003)
14. Akhmediev N, Ankiewicz A (Eds) *Dissipative Solitons* (Lecture Notes in Physics, Vol. 661) (Berlin: Springer, 2005); Пер. на русск. яз.: Ахмедиев Н, Анкевич А (Ред.) *Диссипативные солитоны* (М.: Физматлит, 2008)
15. Akhmediev N, Ankiewicz A (Eds) *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine* (Lecture Notes in Physics, Vol. 751) (Berlin: Springer, 2008)
16. Kuszelewicz R et al. (Eds) "Dissipative optical solitons" *Eur. Phys. J. D* **59** (1) (2010) Topical issue
17. Tlidi M et al. (Eds) "Localized structures in dissipative media: from optics to plant ecology" *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **372** (2027) (2014) Theme issue
18. Lugiato L, Prati F, Brambilla M *Nonlinear Optical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015)
19. Grelu P (Ed.) *Nonlinear Optical Cavity Dynamics: From Microresonators to Fiber Lasers* (Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2016)
20. Tlidi M, Clerc M G, Panajotov K (Eds) "Dissipative structures in matter out of equilibrium: from chemistry, photonics and biology, the legacy of Ilya Prigogine" *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **376** (2135) (2018) Theme issue
21. Rosanov N N, Fedorov S V, Veretenov N A *Eur. Phys. J. D* **73** 141 (2019)
22. Розанов Н Н и др. *Оптика и спектроскопия* **127** 82 (2019); Rosanov N N et al. *Opt. Spectrosc.* **127** 77 (2019)
23. Розанов Н Н и др. *Квантовая электроника* **51** 959 (2021); Rosanov N N et al. *Quantum Electron.* **51** 959 (2021)
24. Mihalache D *Rom. Rep. Phys.* **73** 403 (2021)
25. Chembo Y K, Nan Y *Phys. Rev. A* **82** 033801 (2010)
26. Городецкий М Л *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (М.: Физматлит, 2016)
27. Турицын С К и др. *УФН* **186** 713 (2016); Turitsyn S K et al. *Phys. Usp.* **59** 642 (2016)
28. Shtyrina O V et al. *J. Opt. Soc. Am. B* **38** 2488 (2021)
29. Розанов Н Н, Федоров С В *Оптика и спектроскопия* **72** 1394 (1992); Rozanov N N, Fedorov S V *Opt. Spectrosc.* **72** 782 (1992)
30. Fedorov S V, Khodova G V, Rosanov N N *Proc. SPIE* **1840** 208 (1992)
31. Rosanov N N, Khodova G V *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 1057 (1990)
32. Karpov D V et al. *Phys. Rev. B* **92** 075305 (2015)
33. Lu L, Joannopoulos J D, Soliačić M *Nat. Photon.* **8** 821 (2014)
34. Ozawa T et al. *Rev. Mod. Phys.* **91** 015006 (2019)
35. Арансон И С *УФН* **189** 955 (2019); Aranson I S *Phys. Usp.* **62** 892 (2019)
36. Квон З Д и др. *УФН* **190** 673 (2020); Kvon Z D et al. *Phys. Usp.* **63** 629 (2020)
37. Smirnova D et al. *Light Sci. Appl.* **9** 127 (2020)
38. Soskin M et al. *J. Opt.* **19** 010401 (2017)
39. Gbur G J *Singular Optics* (Boca Raton, FL: CRC Press. Taylor and Francis Group, 2017)
40. Yin X, Peng C *Photon. Res.* **8** (11) B25 (2020)
41. Scully M O, Zubairy M S *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997); Пер. на русск. яз.: Скалли М О, Зубайри М С *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2003)
42. Григорян В С, Маймистов А И, Скляр Ю М *ЖЭТФ* **94** 174 (1988); Grigor'yan V S, Maimistov A I, Sklyarov Yu M *Sov. Phys. JETP* **67** 530 (1988)
43. Окулов А Ю, Ораевский А Н *Труды ФИАН* **187** 202 (1988)
44. Vanin E V et al. *Phys. Rev. A* **49** 2806 (1994)
45. Sazonov S V *Phys. Rev. A* **103** 053512 (2021)
46. Леонтович М А *Изв. АН СССР. Сер. физ.* (8) 16 (1944)
47. Леонтович М А, Фок В А *ЖЭТФ* **16** 557 (1946); Leontovich M A, Fock V A *J. Phys. USSR* **10** 13 (1946)
48. Розанов Н Н *Оптика и спектроскопия* **127** 283 (2019); Rosanov N N *Opt. Spectrosc.* **127** 285 (2019)
49. Розанов Н Н *Оптика и спектроскопия* **128** 1129 (2020); Rosanov N N *Opt. Spectrosc.* **128** 1151 (2020)
50. Сучков А Ф *ЖЭТФ* **49** 1495 (1965); Suchkov A F *Sov. Phys. JETP* **22** 1026 (1965)
51. Розанов Н Н *Письма в ЖТФ* **6** 778 (1980); Rozanov N N *Sov. Tech. Phys. Lett.* **6** 335 (1980)
52. Розанов Н Н *ЖЭТФ* **80** 96 (1981); Rozanov N N *Sov. Phys. JETP* **53** 47 (1981)
53. Rosanov N N, Khodova G V *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 1057 (1990)
54. Veretenov N A, Fedorov S V, Rosanov N N *Phys. Rev. Lett.* **125** 193901 (2020)
55. Shafie M M et al. *Chaos* **31** 093104 (2021)
56. Fedorov S V, Veretenov N A, Rosanov N N *Phys. Rev. Lett.* **122** 023903 (2019)
57. Белоусова И М и др. *ЖЭТФ* **52** 1146 (1967); Belousova I M et al. *Sov. Phys. JETP* **25** 761 (1967)
58. Арнольд В И *Теория катастроф* (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Catastrophe Theory* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
59. Imamoglu A et al. *Phys. Rev. A* **53** 4250 (1996)
60. Langer J S, Ambegaokar V *Phys. Rev.* **164** 498 (1967)
61. Dee G *Physica D* **15** 295 (1985)
62. Chernych A I, Gabitov I R, Kuznetsov E A, in *Singular Limits of Dispersive Waves* (NATO ASI Series. Ser. B, Vol. 320, Eds N M Ercolani et al.) (New York: Plenum Press, 1994) p. 315
63. Gor'kov L, in *Charge Density Waves in Solids* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 25, Eds L P Gor'kov, G Grüner) (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1989)
64. Андронов А А и др. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Andronov A A et al. *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1971)
65. Питаевский Л П *УФН* **168** 641 (1998); Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **41** 569 (1998)
66. Fedorov S V, Veretenov N A, Rosanov N N *Opt. Lett.* **45** 3284 (2020)
67. Simon D S *Topology in Optics: Tying Light in Knots* (Bristol: IOP Publ., 2021)
68. Berry M V, Dennis M R *Proc. R. Soc. Lond. A* **457** 141 (2001)
69. Soskin M S, Vasnetsov M V *Prog. Opt.* **42** 219 (2001)
70. Freund I *Opt. Commun.* **201** 251 (2002)
71. Ruchi, Senthilkumaran P, Pal S K *Int. J. Opt.* **2020** 2812803 (2020)
72. Розанов Н Н и др. *Квантовая электроника* **51** 959 (2021); Rosanov N N et al. *Quantum Electron.* **51** 959 (2021)
73. Fedorov S V, Veretenov N A, Rosanov N N, submitted
74. San Miguel M, Feng Q, Moloney J V *Phys. Rev. A* **52** 1728 (1995)
75. Panajotov K, Tlidi M *Opt. Lett.* **43** 5663 (2018)
76. Розанов Н Н *Квантовая электроника* **30** 1005 (2000); Rosanov N N *Quantum Electron.* **30** 1005 (2000)
77. Veretenov N, Fedorov S, Rosanov N *Opt. Lett.* **46** 4076 (2021)

78. Barland S et al. *Nature* **419** 699 (2002)
79. Genevet P et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 223902 (2010)
80. Genevet P et al. *J. Nonlin. Opt. Phys. Mater.* **21** 1250029 (2012)
81. Hachair X et al. *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.* **12** 339 (2006)
82. Eslami M, Kheradmand R, Aghdami K M *Phys. Scripta* **2013** (T157) 014038 (2013)
83. Prati F et al. *Eur. Phys. J. D* **59** 139 (2010)
84. Anbardan S R et al. *Phys. Rev. E* **97** 032208 (2018)
85. Eslami M, Kheradmand R, Hashemvand H *Opt. Quantum Electron.* **46** 319 (2014)
86. Anbardan S R et al. *Phys. Rev. E* **101** 042210 (2020)
87. Высотина Н В и др. *Изв. вузов. Физика* (11) 42 (1985); Vysotina N V et al. *Sov. Phys. J.* **28** 887 (1985)
88. Dennis M R et al. *Nat. Phys.* **6** 118 (2010)
89. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1971)
90. Veretenov N A, Rosanov N N, Fedorov S V *Phys. Rev. Lett.* **117** 183901 (2016)
91. Veretenov N A, Fedorov S V, Rosanov N N *Phys. Rev. Lett.* **119** 263901 (2017)
92. Veretenov N A, Fedorov S V, Rosanov N N *Philos. Trans. R. Soc. A* **376** 20170367 (2018)
93. Федоров С В, Розанов Н Н, Веретеннов Н А *Письма в ЖЭТФ* **107** 342 (2018); Fedorov S V, Rosanov N N, Veretenov N A *JETP Lett.* **107** 327 (2018)
94. Розанов Н Н, Федоров С В, Веретеннов Н А *Теор. мат. физ.* **203** 134 (2020); Rosanov N N, Fedorov S V, Veretenov N A *Theor. Math. Phys.* **203** 547 (2020)
95. Adams C C *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots* (New York: W.H. Freeman, 1994)
96. Вахитов Н Г, Колоколов А А *Изв. вузов. Радиофизика* **16** 1020 (1973); Vakhitov N G, Kolokolov A A *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 783 (1973)
97. Веретеннов Н А, Федоров С В, Розанов Н Н, направлено в печать
98. Carter S J et al. *Phys. Rev. Lett.* **58** 1841 (1987)
99. Rosenbluh M, Shelby R M *Phys. Rev. Lett.* **66** 153 (1991)
100. Spälter S et al. *Opt. Express* **2** 77 (1998)
101. Mecozzi A, Kumar P *Opt. Lett.* **22** 1232 (1997)
102. Nagasako E M, Boyd R W, Agarwal G S *Opt. Express* **3** 171 (1998)
103. Lantz E et al. *J. Opt. B* **6** S295 (2004)
104. Oppo G-L, Jeffers J "Quantum fluctuations in cavity solitons", in *Quantum Imaging* (Ed. M I Kolobov) (New York: Springer, 2007); Пер. на русск. яз.: Оппо Ж-Л, Джефферс Д, в сб. *Квантовое изображение* (Под ред. М И Колобова) (М.: Физматлит, 2009)
105. Нестеров Л А и др. *Оптика и спектроскопия* **106** 639 (2009); Nesterov L A et al. *Opt. Spectrosc.* **106** 570 (2009)
106. Нестеров Л А, Веретеннов Н А, Розанов Н Н *Оптика и спектроскопия* **118** 815 (2015); Nesterov L A, Veretenov N A, Rosanov N N *Opt. Spectrosc.* **118** 781 (2015)
107. Нестеров Л А, Веретеннов Н А, Розанов Н Н *Оптика и спектроскопия* **118** 828 (2015); Nesterov L A, Veretenov N A, Rosanov N N *Opt. Spectrosc.* **118** 794 (2015)
108. Голубева Т Ю и др. *Оптика и спектроскопия* **128** 517 (2020); Golubeva T Yu et al. *Opt. Spectrosc.* **128** 505 (2020)
109. Fedorov S V et al. *Laser Phys. Lett.* **18** 015204 (2021)
110. Fedorov S V, Rosanov N N, Veretenov N A *J. Phys. Conf. Ser.* **2103** 012150 (2021)
111. Davidovich L *Rev. Mod. Phys.* **68** 127 (1996)
112. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Burlington: Butterworth-Heinemann, 1982)
113. Высотина Н В, Розанов Н Н, Семенов В Е *Оптика и спектроскопия* **106** 793 (2009); Vysotina N V, Rosanov N N, Semenov V E *Opt. Spectrosc.* **106** 713 (2009)
114. Kozlov V V, Rosanov N N *Phys. Rev. A* **87** 043836 (2013)
115. McCall S L, Hahn E L *Phys. Rev.* **183** 457 (1969)
116. Полуктвов И А, Попов Ю М, Ройтберг В С *УФН* **114** 97 (1974); Poluektov I A, Popov Yu M, Roitberg V S *Sov. Phys. Usp.* **18** 673 (1975)
117. Kozlov V V *Phys. Rev. A* **56** 1607 (1997)
118. Архипов М В и др. *Письма в ЖЭТФ* **109** 657 (2019); Arkhipov M V et al. *JETP Lett.* **109** 634 (2019)
119. Arkhipov M V et al. *Phys. Rev. A* **101** 013803 (2020)
120. Высотина Н В, Розанов Н Н, Семенов В Е *Письма в ЖЭТФ* **83** 337 (2006); Vysotina N V, Rosanov N N, Semenov V E *JETP Lett.* **83** 279 (2006)
121. Розанов Н Н, Семенов В Е, Высотина Н В *Квантовая электроника* **38** 137 (2008); Rosanov N N, Semenov V E, Vysotina N V *Quantum Electron.* **38** 137 (2008)
122. Розанов Н Н, Архипов Р М, Архипов М В *УФН* **188** 1347 (2018); Rosanov N N, Arkhipov R M, Arkhipov M V *Phys. Usp.* **61** 1227 (2018)
123. Архипов Р М, Архипов М В, Розанов Н Н *Квантовая электроника* **50** 801 (2020)
124. Genevet P et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 223902 (2010)
125. Япаров В В и др. *Оптика и спектроскопия* **112** 655 (2012)
126. Villos A, Proment D, Krstulovic G *Phys. Rev. Fluids* **2** 044701 (2017)

## Laser solitons: topological and quantum phenomena

N.A. Veretenov<sup>(a)</sup>, N.N. Rosanov<sup>(b)</sup>, S.V. Fedorov<sup>(c)</sup>

Ioffe Institute, ul. Politehnicheskaya 26, 194021 St. Petersburg, Russian Federation

E-mail: <sup>(a)</sup> torrek@gmail.com, <sup>(b)</sup> nnrosanov@mail.ru, <sup>(c)</sup> sfedorov2006@bk.ru

A review of the properties of dissipative solitons with different dimensions and various topological characteristics in lasers and laser systems with saturable absorption is presented. Unlike conservative solitons, laser solitons are attractors, the increased stability of which is caused by the balance of energy inflow and outflow. The topology of laser solitons is due to their complex internal structure, which is determined by the field of radiation energy fluxes, and the energy characteristics are an important addition to the topological characteristics. The equation of their dynamics — the generalized Ginzburg–Landau equation — reflects the basic features of open nonlinear systems of various natures. The topological features of solitons expand the range of manifestations of their quantum fluctuations.

**Keywords:** dissipative, laser, topological, multidimensional solitons; quantum fluctuations

PACS numbers: 42.50.Lc, **42.55.–f**, **42.65.–k**, 42.65.Tg

Bibliography — 126 references

Received 18 August 2020, revised 14 November 2020

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **192** (2) 143–176 (2022)

*Physics–Uspekhi* **65** (2) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.11.038869>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.11.038869>