

Релятивистски-нелинейное резонансное поглощение и генерация гармоник электромагнитного излучения в неоднородной плазме

И.И. Метельский, В.Ф. Ковалев, В.Ю. Быченков

Со времени появления пионерских работ В.Л. Гинзбурга и Н.Г. Денисова, открывших явление линейного поглощения электромагнитного излучения в неоднородной плазме за счёт сильного плазменного резонанса в окрестности критической плотности, теория этого явления не получила последовательного развития применительно к практически интересным сегодня сильным электромагнитным полям, прежде всего — лазерным. Обзор посвящён систематическому изложению результатов аналитической релятивистски-нелинейной теории резонансного поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в неоднородной плазме в условиях существенного проявления электронной нелинейности плазмы вплоть до значений интенсивности лазерного света, при которых движение электронов в окрестности критической плотности оказывается релятивистским. С использованием методов современной теории групп преобразований в обзоре описываются: структура нелинейного электромагнитного поля в плазменном резонансе, нелинейные эффекты подавления коэффициента резонансного поглощения и сдвиг по углу резонансной кривой поглощения с ростом лазерной интенсивности, формирование достаточно плавных, спадающих по степенному закону, спектров гармоник лазерного света, излучаемых плазмой вблизи порога опрокидывания нелинейного плазменного поля, а также основные свойства генерируемого в окрестности критической плотности электростатического поля.

Ключевые слова: лазерная плазма, резонансное поглощение, генерация гармоник, нелинейные плазменные колебания, релятивистские эффекты, гидродинамика плазмы, ренормгрупповые симметрии

PACS numbers: 42.65.Ky, 52.25.Os, **52.30. – q**, **52.35. – g**, 52.35.Fp, 52.35.Hr, **52.38. – r**, 52.40.Db, 52.50.Jm, **52.57. – z**

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.06.039410>

Содержание

1. Введение (457).
2. **Нелинейный плазменный резонанс в неоднородной плазме (459).**
 - 2.1. Построение сильно нелинейных решений уравнений теории плазменного резонанса методом ренормгрупповых симметрий.
 - 2.2. Стационарные и нестационарные релятивистские электронные колебания в плазменном резонансе.
 - 2.3. Опрокидывание и пространственные характеристики стационарного резонансно-усиленного электрического поля.
3. **Нелинейное резонансное поглощение и генерация электростатического поля (471).**
 - 3.1. Основные уравнения и общее решение краевой задачи о нелинейном резонансном поглощении.
 - 3.2. Устранение расходи-

мости коэффициента отражения: учёт релятивистских эффектов. 3.3. Границы применимости гидродинамической модели на языке физических параметров. 3.4. Релятивистски-нелинейный коэффициент резонансного поглощения. 3.5. Генерация электростатического поля вблизи критической плотности.

4. Генерация высших гармоник (480).

4.1. Решение задачи о генерации высших гармоник при релятивистском плазменном резонансе. 4.2. Спектральный состав излучения и сравнение с сильно нелинейной нерелятивистской теорией. 4.3. Связь с теорией возмущений.

5. Заключение (486).

7. Приложения (488).

А. Вычисление допускаемой группы. Б. Амплитуда магнитного поля в вакууме на основной частоте. В. Аналитическая оценка интеграла \mathcal{I} .

Список литературы (491).

1. Введение

Около семидесяти лет назад в теоретических работах Н.Г. Денисова и В.Л. Гинзбурга [1–3] было положено начало систематическому исследованию явления *плазменного резонанса*. С тех пор в теории взаимодействия электромагнитного (лазерного) излучения с неоднородной плазмой хорошо известен классический эффект *линейной трансформации* электромагнитной волны в

И.И. Метельский^(1,2,a), В.Ф. Ковалев^(2,3,b), В.Ю. Быченков^(1,2,c)

⁽¹⁾ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

⁽²⁾ Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, Сушевская ул. 22, 127030 Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. 4, 125047 Москва, Российская Федерация

E-mail: ^(a) metelski@lebedev.ru, ^(b) vfkvfvkv@gmail.com,

^(c) bychenkovvy@lebedev.ru

Статья поступила 3 мая 2023 г., после доработки 14 июня 2023 г.

плазменную, который наблюдается при наклонном падении р-поляризованного излучения с частотой ω_0 на слабо неоднородную плазму¹ в области, где лазерная частота ω_0 сравнивается с частотой собственных колебаний плазмы ω_L . Резонанс колебаний электронов в поле лазерного излучения и электронных ленгмюровских колебаний приводит к усилению электростатических колебаний — плазменному резонансу, выражающемуся в резком возрастании потенциального электрического поля в окрестности критической плотности плазмы [2–5]. Фундаментальный и прикладной интерес к изучению плазменного резонанса обусловлен тем, что он лежит в основе развития таких процессов, как *резонансное поглощение* [6, 7], *генерация гармоник* [8–16], *генерация квазистатических полей* вблизи критической плотности [14, 17] и образование *быстрых частиц* в лазерной плазме [18–26]. Эти процессы, в свою очередь, имеют особое значение в свете актуальной до сих пор глобальной проблемы лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) [27–36].

Резонансное поглощение (РП) является одним из важнейших каналов передачи энергии лазерного излучения в неоднородную плазму и обеспечивает значительный, а иногда и определяющий, вклад в коэффициент поглощения. С практической точки зрения исследования РП связаны с задачами взаимодействия лазерного излучения с плазмой, образующейся в результате лазерной абляции твердотельных мишеней, и главным образом — с экспериментами по ЛТС [31–34], а также с задачей о генерации гармоник [10, 11, 14]. Линейная теория РП, разработанная в 1960–1970-х годах [6, 37] на основе модели, предложенной в [1], по-прежнему лежит в основе многих расчётов и оценок, выполняемых в рамках ЛТС-экспериментов [31]. Однако естественная логика развития лазерных технологий сделала рутинным применение лазеров с интенсивностью, ставящей под сомнение применимость линейной теории РП.

Для современных экспериментов по ЛТС с прямым облучением, включая концепцию ударного зажигания ("shock ignition"), характерны большие масштабы неоднородности плазмы (десятки и сотни длин волн лазера) и значения лазерных интенсивностей вплоть до 10^{17} Вт см⁻². При таких условиях в окрестности критической плотности плазмы возможно проявление сильных нелинейных эффектов [14, 38–44], поэтому возникает необходимость значительного усовершенствования теории поглощения интенсивного лазерного излучения в области критической плотности неоднородной плазмы, где имеет место явление *релятивистски-нелинейного плазменного резонанса* [43, 44]. Дело в том, что в плазменном резонансе для условий ЛТС усиление плазменного поля может приводить к напряжённости электрического поля вплоть до релятивистских значений, хотя напряжённость падающего лазерного поля остаётся существенно ниже релятивистской [40, 41, 43, 44]. Такой сильный нелинейный резонанс оказывает значительное влияние на процесс поглощения [44–46], а значит, задача построения теории РП в условиях релятивистского плазменного резонанса является весьма актуальной.

Возникающее в окрестности плазменного резонанса существенное разделение зарядов порождает мощное *квазистатическое электрическое поле*, локализованное вблизи критической плотности [14, 17]. Уже во второй половине 1970-х гг. был известен ряд экспериментальных фактов, указывающих на генерацию в плазме под действием мощного лазерного излучения сильных квазистатических электрических полей [47, 48], изучение которых представляет интерес с точки зрения процессов переноса [49] и ускорения частиц в плазме [21]. В частности, образование *быстрых электронов* в области критической плотности заслуживает внимания как нежелательный эффект в контексте лазерного термоядерного синтеза, поскольку обеспечивает предварительный прогрев мишени, препятствующий её оптимальному сжатию, а значит, и дальнейшей инициации термоядерной реакции [20, 23, 24, 30, 33, 50, 51]. Поэтому исследование возбуждаемого в окрестности критической плотности плазмы квазистатического электрического поля, его пространственной структуры представляет интерес и может служить основой для теоретической интерпретации наблюдаемой генерации быстрых электронов.

Генерация гармоник (ГГ) лазерного излучения — ещё один важный процесс, развивающийся в условиях плазменного резонанса, — привлекает интерес исследователей как инструмент получения высокочастотных источников вторичного излучения [15] и диагностики короны лазерной плазмы (в том числе в ЛТС-экспериментах), т.е. возможности определения плотности плазмы, градиента температуры и скорости движения короны по спектральному составу вторичного излучения [52, 53]. Начиная с 1970-х гг. во всём мире было выполнено большое число экспериментальных и теоретических работ, посвящённых генерации гармоник, по характеристикам которых можно судить об указанных параметрах в локализованных областях плазмы: вблизи критической и четверти критической плотности [12, 52, 53]. Например, в недавних экспериментах на NIF (National Ignition Facility), проведённых в рамках схемы прямого сжатия [34], использовались спектры субгармоники $\omega_0/2$ для определения температуры электронов плотной лазерной плазмы. С теоретической точки зрения особый интерес представляет описание ГГ в режиме сильно нелинейного плазменного резонанса, наблюдаемого в классических экспериментах [54, 55]. Полученные в [54, 55] медленно спадающие спектры вторичного излучения не описываются теорией возмущений [11], предсказывающей экспоненциальный закон убывания интенсивностей гармоник с ростом их номера. Выход за рамки теории возмущений был впервые осуществлён в работе [14], где аналитически найденные коэффициенты преобразования в высшие гармоники демонстрировали богатый спектральный состав вторичного излучения при учёте сильной нерелятивистской нелинейности движения электронов вблизи критической плотности. Исследования [14] получили развитие в работах последнего десятилетия [44, 56, 57], в которых был решён вопрос о влиянии на ГГ релятивистских эффектов динамики электронной компоненты плазмы в окрестности плазменного резонанса.

Современные эксперименты по взаимодействию лазерного излучения с плазмой при больших значениях лазерной интенсивности характеризуются сильной нелинейностью электромагнитных полей. Ключевая роль

¹ Ниже будет дано уточнение условия слабой неоднородности плазмы на языке лазерно-плазменных параметров.

нелинейности отмечалась ещё в первых теоретических работах по взаимодействию мощного электромагнитного излучения с неоднородной плазмой (см., например, [58, 59]) и была впоследствии подтверждена в лабораторных экспериментах и исследованиях ионосферной плазмы [60–63]. Неоднородность плазмы может быть обусловлена как действием сильного электромагнитного поля, что имеет место при самофокусировке лазерного излучения [58, 60], так и естественной неоднородностью плазмы, например, при ионосферных экспериментах [61–63], а также комбинацией двух указанных причин [63]. Поскольку сильная нелинейность существенно усложняет задачу аналитического описания, нелинейные процессы, например РП, изучаются, как правило, методами численного моделирования [39, 40, 64–66] или с использованием полуаналитических моделей [38, 41], в которых упрощённые относительно исходных уравнения, полученные на первом этапе аналитическими методами, далее решаются численно. В полностью численных подходах часто используется кинетическое описание на основе метода "частица в ячейке" (Particle-In-Cell, PIC) [39, 40, 64, 65]. Однако, несмотря на бурное развитие методов численного моделирования, широко применяемых в лазерной физике высоких энергий, аналитические подходы по-прежнему могут быть эффективным способом исследования процессов, протекающих в условиях сильной нелинейности. Заметим, что в численных расчётах поглощения и генерации гармоник лазерного излучения неоднородной плазмой существует проблема, связанная с разномасштабностью областей моделирования при вычислении самосогласованного электромагнитного поля в плазме. С одной стороны, для разрешения узкой области резонанса, ширина которой составляет десятые доли длины лазерной волны, требуется малая величина шага пространственно-временной сетки. С другой — при вычислении полей в толще плазменной мишени, определяемой масштабом неоднородности плотности в десятки и сотни длин волн лазера, необходимо большое количество таких шагов, что критически повышает ресурсозатратность вычислений. Кроме того, использование численных методов затрудняет получение практически необходимых скейлингов от лазерно-плазменных параметров вследствие многопараметричности зависимостей численных расчётов, поскольку нелинейное поглощение зависит от интенсивности лазерного импульса, угла его падения на плазму, геометрии плазменной мишени, её плотности, скорости разлёта и температуры [40, 67]. В этом отношении большую роль играют теоретические подходы, позволяющие получать аналитические решения, ценность которых состоит не только в том, что они допускают наглядное описание процессов в зависимости от множества параметров задачи, но и в том, что они могут использоваться при построении и обосновании численно-аналитических методов как модельные решения, выделяющие ключевые свойства рассматриваемой системы.

В настоящем обзоре приводятся результаты использования основанного на современной теории групп преобразований метода ренормгрупповых (РГ) симметрий [68–70], появившегося в результате развития представлений о функциональной автомодельности [71] и о квантовополевой ренормализационной группе Боголюбова [72–75], рассматриваемой как группа непрерывных преобразований Ли. Применение данного метода сделало

возможным построение самосогласованного аналитического решения сильно нелинейной задачи о взаимодействии лазерного излучения с неоднородной плазмой. Это решение позволило описать структуру особенности нелинейного электромагнитного поля в плазменном резонансе [42, 43, 76], решить задачу о нелинейном резонансном поглощении [44–46], найти интенсивности генерируемых в области резонанса и излучаемых в вакууме высших гармоник [44, 56, 57] и охарактеризовать свойства квазистатического электрического поля [45], генерируемого в окрестности критической плотности неоднородной лазерной плазмы.

Обзор разделён на пять частей, включающих помимо введения и заключения ещё три раздела. В разделе 2 найдена и подробно исследована структура нелинейного плазменного резонанса, рассмотрен механизм опрокидывания релятивистских плазменных колебаний в окрестности критической плотности плазмы и пространственные свойства продольного электрического поля плазменного резонанса. Раздел 3 посвящён отысканию релятивистски-нелинейного коэффициента резонансного поглощения, исследованию границ применимости гидродинамической модели плазменного резонанса на языке физических параметров лазерно-плазменной системы и обсуждению свойств квазистатического электрического поля. В разделе 4 найдены коэффициенты преобразования в высшие гармоники лазерного излучения, изучен спектральный состав вторичного излучения и рассмотрена связь с предшествующими теориями генерации гармоник механизмом плазменного резонанса.

2. Нелинейный плазменный резонанс в неоднородной плазме

Впервые подробное исследование решений уравнений, описывающих наклонное падение электромагнитных волн на слабо неоднородную плоско-слоистую изотропную плазму, было проведено Л.А. Жекулиным [77, 78] применительно к задаче распространения радиоволн в ионосфере. В подобной среде, где плотность и диэлектрическая проницаемость зависят от одной пространственной координаты, волны с различной поляризацией электрического вектора — перпендикулярно и параллельно плоскости падения — распространяются независимо одна от другой. Причём задача об отражении s-поляризованной волны, когда электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения, принципиально не отличается от простейшей задачи нормального падения [3, 79]. В данном случае перед точкой отражения (поворота) образуется осцилляторная структура стоячей электромагнитной волны — результата наложения падающей и отражённой волн, а за точкой отражения поле экспоненциально затухает в глубь плазмы. Отличие заключается лишь в сдвиге точки отражения падающей волны. Иная картина наблюдается в случае р-поляризации падающей электромагнитной волны, когда электрический вектор лежит в плоскости падения (рис. 1). В этом случае вновь образуется стоячая волна, которая после прохождения точки отражения сначала затухает в глубь плазмы; но точка, где диэлектрическая проницаемость среды ε обращается в нуль, является особенной (рис. 1б). Л.А. Жекулин показал, что требование обращения в нуль решения волнового уравнения на бесконечности (в обла-

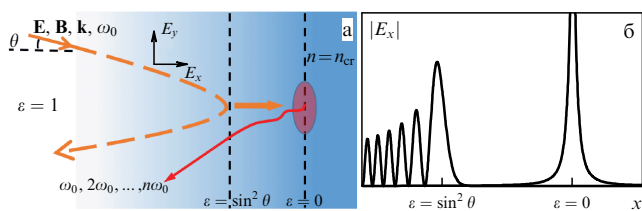


Рис. 1. (а) Схематическое изображение наклонного падения под углом θ р-поляризованной плоской электромагнитной волны на неоднородную вдоль оси x плазму. В точке отражения диэлектрическая проницаемость принимает значение $\varepsilon(x) = \sin^2 \theta$; в точке плазменного резонанса плотность плазмы n равна критической n_{cr} и диэлектрическая проницаемость обращается в нуль: $\varepsilon(x) = 0$. (б) Качественная картина пространственного распределения амплитуды продольного электрического поля в неоднородной плазме, плотность которой меняется вдоль координаты x , при наклонном падении р-поляризованной электромагнитной волны без учёта малых эффектов диссипации в окрестности критической плотности. В точке отражения $\varepsilon(x) = \sin^2 \theta$, в точке плазменного резонанса $\varepsilon(x) = 0$.

сти отрицательных значений ε) приводит к обращению поля в бесконечность в точке, где $\varepsilon = 0$. Автором, однако, не был указан корректный способ устранения особенности.

Позже К. Фёрстерлинг и Х.О. Вюстер [80, 81] более обстоятельно рассмотрели эту особенность поля при распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме. Анализируя приближённые решения, пригодные в малой окрестности нуля функции ε , они установили, что продольная компонента (вдоль градиента неоднородности плазмы) электрического поля имеет особенность порядка $1/\varepsilon$, а поперечная компонента характеризуется логарифмической особенностью. Отсюда был сделан вывод, что резкое нарастание напряжённости электрического поля в области, где $\varepsilon \rightarrow 0$, приводит к невозможности описания поля при помощи обычной диэлектрической проницаемости, поскольку движение электронов в поле с сильной пространственной неоднородностью уже не будет гармоническим. К. Фёрстерлинг и Х.О. Вюстер впервые продемонстрировали, что уравнения, описывающие поле в таких условиях, становятся нелинейными, и при распространении волны определённой частоты в неоднородной плазме возникают волны других (кратных) частот, т.е. *высшие гармоники* [81].

В 1956 г. вышла статья Н.Г. Денисова "Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме" [1], ставшая во многом основополагающей в теории распространения радиоволн в плазме и в проблеме лазерного термоядерного синтеза. Развивая идеи предшественников [77, 78, 80, 81], автор [1] детально исследовал структуру электромагнитного поля с особенностью в рамках линейной (по амплитуде падающей волны) теории на основе уравнений Максвелла и уравнений бесстолкновительной гидродинамики для электронов. Была впервые прояснена физическая природа особенности электрического поля. Дело в том, что в неоднородной плазме может осуществляться раскачка продольных плазменных колебаний за счёт резонанса колебаний электронов в поле электромагнитной волны с частотой ω_0 и собственных колебаний плазмы с ленгмюровской частотой ω_L . *Плазменный резонанс*, имеющий место в точке, где $\varepsilon = 0$, т.е. там, где совпадают частоты ω_0 и ω_L , ведёт к усилению электростатических колебаний и к резкому возрастанию потен-

циального электрического поля в окрестности критической плотности плазмы (рис. 1б). Таким образом, в [1] было дано качественное описание роли плазменного резонанса в специфическом процессе поглощения электромагнитного излучения неоднородной плазмой, которое впоследствии назвали *резонансным поглощением*. Кроме того, впервые был вычислен коэффициент усиления поля и было показано, что конечное значение амплитуды электрического поля плазменного резонанса обеспечивается либо столкновительной диссипацией плазменных колебаний в случае холодной плазмы, либо выносом плазменных волн при учёте тепловых эффектов в случае горячей плазмы [1–3]. Впоследствии результаты [1] послужили базой для развития различных теорий в ионосферной и лазерной плазмах. В ионосферной плазме эти результаты легли в основу исследований (теоретических и экспериментальных) по линейной трансформации и поглощению волн [82], по формированию вытянутых вдоль магнитного поля искусственных неоднородностей в ионосфере [83, 84], по созданию искусственно ионизованной области в стратосфере [85], по нелинейным явлениям в плазменном резонансе в ионосфере [63], в том числе по созданию кинетической теории плазменной турбулентности с образованием кавитонов — ямок плотности плазмы, являющихся причиной появления ускоренных электронов. В лазерной плазме работа [1] способствовала развитию теорий генерации гармоник [8–16], квазистатических полей [14, 17], резонансного поглощения [6, 7] и генерации быстрых частиц из области критической плотности неоднородной лазерной плазмы [18–26], чему посвящено множество работ отечественных и зарубежных исследователей. Благодаря неуклонному совершенствованию техники лазерно-физических экспериментов достигалась всё большая интенсивность лазерного излучения, и в результате возникла необходимость учёта нелинейных эффектов для плазменных колебаний в области резонанса.

Сильно нелинейные нерелятивистские плазменные колебания впервые исследовались А.И. Ахиезером и Г.Я. Любарским [86] при анализе стационарных нелинейных ленгмюровских колебаний в виде бегущих волн как решений уравнений холодной бесстолкновительной гидродинамики пространственно однородной электронной плазмы с нейтрализующим ионным фоном. Вследствие учёта конечной, но всё же существенно нерелятивистской скорости электронов получалось, что частота нелинейных колебаний не зависит от амплитуды скорости и определяется классической формулой Ленгмюра. Обобщая применённый в [86] метод на случай любых скоростей электронов, А.И. Ахиезер и Р.В. Половин [87] подробно рассмотрели различные режимы продольных и поперечных электронных колебаний в плазме. В частности, они выяснили, что учёт релятивизма в движении электронов приводит к зависимости частоты продольных колебаний от амплитуды скорости, а именно к уменьшению частоты с ростом скорости из-за релятивистского изменения "массы"² частицы. Так, при стремлении скорости бегущей волны к скорости света $v \rightarrow c$

² Кавычками здесь и ниже подчёркивается, что речь идёт об изменении законов динамики при больших скоростях, но с оговоркой, что масса, вообще говоря, будучи четырёхмерным скаляром, является релятивистским инвариантом.

частота стремится к нулю, поскольку "масса" электрона стремится к бесконечности.

Из результатов работ [86, 87] неявно следовало ограничение на амплитуду колебаний электронной компоненты плазмы, обусловленное самой нелинейностью. На это указал Дж.М. Доусон в статье [88], в которой на языке производной лагранжева смещения электронов плазмы относительно их начального положения был найден критерий опрокидывания профиля нелинейной плазменной волны при превышении амплитудой колебаний некоторого критического значения. Позже, в работе Т.П. Коффи [89], исследовалась стационарная структура продольных электронных колебаний и условия их опрокидывания в плазме на основе решения системы уравнений Власова–Пуассона с использованием простого модельного распределения электронов по скоростям типа "водяной мешок" на фоне неподвижных ионов. Было показано, что соответствующая опрокидыванию предельная амплитуда колебаний монотонно убывает при возрастании отношения тепловой скорости электронов к фазовой скорости волны.

Стационарные (квазистационарные) режимы нерелятивистских плазменных колебаний в окрестности плазменного резонанса рассматривались в работах по генерации гармоник падающего на неоднородную плазму р-поляризованного лазерного излучения [8, 10, 11, 13, 14] на основе модели плазменного резонанса Гинзбурга–Денисова. В отличие от работ [8, 10, 11, 13], выполненных в рамках слабо нелинейной теории, в исследованиях В.Ф. Ковалева и В.В. Пустовалова [14] был развит непертурбативный подход, позволивший учесть в исходных уравнениях сильную нелинейность (по амплитуде электрического поля) движения электронов, но в пренебрежении релятивистскими эффектами. С применением метода ренормгрупповых симметрий [68] была найдена стационарная нелинейная структура электромагнитного поля в области плазменного резонанса и с её помощью были вычислены амплитуды гармоник падающей на неоднородную плазму электромагнитной волны. Также было сформулировано обобщение условия опрокидывания [88] на сильно нелинейный нерелятивистский случай для ленгмюровских колебаний в окрестности критической плотности. Предложенный в [14] подход к описанию нелинейных плазменных колебаний вне рамок теории возмущений был использован в работах [42, 43, 76], посвящённых построению структуры электрического поля с учётом релятивистских эффектов движения электронов вблизи критической плотности плазмы. Излагая результаты теории нелинейного плазменного резонанса, мы будем опираться в основном на работы [42, 43, 76].

Применительно к задачам ускорения частиц и нагрева плазмы нерелятивистская динамика электронной компоненты плазмы в окрестности критической плотности обсуждалась Дж. Олбриттоном, С.В. Булановым, А.Ю. Ли и др. в иной постановке, отвечающей так называемой модели "конденсатора" [18, 21, 22]. В такой модели рассматриваются вынужденные колебания неоднородного слоя плазмы, помещённого во внешнее однородное высокочастотное электрическое поле. Вследствие неоднородности плазмы [21, 88] процесс колебаний электронов имеет нестационарный характер и завершается опрокидыванием профиля плазменной волны за конечное время. Вычисление отвечающей моменту опрокидывания максимальной амплитуды вынужденных ленгмю-

ровских колебаний, выполненное в [18] для холодной плазмы, было продолжено в [90] для плазмы с конечной температурой электронов, характеризуемых функцией распределения вида "водяной мешок".

Учёт релятивистской нелинейности динамики электронов существенно усложняет задачу аналитического исследования, поэтому релятивистские плазменные колебания в неоднородной плазме исследуются в основном методами численного моделирования, как, например, в работах А.А. Фролова и др. [40, 91, 92] или в рамках приближённых и полуаналитических моделей в работах Дж.Ф. Дрейка, Н.Л. Цинцадзе, С.В. Буланова и др. [41, 93–95]. В случае численного моделирования плазмы применяются как гидродинамическое описание с использованием лагранжева формализма [91, 92], так и кинетический подход на основе PIC-метода [40]. При изучении нелинейной эволюции релятивистских плазменных волн [93] в решении начальной задачи с возрастанием времени наблюдается укручение фронта волны, приводящее к её опрокидыванию.

2.1. Построение сильно нелинейных решений уравнений теории плазменного резонанса методом ренормгрупповых симметрий

Для описания динамики электронов и структуры электромагнитного поля вблизи критической плотности, а в последующих разделах — процессов нелинейного поглощения и генерации гармоник р-поляризованной электромагнитной волны, которая падает на слабо неоднородную вдоль координаты x плазму под углом θ и характеризуется электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{B} полями с частотой ω_0 ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \{0, 0, B_0(x)\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{с.с.},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \{E_{0x}(x), E_{0y}(x), 0\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \quad (2.1)$$

$$k_y = k_0 \sin \theta, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c},$$

в качестве исходных уравнений запишем следующие уравнения бесстолкновительной гидродинамики холодной релятивистской электронной плазмы и уравнения Максвелла:

$$\partial_t \mathbf{p} + (\mathbf{v} \partial_r) \mathbf{p} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right), \quad \partial_t n_e + \text{div}(n_e \mathbf{v}) = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} en_e \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi(en_e + e_i n_i), \quad \mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}\gamma = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2)$$

Здесь m и e — масса и заряд электрона, c — скорость света в вакууме, n_e , \mathbf{v} , \mathbf{p} — плотность, скорость и импульс электронов плазмы, \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряжённости электрической и магнитной составляющих р-поляризованного электромагнитного излучения, характеризуемого наличием компоненты электрического поля (2.1) в направлении градиента неоднородности плазмы. Ионы с заданной плотностью n_i рассматриваются в качестве неподвижного нейтрализующего фона, что соответствует используемому в данной работе приближению электронной плазмы, а эффекты теплового движения и столкнове-

ний электронов, не включенные в уравнения (2.2), считаются малыми, хотя их роль в регуляризации особенности плазменного резонанса учитывается в соответствии с процедурой построения нелинейного решения.

Полагая отличными от нуля x - и y -компоненты скорости электронов и электрического поля, а также z -компоненту магнитного поля, после исключения плотности электронов получим из (2.2) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma(\partial_t v + av\partial_x v + au\partial_y v) + \frac{a^2\gamma^3}{c^2} [vu(\partial_t u + av\partial_x u + au\partial_y u) + v^2(\partial_t v + av\partial_x v + au\partial_y v)] &= P + \frac{au}{c} R, \\ \gamma(\partial_t u + av\partial_x u + au\partial_y u) + \frac{a^2\gamma^3}{c^2} [vu(\partial_t v + av\partial_x v + au\partial_y v) + u^2(\partial_t u + av\partial_x u + au\partial_y u)] &= Q - \frac{av}{c} R, \\ \partial_t P + av\partial_x P + av\partial_y Q - c\partial_y R + \omega_L^2 v &= 0, \\ \partial_t Q + au\partial_x P + au\partial_y Q + c\partial_x R + \omega_L^2 u &= 0, \\ \partial_t R + c\partial_x Q - c\partial_y P &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этой системе уравнений и всюду ниже используется обозначение частной производной $\partial_{x^i} \equiv \partial/\partial x^i$ по переменной x^i ($i = 1, \dots, n$). Функции $v = v_x/a$, $u = v_y/a$ описывают нормированные значения компоненты скорости электронов; $\gamma = 1/\sqrt{1 - (a^2/c^2)(v^2 + u^2)}$; $P = eE_x/ma$, $Q = eE_y/ma$, $R = eB_z/ma$ — нормированные значения компонент электрического $\{E_x, E_y, 0\}$ и магнитного $\{0, 0, B_z\}$ полей, где $a = -2e|B_1(0)| \sin \theta/m\omega_0^2 L$ — безразмерная постоянная, пропорциональная амплитуде магнитного поля $|B_1(0)|$ в точке плазменного резонанса $x = 0$; $B_1(0)$ — комплексная амплитуда фурье-компоненты магнитного поля в точке $x = 0$ на частоте лазера ω_0 :

$$B_1(0) = |B_1(0)| \exp [i \arg B_1(0)] = \frac{m\omega_0^2 La}{2|e| \sin \theta} \exp [i \arg B_1(0)]. \quad (2.4)$$

Электронная ленгмюровская частота плазмы $\omega_L \equiv \omega_L(x) = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ с плотностью $n_0(x) = n_i e_i/|e|$ аппроксимируется в окрестности плазменного резонанса $x = 0$ линейной зависимостью от координаты x : $n_0(x) = (1 + x/L)n_c$, где критическая плотность $n_c = m\omega_0^2/4\pi e^2$ и L — характерный масштаб неоднородности плотности, который определяется как отношение электронной плотности n_c к её градиенту, вычисленное в точке критической плотности: $L = |n_c/\nabla n_c|_{n_c=n_c}$. В случае плавного градиента неоднородности плазмы, $L \gg \delta, 1/k_0$ (δ — ширина плазменного резонанса) линейная зависимость от координаты x справедлива в окрестности резонанса для любого монотонного профиля плотности. Условие слабой неоднородности плазмы $k_0 L \gg 1$ является также критически важным для эффективного резонансного поглощения.

Рассматриваемая здесь p -поляризация падающей на плазму электромагнитной волны отвечает отличной от нуля проекции электрического поля на направление градиента пространственной неоднородности плазмы. В этом случае в окрестности точки $x = 0$, где частота колебаний электронов в поле лазерного излучения равна частоте электронных ленгмюровских колебаний плазмы $\omega_0 = \omega_L$, происходит резонансное нарастание продоль-

ного электрического поля и передача части энергии падающей электромагнитной волны продольным плазменным колебаниям. Поэтому, повторяя рассуждения работ [8, 14], учтём, что наибольший вклад в нелинейные эффекты плазменного резонанса определяется x -компонентой электрического поля и скорости электронов:

$$v_x \gg v_y, \quad E_x \gg E_y \gg B_z. \quad (2.5)$$

Чтобы получить уравнения для продольного резонансно-усиленного плазменного поля, выделим из системы (2.3) два уравнения, содержащие x -компоненты электрического поля и скорости электронов, учитывая при этом иерархию полей и скоростей (2.5) в окрестности критической плотности. Тогда придём к следующей паре нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающих x -компоненты нормированных электрического поля P и скорости электронов v вблизи плазменного резонанса:

$$\begin{aligned} \partial_t v + av\partial_x v &= P\gamma_0^{-3}, \\ \partial_t P + av\partial_x P &= -\omega_0^2 v, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\gamma_0 = (1 - \beta v^2)^{-1/2}$, $\beta = a^2/c^2$. Уравнения для поперечных компонент скорости u и электрического поля Q находятся аналогичным образом и имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t(u\gamma_0) + av\partial_x(u\gamma_0) &= Q, \\ \omega_0\partial_x Q + k_y\partial_t P &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В уравнениях (2.6) и (2.7) положено $\omega_L = \omega_0$, т.е. мы пренебрегли зависимостью частоты ω_L от координаты x , что оправдано в случае слабо неоднородной плазмы. Нас будут интересовать аналитические решения уравнений (2.6) и (2.7) в произвольном порядке нелинейности, т.е. вне рамок теории возмущений.

Рассмотрим сначала уравнения (2.6) и для отыскания решения воспользуемся их групповыми свойствами. Заметим, что в данные уравнения входят два параметра a и β , отвечающие вкладам электронной нерелятивистской (или конвективной — связанной с членом $av\partial_x$) и релятивистской (связанной со слагаемым $P\gamma_0^{-3} = P(1 - \beta v^2)^{3/2}$) нелинейностей. Вообще говоря, мерой релятивистской нелинейности является параметр $\beta \sim 1/c^2$, стремящийся к нулю в нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$. Однако выбор параметра релятивизма в виде $\beta = a^2/c^2$ (возникающий, впрочем, естественным образом после перехода к безразмерным переменным) продиктован существенным упрощением последующих вычислений в этом случае. При равенстве нулю параметров $a = 0$ и $\beta = 0$ уравнения (2.6) переходят в уравнения, описывающие линейный плазменный резонанс и имеющие хорошо известные решения [1, 3, 37], поправки к которым могут быть найдены путём построения ряда теории возмущений по a и β . Используя свойства симметрии уравнений, можно связать решения, найденные по теории возмущений, с решениями при конечных a и β . Такой подход базируется на известном в теоретической физике методе ренормгрупповых симметрий [68]; отыскание последних осуществляется с помощью алгоритмов современного группового анализа [96, 97].

Суть метода заключается в следующем. На первом этапе вычисляется допускаемая исходными уравнениями (в нашем случае — уравнениями (2.6)) максимально

широкая группа точечных преобразований в пространстве всех зависимых и независимых переменных, а также параметров, входящих в уравнения. Далее с помощью процедуры сужения группы на частном решении из допускаемой группы выделяется конечномерная подгруппа, оставляющая инвариантным решение исходной системы, полученное в рамках теории возмущений по заданным параметрам. Наконец, использование конечных преобразований, задаваемых этой подгруппой, позволяет связать решения при малых значениях параметров, т.е. решения по теории возмущений, с сильно нелинейными решениями, которые отвечают конечным значениям данных параметров.

Допускаемая уравнениями (2.6) бесконечная группа точечных непрерывных преобразований в пространстве шести переменных a, β, t, x, v, P задаётся инфинитезимальным оператором (генератором группы)

$$X = \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_x + \xi^3 \partial_a + \xi^4 \partial_\beta + \eta^1 \partial_v + \eta^2 \partial_P \quad (2.8)$$

с координатами $\xi^i, i = 1, \dots, 4$ и $\eta^j, j = 1, 2$, которые являются функциями переменных t, x, v, P , параметров a, β и определяются в соответствии со стандартной процедурой группового анализа [96, 97] (см. приложение А и [42, 43, 76]). Решение по теории возмущений для системы (2.6) строится по двум параметрам a и β , а процедура сужения³ бесконечной группы приводит к ренормгрупповым преобразованиям, продолжающим это решение в область конечных значений a и β . Опуская громоздкие вычисления, приведём найденные РГ-преобразования, задаваемые двумя инфинитезимальными операторами:

$$\begin{aligned} R_1 &= \xi_{\text{RG}}^2 \partial_x + \partial_a, \\ R_2 &= \xi_{\text{RG}}^1 \partial_t + \partial_\beta + \eta_{\text{RG}}^1 \partial_v, \end{aligned} \quad (2.9)$$

с координатами $\xi_{\text{RG}}^1, \xi_{\text{RG}}^2, \eta_{\text{RG}}^1$, имеющими вид

$$\begin{aligned} \xi_{\text{RG}}^1 &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{(6 + \beta I_1) E(\mu, \sigma)}{2\sqrt{4 + \beta I_1}} - \frac{F(\mu, \sigma)}{\sqrt{4 + \beta I_1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\beta P/\omega_0}}{4 + \beta I_1} \sqrt{\frac{1/\sqrt{z} - 1}{1 + 1/\sqrt{z}}} \right], \\ \xi_{\text{RG}}^2 &= -\frac{P}{\omega_0^2}, \quad \eta_{\text{RG}}^1 = -\frac{z^{3/2}}{2v\beta^2} \left(2 + \frac{1}{z^{3/2}} - \frac{3}{\sqrt{z}} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \arcsin \frac{P/\omega_0}{\sqrt{I_1}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\beta I_1}{4 + \beta I_1}}, \\ I_1 &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) + \frac{P^2}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $z \equiv 1 - \beta v^2$, а $F(\mu, \sigma), E(\mu, \sigma)$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода [98, 99] соответственно:

$$\begin{aligned} F(\mu, \sigma) &= \int_0^\mu \frac{dx}{\sqrt{(1 - \sigma x^2)(1 - x^2)}}, \\ E(\mu, \sigma) &= \int_0^\mu \frac{\sqrt{1 - \sigma x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

³ Подробности о процедуре сужения см. в [68].

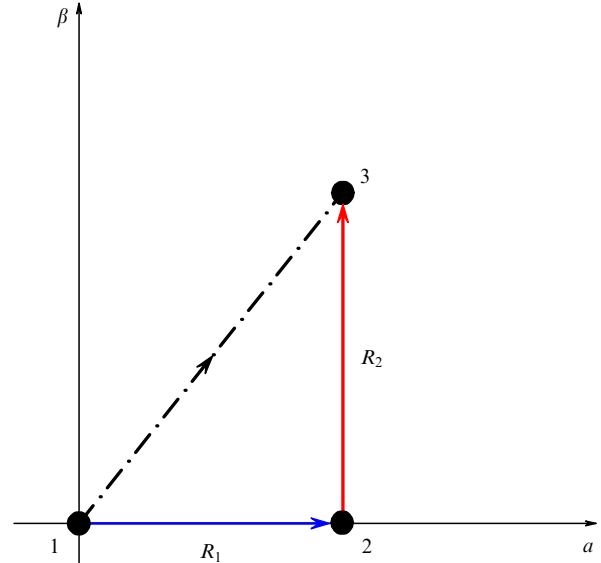


Рис. 2. Схема РГ-преобразования с помощью двухпараметрической ренормгруппы на плоскости параметров преобразования $\{a, \beta\}$, которым осуществляется переход между теориями плазменного резонанса. Точка 1 соответствует линейной теории, точка 2 — сильно нелинейной нерелятивистской теории, а точка 3 — нелинейной релятивистской теории.

Вычисляя коммутатор операторов R_1 и R_2 , можно легко убедиться, что $[R_1, R_2] = 0$, т.е. группа, задаваемая этими генераторами, — абелева. Поэтому конечные преобразования группы под действием R_1 и R_2 на плоскости $\{a, \beta\}$, которые находятся путём интегрирования уравнений Ли, можно рассматривать в виде последовательности двух независимых шагов с параметрами группового преобразования a и β соответственно, как показано на рис. 2. Стрелкой из точки 1 в точку 2 обозначается преобразование, связывающее решение линейной задачи с нелинейным нерелятивистским решением, а стрелка из точки 2 в точку 3 соответствует переходу от нелинейного нерелятивистского к релятивистскому решению. Поскольку R_1 не содержит операторов дифференцирования по времени t , скорости v и полю P , а R_2 — по координате x и электрическому полю P , то указанные величины являются инвариантами соответствующих преобразований с операторами R_1 и R_2 . Тогда на первом шаге, определяемом действием генератора R_1 , т.е. решением соответствующего ему уравнения Ли,

$$\frac{dx}{da} = \xi_{\text{RG}}^2, \quad x|_{a=0} = \eta, \quad (2.13)$$

найдем конечные преобразования для времени t , координаты x , поля P и скорости v :

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{\text{linear}}, \quad x_1 = \eta - a\omega_0^{-2}P_1, \\ P_1 &= P_{\text{linear}}(\chi, \eta), \quad v_1 = v_{\text{linear}}(\chi, \eta), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\chi = \omega_0 t_{\text{linear}}$, а $\eta = x(0, \eta)$ обозначает координату $x = x(a, \eta)$ при нулевом значении параметра a . Формулы (2.14) определяют переход от решения, полученного в рамках линейной теории, к решению, учитывающему электронную нелинейность, но без влияния релятивистских эффектов. Инвариантность времени t , скорости v и поля P проявляется в том, что они определяются формулами линейной теории (на это указывает индекс

linear). Таким образом, нелинейная структура поля и скорости электронов зависит от того или иного вида электрического поля P_{linear} , являющегося решением линеаризованной системы уравнений по отношению к (2.6). При выборе линейного решения, продолжаемого ренормгрупповым преобразованием в область конечных значений параметров нелинейности, воспользуемся результатом, полученным для холодной электронной плазмы с линейным профилем плотности [1, 37]. В данном случае поле имеет в точке $x = 0$ особенность порядка $1/\varepsilon$ ($\varepsilon = 1 - \omega_L^2/\omega_0^2$ — диэлектрическая проницаемость плазмы, обращающаяся в нуль при условии резонанса $\omega_0 = \omega_L$), которая, однако, "снимается" при учёте столкновений или раскачки продольных плазменных колебаний, определяя тем самым конечную ширину линейного плазменного резонанса Δ . С учётом выбора конкретного вида линейной структуры поля выражения для поля и скорости, отвечающие первому шагу преобразования, запишутся в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{\omega_0^2 L^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \cos \chi + \Delta \sin \chi), \\ v_1 &= -\frac{\omega_0 L^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \sin \chi - \Delta \cos \chi), \\ x_1 &= \eta + \frac{aL^2}{\Delta^2 + \eta^2} (\eta \cos \chi + \Delta \sin \chi), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где Δ определяется либо тепловым движением электронов с тепловой скоростью V_T , либо малой частотой соударений ν частиц в плазме:

$$\Delta = \max \left\{ \frac{\nu L}{\omega_0}; \left(\frac{3V_T^2 L}{\omega_0^2} \right)^{1/3} \right\}. \quad (2.16)$$

Выполним теперь второй шаг, связанный с конечными преобразованиями по параметру релятивизма β , которые вытекают из уравнений Ли, соответствующих генератору R_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\beta} &= \xi_{\text{RG}}^1, \quad t|_{\beta=0} = t_1, \\ \frac{dv}{d\beta} &= \eta_{\text{RG}}^1, \quad v|_{\beta=0} = v_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Интегрирование уравнений (2.17) даёт переход от нелинейного нерелятивистского решения (2.15) к релятивистскому решению. Инвариантность электрического поля P ($P_{\text{II}} = P_1$) и координаты x ($x_{\text{II}} = x_1$) относительно преобразования с оператором R_2 позволяет использовать соответствующие выражения из (2.15), а вычисление из (2.17) конечных преобразований скорости $v \equiv v_{\text{II}}$ и "времени" $\tau \equiv \omega_0 t_{\text{II}}$ приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \frac{(1 + (1/4)\beta v_1^2)^{1/2}}{1 + (1/2)\beta v_1^2}, \\ \tau &= \chi - \left(\sqrt{4 + \beta I_1} E(\varphi, k) - \frac{2F(\varphi, k)}{\sqrt{4 + \beta I_1}} - \varphi \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \frac{P_1/\omega_0}{\sqrt{I_1}}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta I_1}{4 + \beta I_1}}, \\ I_1 &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) + \frac{P_1^2}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Формулы (2.15), рассматриваемые совместно с (2.18), через параметрические переменные η и χ описывают в неявной форме нелинейную структуру продольных компонент поля и скорости электронов с учётом двух типов нелинейности — нерелятивистской и релятивистской. Явная зависимость электрического поля и скорости электронов от истинных координаты x и времени t определяется посредством исключения η и χ из (2.15) и (2.18). Выражения (2.15), (2.18) являются результатом продолжения соответствующих решений линеаризованных относительно (2.6) уравнений на область конечных значений параметров $a \neq 0$ и $\beta \neq 0$ с помощью ренормгруппового преобразования. Отметим, что закон преобразования координаты в (2.14) полностью совпадает с результатом, полученным при построении нелинейного нерелятивистского решения в [14]. Существенное отличие от нерелятивистского случая [14] заключается в том, что теперь, кроме координаты x , в преобразования ренормгруппы вовлекаются также скорость v и время t . Электрическое поле P при этом остаётся инвариантом РГ-преобразований, что соответствует обращению в нуль координаты $\eta_{\text{RG}}^2 = 0$. Аналогичный результат получается для поперечных компонент электрического поля Q и скорости электронов u при расширении действия группы преобразований (2.8) на уравнения (2.7). Дополнив генератор (2.8) слагаемыми $\eta^3 \partial_u$ и $\eta^4 \partial_Q$, получим [56], что с точностью, не превышающей точности вычисления нелинейных токов, координаты генератора группы η_{RG}^3 и η_{RG}^4 можно считать равными нулю, а функции Q и u — инвариантами РГ-преобразования. Последнее позволяет использовать для амплитуд поперечных компонент электрического поля Q и скорости u функции из [14]:

$$\begin{aligned} u &= k_y \omega_0 L^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (\Delta^2 + \eta^2) \right) \cos \chi - \right. \\ &\quad \left. - \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}} \sin \chi \right], \\ Q &= k_y \omega_0^2 L^2 \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (\Delta^2 + \eta^2) \right) \sin \chi - \right. \\ &\quad \left. - \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \Delta^2}} \cos \chi \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь $C = 0,5772156$ — постоянная Эйлера–Маскерони. Отличие от нерелятивистского случая [14] для u и Q заключается в том, что выражения (2.20) следует рассматривать совместно с конечным преобразованием "времени" из (2.18).

Итак, выражения (2.15), (2.18) и (2.20) в неявном виде задают пространственно-временную структуру электрического поля и скорости электронов, а именно их продольные P , v и поперечные Q , u компоненты с учётом как нерелятивистской, так и релятивистской нелинейностей движения электронов вблизи плазменного резонанса. При этом совокупность формул (2.15) и (2.18) даёт точное решение системы уравнений (2.6), что проверяется подстановкой, а выражения (2.20) наряду с (2.18) описывают пространственно-временные зависимости амплитуд поперечных компонент электрического поля и скорости электронов с точностью $\sim k_y$. Дело в том, что в разделах 3 и 4 будут получены общие релятивистские выражения для токов в области плазменного резонанса, которые являются источниками генерации вторичного

излучения на основной ω_0 и кратных $n\omega_0$, $n \geq 2$, частотах. Указанные выражения строятся из функций электрического поля и скорости электронов в плазменном резонансе и по условиям построения имеют точность, не превышающую k_y . Следовательно, при отыскании структуры поперечных компонент электрического поля и скорости электронов мы можем ограничиться точностью $\sim k_y$. В нерелятивистском пределе при $c \rightarrow \infty$ найденные выражения переходят в формулы нелинейной нерелятивистской теории из работы [14].

Собирая воедино (2.15), (2.18), (2.20) и переходя к нормированным функциям и переменным

$$P_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2} P, \quad Q_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2} Q, \quad v_1 = \frac{a}{\Delta\omega_0} v,$$

$$u_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0} u, \quad x_0 = \frac{x}{\Delta}, \quad l = \frac{\eta}{\Delta},$$

выпишем результирующие выражения, определяющие нелинейную структуру электрического поля и скорости электронов в окрестности критической плотности плазмы:

$$P_0 = -\frac{A}{1+l^2}(l \cos \chi + \sin \chi),$$

$$v_0 = -\frac{A}{1+l^2}(l \sin \chi - \cos \chi), \quad x_0 = l - P_0,$$

$$u_0 = -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \sin \chi - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \cos \chi \right],$$

$$Q_0 = -AB \sin \theta \left[\arccos \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} \cos \chi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_y^2 e^{2C}}{4} (1+l^2) \right) \sin \chi \right], \quad (2.21)$$

$$v_1 = v_0 \frac{(1 + (1/4)B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + (1/2)B^2 v_0^2},$$

$$\tau(\chi, l) = \chi - \left(\zeta E(\varphi, k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi, k) - \varphi \right),$$

где

$$\zeta = \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}},$$

$$k = \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}}.$$

Отличные от нуля значения релятивистского параметра β при фиксированной заданной безразмерной амплитуде плазменного поля a (или при фиксированном параметре $A \equiv aL^2/\Delta^2$) соответствуют конечным значениям безразмерного параметра $B \equiv \omega_0 \Delta/c$. Поэтому будем ассоциировать B с параметром релятивизма. Случай нерелятивистского приближения ($B \ll 1$) был рассмотрен в работе [14]. Следует отметить, что условие $k_y \Delta = B \sin \theta \ll 1$, отвечающее реализации эффекта резонансного усиления потенциальной компоненты плазменного поля [3, 14], в нашем случае по-

прежнему может быть выполнено при достаточно небольших углах падения лазерного излучения на слой плазмы.

Рассматривая взаимодействие лазерного излучения с плазмой при умеренной лазерной интенсивности, мы ограничиваемся случаем, когда колебательное движение электронов в лазерном поле является нерелятивистским $eE_{\text{laser}}/m\omega_0 \ll c$, где E_{laser} — амплитуда лазерного поля. Таким образом, уравнения (2.6) и (2.7) получены в предположении, что релятивистские эффекты существенны только для продольной компоненты скорости электронов вблизи плазменного резонанса, где проявляется эффект резонансного усиления электрического поля. Наиболее значительным нелинейным эффектом в нашей теории является нелинейность продольного движения электронов в окрестности плазменного резонанса, рассчитываемая с применением теоретико-группового подхода. Что касается релятивистских лазерных полей, то в этом случае требуется разработка более сложной теории, выходящей за рамки гидродинамической модели. При столь высоких интенсивностях лазерного излучения динамика электронной компоненты плазмы должна описываться в многопоточковом режиме, для которого необходимо использование кинетических уравнений⁴. Однако исследование границы опрокидывания плазменных колебаний возможно и в рамках гидродинамического приближения, что и демонстрируется в следующих разделах работы.

2.2. Стационарные и нестационарные релятивистские электронные колебания в плазменном резонансе

Исследуем формулы, описывающие продольные и поперечные компоненты электрического поля и скорости электронов вблизи плазменного резонанса. Сначала обсудим выражения из (2.21) для электрического поля P , скорости v_1 и координаты x_1 (см. также формулы (2.15)), которые являются результатом первого шага РГ-преобразования и полностью совпадают с найденным ранее нелинейным нерелятивистским решением [14]. Преобразование $x = \eta - Pa\omega_0^{-2}$ (или в безразмерном виде: $x_0 = l - P_0$) имеет вид лагранжевой замены эйлеровой координаты x , если под величиной $Pa\omega_0^{-2}$ понимать лагранжево смещение электронов относительно координаты η . Зависимости безразмерной координаты $x = x_1/\Delta$ от переменной $l = \eta/\Delta$ в разные моменты времени, а также при различных значениях параметра A представлены на рис. 3. В линейном по амплитуде поля накачки случае, когда $x = \eta$, поле плазменного резонанса являлось монохроматическим. Именно благодаря нелинейной связи P и x электрическое поле P в нелинейном нерелятивистском случае характеризуется спектром, содержащим высшие гармоники с частотами, кратными основной частоте поля лазерного излучения ω_0 .

Далее, включая в рассмотрение релятивистскую нелинейность и, как результат, выражения для преобразованных скорости v и времени τ (2.18), обратим внимание на ветвление решения, обусловленное существованием двух способов продолжения от точки ветвления χ_0 функций, входящих в выражение для $\tau = \tau(\chi, l)$, которое

⁴ Один из примеров использования подобного перехода от однопоточкового движения к многопоточковому режиму даёт задача о динамике холодного бездиссипативного газа в расширяющейся Вселенной [100].

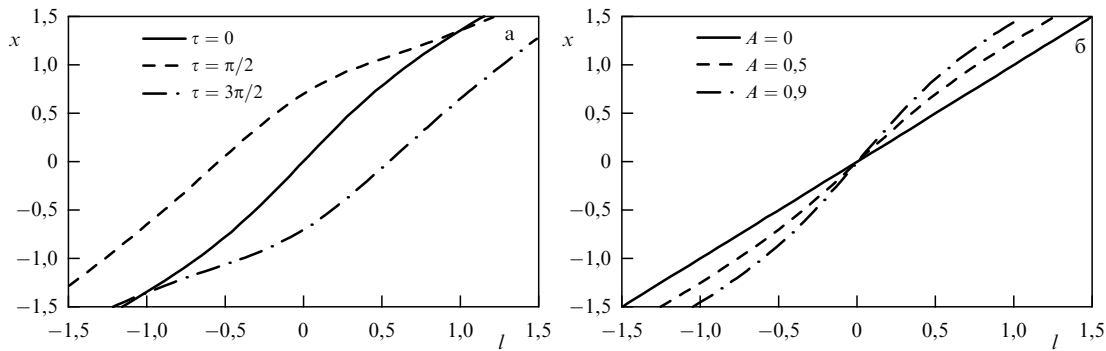


Рис. 3. Зависимости $x(l)$ в разные моменты времени τ (а) и при различных значениях безразмерной амплитуды A в момент времени $\tau = 0$ (б). Биссектриса $x = l$ отвечает случаю $A = 0$.

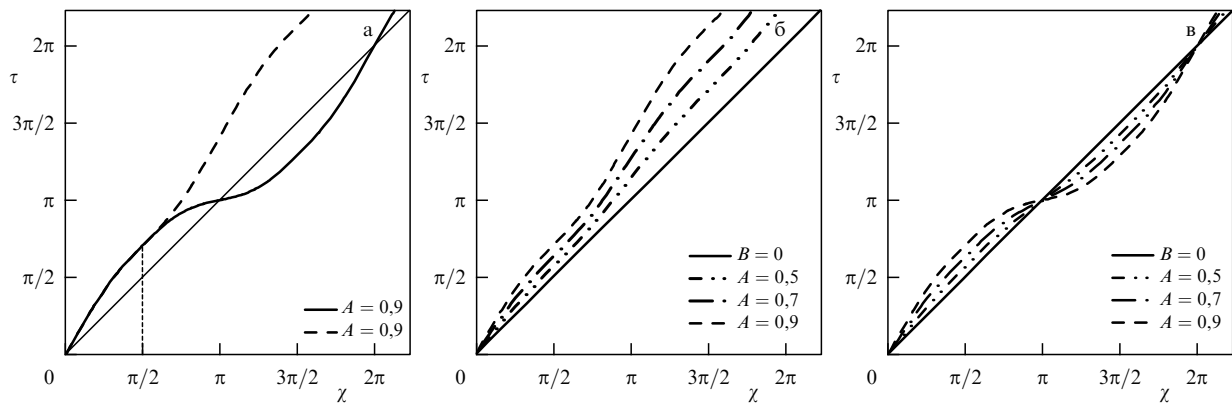


Рис. 4. (а) Две ветви решения, отвечающие двум способам продолжения $\tau(\chi, l)$ от точки ветвления $\chi = \pi/2$ при $l = 0$. Обе кривые построены при $A = 0,9, B = 1,8$. Биссектриса соответствует нерелятивистскому пределу $B = 0$. (б, в) Графическое представление выражения $\tau(\chi, l)$ для двух ветвей решения в точке $l = 0$ при разных значениях параметра A и фиксированном параметре $B = 1,8$.

характеризует изменение фазы колебаний релятивистских электронов в резонансно-усиленном плазменном поле. Свойство ветвления решений нелинейных уравнений движения хорошо известно, например, в некоторых задачах механики [101]. С учётом такого свойства выбор способа продолжения функций от точки χ_0 определяет один из двух типов возбуждаемых плазменных колебаний. Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим сначала графическое представление выражения для $\tau(\chi, l)$. Зафиксируем, для примера, $B = 1,8$, фиксируя тем самым параметры плазмы. Учитывая, что разным значениям параметрической переменной l соответствуют разные точки ветвления χ_0 , рассмотрим для определённости случай $l = 0$, когда $\chi_0 = \pi/2$. На рисунке 4а приведены две ветви решения при одинаковых значениях параметров A и B . В пренебрежении релятивистскими эффектами, т.е. при $B = 0$, зависимость $\tau(\chi, l)$ от χ является линейной: $\tau = \chi$. Этому случаю на рисунке соответствует биссектриса. При переходе к релятивистскому режиму такая зависимость сменяется на зависимость вида $\tau = \Psi\chi$, где $\Psi = \Psi(\chi, l) \neq 1$. На одной из ветвей решения (штриховая линия) различимы две тенденции в проявлении релятивистских эффектов. Первая из них заключается в медленной периодической зависимости $\Psi(\chi, l)$, отвечающей пространственно-временной модуляции фазы, вторая — в изменении угла наклона $\tau(\chi, l)$, характеризуемого производной $\partial_\chi \tau$, что соответствует сдвигу частоты колебаний электронов в область меньших частот. На другой ветви решения (сплошная кривая,

рис. 4а) наблюдается только фазовая модуляция. Характер изменения фазы колебаний с ростом величины параметра A для двух ветвей решения представлен на рис. 4б и рис. 4в: фазовая модуляция усиливается с ростом безразмерной амплитуды A . В первом случае (рис. 4б) зависимость τ от χ при любых A остаётся однозначной. В случае второй ветви решения (рис. 4в) усиление модуляции при превышении некоторого критического значения A_{cr} приводит к образованию перегибов функции $\tau(\chi, l = 0)$ в точках $\chi = \pi + 2\pi n, n = 0, 1, \dots$, в результате чего "время" τ перестаёт быть однозначной функцией переменной χ и, следовательно, теряют также однозначность функции скорости электронов v и электрического поля P . Находясь в рамках гидродинамической модели, мы будем рассматривать только однозначные зависимости функций физических величин, что соответствует значениям параметров A и B , удовлетворяющим неравенству $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$, которое находится из условия $\partial_\chi \tau(\pi, 0) = 0$ и фиксирует верхнюю границу применимости формулы для $\tau(\chi, l)$. Формулы, определяющие неявную зависимость функций P и v_l от координаты x в (2.15), также имеют границу применимости, определяемую предельной величиной безразмерного параметра $A = A_0 = 1$, характеризующего вклад нерелятивистской электронной нелинейности. В работе [14] было установлено, что для значений $A \geq 1$ зависимость $x(l)$ не является однозначной, а значит, теряют однозначность P и v_l как функции координаты x . Однако, как будет показано ниже, ограничения $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$ и $A < A_0$ яв-

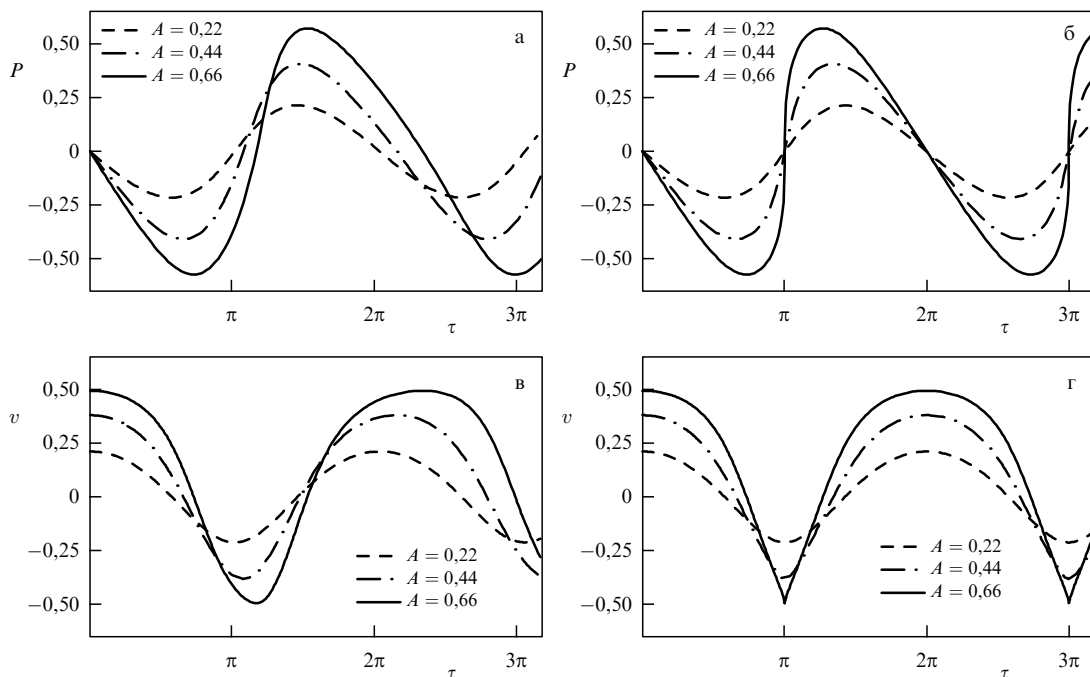


Рис. 5. Временные зависимости продольных компонент электрического плазменного поля P и скорости электронов v в нестационарном (а, в) и стационарном (б, г) случаях в точке плазменного резонанса $x = 0$ для различных значений параметра A . Графики построены при $B = 1,5$.

ляются необходимыми, но не достаточными для выполнения условий однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$.

Обсудим физические следствия, вытекающие из выражения для $\tau(\chi, l)$. На рисунке 5 представлены временные зависимости продольных компонент электрического плазменного поля P и скорости электронов v в точке $x = 0$ при различных значениях параметра A . Из рисунков 5а и 5в видно, что сдвиг частоты колебаний в область низких частот, характерный для первой ветви решения (рис. 4б), ведёт к потере свойства стационарности колебаний: в различных точках пространства колебания происходят с различающимися частотами, а это со временем приводит к увеличению разности фаз между ними. Секулярно возрастающая разность фаз, существование которой связано с пространственной неоднородностью амплитуды плазменных колебаний [93, 94], в итоге приводит к пересечению траекторий соседних частиц, т.е. к опрокидыванию профиля колебаний. Подчеркнём, что в нестационарном режиме опрокидывание профиля происходит при сколь угодно малых амплитудах за конечный интервал времени, в соответствии с хорошо известными результатами, полученными ранее (см., например, [92], а также обзор [102]). Возникновение опрокидывания на конечном интервале времени продемонстрировано на рис. 6: с ростом времени наблюдается постепенное укрупнение профиля плазменных колебаний, в итоге приводящее к возникновению неоднозначности функции поперечного электрического поля $P(\tau)$. Вторая ветвь решения (2.21) определяет стационарный режим плазменных колебаний с модулированной фазой (рис. 5б, г). В данном случае опрокидывание возникает только при превышении амплитудой поля некоторого порогового значения: с ростом параметра A наблюдается укрупнение профиля стационарных плазменных колебаний вплоть до предельного значения A , при котором производная $\partial_x P$ обращается в бесконечность и гидродинамическая модель становится неприменимой.

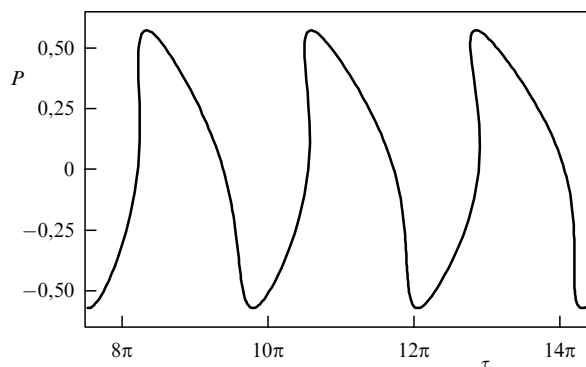


Рис. 6. Опрокидывание профиля нестационарных плазменных колебаний в точке $x = 0$ при $B = 1,5$, $A = 0,66$.

Наглядно иллюстрируют нестационарный и стационарный характер плазменных колебаний пространственно-временные распределения резонансно-усиленного поля $P(\tau, x)$, показанные на рис. 7. Пространственно-временная структура поля вдали от области резонанса соответствует слабо возмущённым стационарным плазменным колебаниям. В окрестности же резонанса, где существуют нелинейные эффекты, наблюдается значительное искажение структуры поля, проявляющееся как в нестационарном (рис. 7а), так и в стационарном (рис. 7б) режимах в зависимости от выбора ветви решения (2.21).

2.3. Опрокидывание и пространственные характеристики стационарного резонансно-усиленного электрического поля

Решение задач РП и ГГ при нелинейном плазменном резонансе естественным образом подразумевает определение характера динамики электронов вблизи критической плотности плазмы, где формируются нелинейные токи, генерирующие вторичное излучение и определяю-

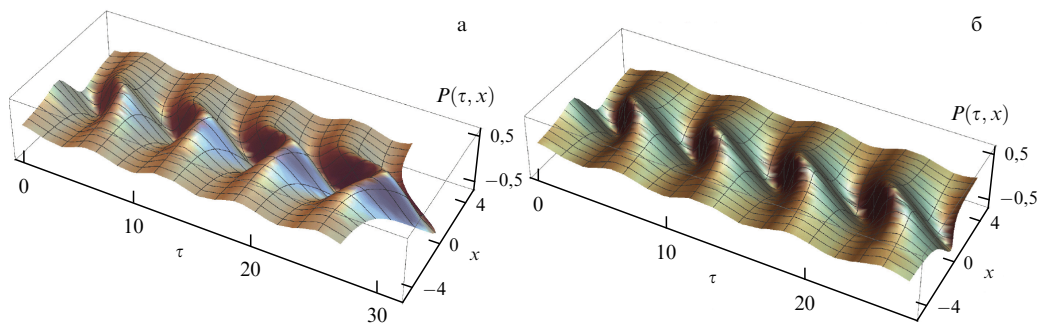


Рис. 7. Пространственно-временные распределения резонансно-усиленного продольного электрического поля P в нестационарном (а) и стационарном (б) режимах колебаний. Графики построены при $A = 0,66$, $B = 1,5$.

шие его спектральный состав. Для классических теорий [8, 11, 14] характерна краевая (граничная) постановка задачи, когда рассматривается динамика *стационарных* колебаний электронной компоненты плазмы в совокупности с граничными условиями на бесконечности. В ряде исследований сильно нелинейных (релятивистских) плазменных колебаний делается выбор в пользу начальной задачи по времени [91–93]. При таком подходе возникает нестационарный режим нелинейных плазменных колебаний, не подразумевающий развития теорий поглощения и генерации гармоник лазерного излучения в области релятивистского плазменного резонанса, которые должны быть естественным обобщением ранее полученных результатов в рамках стационарных нелинейных нерелятивистских теорий [11, 14] и линейной теории [1, 37]. Необходимость подобного обобщения диктуется реальной медленной⁵ динамикой изменения лазерной интенсивности, отвечающей импульсу падающего на плазму электромагнитного излучения, для которого вначале имеет место линейный плазменный резонанс [1, 37, 103], затем с нарастанием интенсивности в импульсе он сменяется нелинейной нерелятивистской резонансной структурой [14], а при дальнейшем росте интенсивности проявляются релятивистские эффекты. Укажем допустимую длительность лазерного импульса с учётом динамики формирования плазменного резонанса. Согласно теории установления стационарного плазменного резонанса [103], время формирования стационарной структуры резонансно-усиленного плазменного поля можно оценить как $t_{st} \approx \sqrt{12}L\Delta/V_T$. При масштабе неоднородности $L \approx 10\lambda$ и температуре плазмы $T \approx 2$ кэВ получаем $t_{st} \approx 10^{-13}$ с, т.е. для указанных характерных параметров плазмы минимально допустимая нашей теорией длительность лазерного импульса составляет примерно сотню фемтосекунд. Построение аналитической *стационарной* теории *релятивистского плазменного резонанса* представляет интерес ещё и потому, что многозначность найденных на сегодняшний день нелинейных решений [14, 40, 92, 93, 104], описывающих взаимодействие мощного электромагнитного поля с неоднородной плазмой, указывает на возможность реализации всё ещё не изученных динамических режимов плазменных колебаний, отыскание и исследование которых имеет универсальное значение как для теории лазерно-плазменного

взаимодействия, так и для теории нелинейных колебаний в целом.

В дальнейшем, исходя из вышеуказанных физических соображений, мы сосредоточимся на изучении именно стационарного режима релятивистских плазменных колебаний, имеющего место при условии адиабатически медленного нарастания интенсивности поля в лазерном импульсе. Вопросы устойчивости и реализации нестационарной ветви решения рассматриваться⁶ нами не будут. Подчеркнём, что опрокидывание плазменных колебаний в обсуждаемом нами случае есть результат наложения электронных нелинейностей двух типов — нерелятивистской и релятивистской, а найденные выше ограничения $A^2B^2 < 2\sqrt{3}$ и $A < 1$ (первое из которых вытекает из условия однозначности $\tau(\chi, l)$ как функции χ , а второе следует из условия однозначности P и v как функций координаты x), вообще говоря, не определяют критерия однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$. Проявление нелинейных эффектов наиболее существенно в точке плазменного резонанса $x = 0$ (или в точке $l = 0$). При этом потеря однозначности с ростом A , как видно, например, из рис. 5б, впервые происходит при $\tau = \pi$. Поэтому для получения полного условия опрокидывания профиля стационарных плазменных колебаний необходимо вычислить производную электрического поля по координате $\partial_x P(\tau, l)$ в точке $\{\tau = \pi, l = 0\}$ или, что то же самое, в точке $\{\chi = \pi, l = 0\}$:

$$\partial_x P|_{\chi=\pi, l=0} = \frac{1}{D} (\partial_\chi \tau \partial_l P - \partial_l \tau \partial_\chi P)|_{\chi=\pi, l=0}, \quad (2.22)$$

где $D \equiv \partial_l x \partial_\chi \tau - \partial_\chi x \partial_l \tau$ — якобиан перехода от переменных τ, x к переменным χ, l . Записывая условие обращения в нуль якобиана $D|_{\chi=\pi, l=0}$, соответствующее обращению производной $\partial_x P$ в бесконечность и отвечающее опрокидыванию нелинейной плазменной волны, получим следующее соотношение между параметрами A и B :

$$A + \frac{2 + A^2 B^2}{\sqrt{4 + A^2 B^2}} = 2. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) дополняет неравенства $A < 1$, $A^2 B^2 < 2\sqrt{3}$, тем самым определяя область допустимых, в смысле выполнения условия однозначности функций $P(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$, значений параметров A и B (рис. 8). Наложение двух типов нелинейности приводит к иному по сравнению с нерелятивистской теорией [14] виду границы опрокидывания: для фиксированного

⁵ По сравнению с динамикой электронной компоненты плазмы. Такие рассуждения справедливы в случаях не слишком коротких лазерных импульсов длительностью в нано-, пико- и сотни фемтосекунд.

⁶ Как это было сделано, например, в [21].

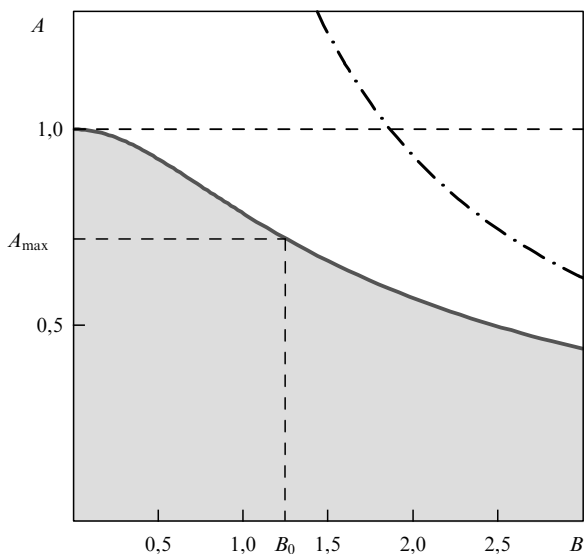


Рис. 8. Область допустимых значений параметров A и B . Сплошная кривая соответствует границе опрокидывания в релятивистской гидродинамике, штриховая прямая ($A = 1$) отвечает опрокидыванию в нерелятивистской теории [14]. Штрихпунктир соответствует условию $A^2 B^2 = 2\sqrt{3}$.

конечного $B_0 > 0$ значение параметра A не может превышать максимального значения $A_{\max} < A_0 = 1$, которое определяется решением уравнения четвертого порядка, следующего из условия (2.23):

$$(B^2 - B^4)A^4 - 4B^2A^3 + 4A^2 - 16A + 12 = 0. \quad (2.24)$$

При $A > A_{\max}$ возникает многопоточковый режим и решение (2.21) становится неприменимым.

Казалось бы, сравнение кривой, изображающей границу опрокидывания в релятивистской теории со штриховой прямой, отвечающей опрокидыванию в нерелятивистской теории [14] (см. рис. 8), демонстрирует более сильное ограничение в релятивистской теории на максимально возможную амплитуду поля A , при которой формулы гидродинамической модели, описывающие физические величины, остаются однозначными. Отсюда можно было бы заключить, что переход к релятивистской теории не позволил продвинуться в область больших лазерных интенсивностей I_0 по сравнению с интенсивностями, рассматриваемыми в [14]. Однако это не так. Ниже, в разделе 3.3, мы покажем, что за счёт эффекта насыщения амплитуды поля плазменного резонанса порог опрокидывания в релятивистской теории на самом деле смещается в область больших (релятивистских) интенсивностей лазерного излучения. Будет получена нелинейная связь амплитуды магнитного поля в точке резонанса с амплитудой поля лазерной накачки, что позволит перейти от безразмерных параметров A и B к естественным физическим параметрам лазерно-плазменной системы и исследовать пределы применимости гидродинамического приближения на языке интенсивности лазерного излучения I_0 и температуры плазмы T .

Заметим, что выражения для структуры электрического поля и скорости электронов (2.15), (2.18) и (2.20) содержат ширину линейного плазменного резонанса Δ , определяемую диссипативными или тепловыми эффектами, хотя в исходных нелинейных уравнениях (2.6) и

(2.7) она не фигурирует. Поясним, каким образом величина Δ появляется в решении. В классической линейной теории [1, 3] в качестве исходных тоже используются уравнения, не содержащие диссипативных слагаемых ввиду их малости, а Δ появляется при учёте малых эффектов диссипации введением конечно малой мнимой части в частоту ω . В исходные уравнения можно было бы добавить слагаемые, связанные с диссипацией, однако для процесса резонансного поглощения соответствующие эффекты оказываются достаточно малыми, поскольку в данном случае в решении возникают поправки порядка v_{eff}/ω . Наличие же Δ в (2.15), (2.18) и (2.20) обусловлено методом ренормгрупповых симметрий, который основан на процедуре продолжения линейного (по амплитуде электрического поля) решения в область параметров лазера и плазмы, где значительны нелинейные эффекты. Для умеренных интенсивностей лазерного излучения и относительно длинных лазерных импульсов длительностью пико-, наносекунды и сотни фемтосекунд реализуется стационарное решение для электрического поля вблизи плазменного резонанса, что соответствует адиабатически медленному (в масштабе времени импульса) росту лазерного поля по сравнению с динамикой электронов в плазменном резонансе. В таком режиме происходит непрерывный переход от стационарного линейного резонанса к стационарной нелинейной резонансной структуре. Иными словами, пространственная структура решения вида $1/\varepsilon(x) \sim L/(x - i\Delta)$ унаследована от решения, полученного в рамках теории линейного плазменного резонанса [1,3]. Электрическое поле в линейном приближении играет роль "начального" условия и далее изменяется при адиабатическом нарастании амплитуды лазерного импульса. При этом величина Δ , отвечающая ширине линейного плазменного резонанса, теряет указанный смысл в нелинейном режиме и становится просто заданной константой, определяемой эффективной частотой столкновений v_{eff} . Также обратим внимание, что лазерное поле, вообще говоря, может влиять на частоту парных столкновений в (2.16) и это может быть учтено путём перенормировки v_{eff} в соответствии, например, с работой [105].

Из формул (2.15), (2.18) и (2.20) следует, что электростатическое плазменное поле в окрестности критической плотности несколько "разбухает" и, благодаря нелинейным эффектам, характеризуется шириной нелинейного резонанса $\delta > \Delta$. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим пространственные и спектральные характеристики стационарного решения уравнений (2.6), разлагая электрическое поле вблизи точки $x = 0$ в ряд по гармоникам падающей волны

$$P^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau, x) \exp(-in\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.25)$$

На рисунке 9а приведены пространственные распределения амплитуды первой гармоники поля $P^{(1)}(x)$ в нелинейном нерелятивистском случае ($B = 0$) и с учётом релятивистской нелинейности ($B = 1,5$) при фиксированном значении параметра A . Согласно нашей теории, учёт релятивизма плазменных колебаний не приводит к смещению максимума электрического поля относительно точки $x = 0$, однако влечёт за собой уменьшение амплитуды составляющей электрического поля $P^{(1)}(x, \tau)$ на основной частоте, что связано с перераспределением энергии поля между гармониками при переходе к реля-

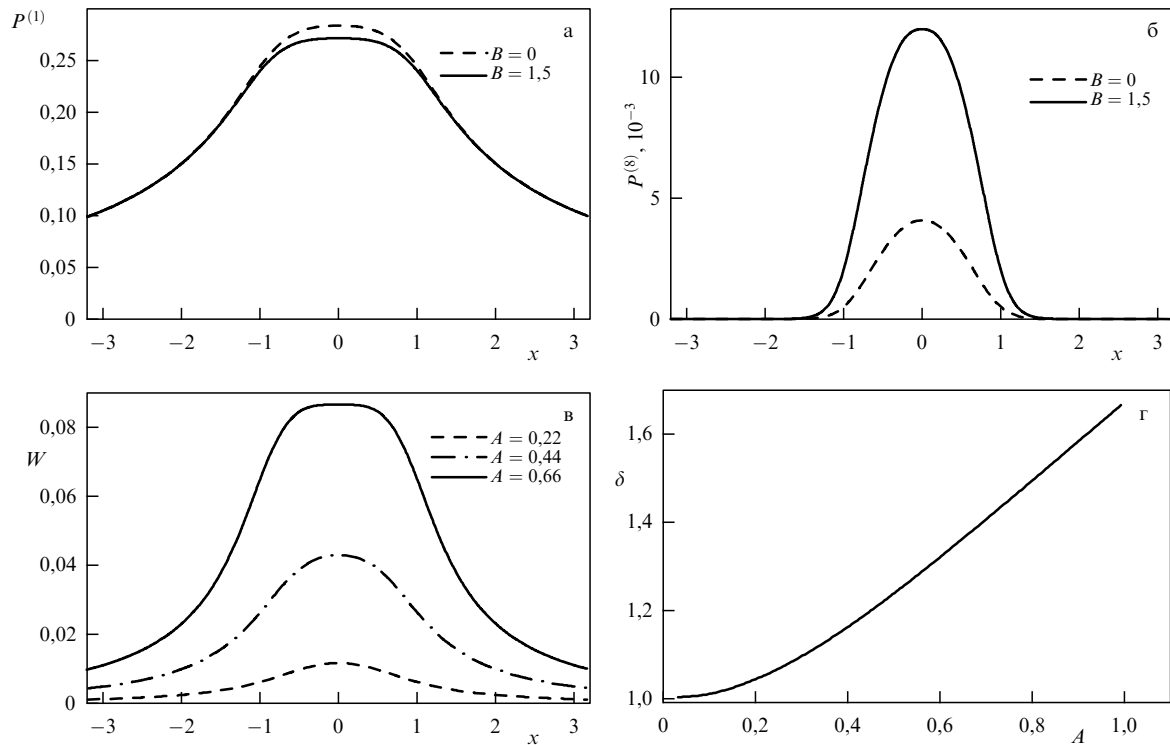


Рис. 9. (а) Пространственные распределения первой гармоники продольного электрического поля плазменного резонанса без учёта ($B = 0$, штриховая линия) и с учётом релятивизма плазменных колебаний ($B = 1,5$, сплошная линия) при фиксированной амплитуде поля ($A = 0,66$). (б) Пространственные распределения восьмой гармоники продольного электрического поля плазменного резонанса. Штриховая линия соответствует нерелятивистскому приближению ($B = 0$), сплошная линия отвечает результату с учётом релятивистской нелинейности ($B = 1,5$). Графики построены при фиксированном параметре $A = 0,66$. (в) Пространственные распределения энергии плазменного поля, отвечающие различным значениям безразмерной амплитуды A . (г) Зависимость ширины плазменного резонанса (в единицах ширины A в линейной теории) от A .

тивистскому режиму колебаний. А именно, за счёт эффекта фазовой модуляции происходит усиление амплитуд гармоник с номерами $n \geq 2$, что существенно меняет спектральный состав поля, обогащая его высшими гармониками. В качестве иллюстрации роста амплитуд высших гармоник на рис. 9б проводится сравнение пространственных распределений амплитуд восьмой гармоники продольного электрического поля $P^{(8)}(x, \tau)$ в отсутствие ($B = 0$) и при наличии ($B = 1,5$) релятивистской нелинейности.

Теперь обсудим область локализации энергии плазменного поля в пространстве, в качестве количественной меры которой введём δ — ширину плазменного резонанса, определяя последнюю как ширину на уровне половинной амплитуды (HWHM — Half Width at Half Maximum). В нашем случае данной области отвечает область локализации суммарной энергии (интенсивности) W всех спектральных составляющих поля $W = \sum_{n=0}^{\infty} |P_n|^2$. В работе [43] было показано, что удержание в (2.6) вклада, отвечающего релятивистской нелинейности, не приводит к изменению суммарной энергии продольной компоненты электрического поля P и, как следствие, к изменению ширины плазменного резонанса δ . Такой вывод согласуется с приведённым выше утверждением: в результате учёта релятивистских эффектов происходит перекачка части энергии в энергию высших гармоник, при этом суммарная энергия электрического поля изменений не претерпевает. Однако, как видно из рис. 9в, г, ширина нелинейного плазменного резонанса зависит от безразмерной амплитуды A . Графики пространствен-

ного распределения энергии поля W при разных значениях A вплоть до границы опрокидывания показаны на рис. 9в, а незначительное увеличение ширины резонанса δ с ростом A иллюстрирует рис. 9г. Итак, с ростом амплитуды поля наблюдается незначительное "разбухание" плазменного резонанса: вблизи границы опрокидывания для различных значений параметров плазмы ширина нелинейного плазменного резонанса δ в среднем приблизительно в полтора раза превышает ширину резонанса A в линейной теории.

Подробное исследование аналитических решений (2.21) нелинейных дифференциальных уравнений (2.6) и (2.7), описывающих релятивистские плазменные колебания в окрестности критической плотности неоднородной плазмы, показало, что учёт релятивистской нелинейности движения электронов приводит к двум классам решений. Первый класс решений продолжает стандартное линейное [1] и нелинейное нерелятивистское [14] решения, тем самым описывая стационарный режим релятивистских плазменных колебаний с модулированной фазой. Такой режим отвечает физической картине, при которой амплитуда поля в лазерном импульсе меняется достаточно медленно в сравнении с динамикой электронов плазмы. При этом естественно полагать, что для лазерного импульса конечной длительности по мере возрастания во времени амплитуды поля накачки решение, описывающее поле плазменного резонанса, проходит три стадии: от линейной стадии при малой амплитуде к нелинейной нерелятивистской и далее — к релятивистской стадии. Другой тип решений отвечает нестационар-

ным плазменным колебаниям в окрестности критической плотности и является подобием решений, получаемых в рамках других моделей [40, 91, 92, 94]. В данном случае опрокидывание происходит при сколь угодно малых амплитудах поля накачки. Возможность реализации подобного решения пока не очевидна, но, вероятно, оно может быть связано с нарушением условия квазистационарности перехода от линейного к нелинейному режиму и требует отдельного исследования.

Принципиальная важность полученных в данном разделе результатов обусловлена тем, что найденная релятивистски-нелинейная стационарная структура резонансно-усиленного электрического поля и скорости электронов является основой для построения стационарных теорий резонансного поглощения и генерации гармоник, а также для расчёта статического электрического поля в области критической плотности плазмы. Эти вопросы станут предметом нашего обсуждения в следующих разделах обзора.

3. Нелинейное резонансное поглощение и генерация электростатического поля

Аналитическая теория линейного резонансного поглощения на основе модели линейного плазменного резонанса Гинзбурга–Денисова [1, 2] была разработана П. Хиршем, Дж. Шмойсом и А.Д. Пилией [106–108] для холодной [106, 107] и горячей плазмы [108] соответственно. Из результатов [106–108] следовало, что коэффициент резонансного поглощения G не зависит от температуры плазмы, частоты столкновений электронов и интенсивности поля накачки, а характеризуется автомодельной зависимостью от единственной переменной ρ , определяемой лазерно-плазменными параметрами, $\rho \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta$ с максимумом $G_m \approx 0,4$ при оптимальном значении $\rho = \rho_{\text{opt}} \approx 0,2$. Здесь c — скорость света в вакууме, θ — угол падения на неоднородную плазму с масштабом неоднородности L . Вследствие приближённости аналитических решений уравнений поля для оптимальных значений ρ , количественные оценки эффективности поглощения в [106–108] оказались не совсем точны, что было продемонстрировано аналитически для холодной плазмы А.Я. Омельченко и К.Н. Степановым в пределе малых [109] и Т. Тэнгом — в пределе больших [110] углов падения лазерного излучения на плазму, а позже — А.Я. Омельченко, Д.Л. Келли, Д.В. Форслундом и др. — методами численного решения волнового уравнения для произвольных углов [6, 111, 112]. Последовательное описание формы резонансной кривой $G(\rho)$ в [6, 111] позволило уточнить значения максимума коэффициента поглощения и соответствующей ему оптимальной ρ : $G_m \approx 0,5$ при $\rho_{\text{opt}} \approx 0,5$ (рис. 10). Кроме того, в [6] была продемонстрирована пренебрежимо слабая зависимость коэффициента поглощения от температуры, что подтвердило общий вывод об определяющей роли переменной ρ при описании поглощения в линейном режиме. Отметим, что на существенное поглощение р-поляризованной электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса указывалось также в монографии К.Г. Баддена [113].

Развитие аналитического подхода для холодной плазмы в работе Т. Специале и П.Дж. Катто [37] позволило значительно скорректировать решения [109, 110] в предельных случаях малых и больших углов падения, а в

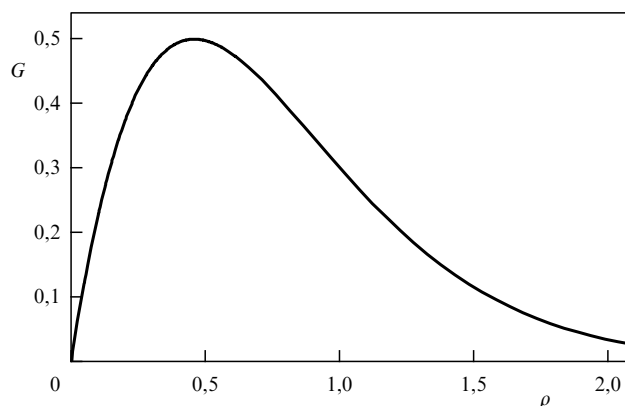


Рис. 10. Зависимость коэффициента линейного резонансного поглощения G от автомодельной переменной ρ на основе численного решения уравнений поля [6, 67].

случае горячей плазмы Дж.Дж. Пертом [7] — получить решение в виде степенных рядов, обобщающих предыдущие результаты [108] на широкий диапазон углов. В последующих аналитических исследованиях линейной конверсии излучения в неоднородной плазме уточнялась зависимость кривой коэффициента поглощения $G(\rho)$ в случае линейного профиля плотности плазмы [114]; в пределе малых углов падения рассматривался профиль плотности с локальным ступенчатым скачком плотности вблизи плазменного резонанса [67], исследовалась форма кривой $G(\rho)$ для параболического профиля [115–117].

В связи с проблемой эффективности резонансного поглощения довольно рано [118] возник интерес к нелинейному влиянию пондеромоторной силы лазерного излучения на изменение плотности плазмы. В ряде работ [119–121] было показано, что под действием пондеромоторной силы падающей на плазму р-поляризованной электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса формируются ступенчатые распределения диэлектрической проницаемости, которые могут способствовать увеличению резонансного поглощения. Отличительная черта указанных работ заключается в том, что при записи уравнений поля в плазме учитывается стрикционная нелинейность, изменяющая плотность плазмы, но при этом игнорируется нелинейность движения электронов в сильно нелинейном самосогласованном поле плазменного резонанса. Более поздние работы по резонансному поглощению посвящены исследованию влияния нелинейных, в частности релятивистских, эффектов движения электронов и деформации профиля плотности плазмы на коэффициент поглощения [38–41]. Авторами [39] в рамках одномерного PIC-моделирования и оценок на основе модели "конденсатора" [18, 21, 22] было продемонстрировано влияние релятивистской и пондеромоторной нелинейностей вблизи критической плотности неоднородной плазмы на процесс поглощения лазерного излучения умеренной и субрелятивистской интенсивности. Согласно их расчётам, с ростом лазерной интенсивности вплоть до $\approx 3 \times 10^{17}$ Вт см⁻² уровень поглощения в окрестности плазменного резонанса может снижаться с 50 % до 30 %. Такое уменьшение коэффициента поглощения связывалось с влиянием релятивистского "утяжеления" электрона, колеблющегося в резонансно-усиленном плазменном поле. В ходе дальнейшего увеличения амплитуды лазерной накачки, за счёт

пондеромоторной нелинейности, уменьшение коэффициента поглощения сменяется его ростом, что даёт поглощение на уровне 60–70 % при интенсивности лазерного излучения $\approx 10^{18}$ Вт см $^{-2}$.

В другой статье того же года [38] использовалась упрощённая гидродинамическая модель совместно с уравнениями Максвелла в приближении, в котором электрическое поле в плазме разделяется на две части: электромагнитную компоненту, связанную с падающей лазерной волной, и электростатическую — отвечающую электронным плазменным колебаниям. В результате был сделан вывод о неизменности оптимального⁷ угла падения лазерного излучения на плазму $\theta_{\text{опт}}$ и монотонном росте коэффициента поглощения с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. При этом обнаруживалась зависимость оптимального угла от величины масштаба неоднородности плотности плазмы. Заметим, однако, что в [38] был рассмотрен весьма широкий диапазон масштаба неоднородности $k_0 L = 10^{-2} - 10$, $k_0 = \omega_0/c$, но не были обозначены пределы применимости модели и не обосновывалась возможность её использования в таких широких пределах. Позже, в усовершенствованной технике численного расчёта двумерной PIC-модели [40], были подтверждены и уточнены тенденции зависимостей величины поглощения от лазерной интенсивности, выявленные в предыдущем исследовании [39]. Затем в [41] предпринималась попытка рассмотрения релятивистски-нелинейных эффектов резонансного поглощения путём численно-аналитического решения волнового уравнения, которая частично подтверждала выводы работ [39, 40], но в то же время указывала на смещение максимума кривой нелинейного поглощения относительно положения максимума в линейной теории за счёт изменения потока лазерного излучения.

В отличие от численных расчётов [38–41], недавние работы [44–46] были нацелены на построение последовательной аналитической теории нелинейного РП при релятивистском плазменном резонансе, которая представляет собой естественное обобщение классических теорий [7, 37, 108] и [14] на основе модели Гинзбурга–Денисова. С помощью такой теории можно выявлять характерные зависимости коэффициента поглощения от множества управляющих параметров лазерно-плазменной системы, в том числе от интенсивности поля лазерной накачки. Результаты аналитических исследований [44–46] и составляют основную часть настоящего раздела.

3.1. Основные уравнения и общее решение краевой задачи о нелинейном резонансном поглощении

Для описания процесса нелинейного поглощения (отражения) р-поляризованной электромагнитной волны (2.1), падающей на слабо неоднородную вдоль координаты x плазму под углом θ , в качестве исходных, как и в предыдущем разделе, рассмотрим уравнения (2.2), которые в покомпонентной записи принимают вид (2.3). Представляя входящие в (2.3) величины скоростей и полей v , u , P , Q , R в виде разложения в ряд по гармоникам падающей волны (2.1), поставим в соответствие каждой из этих величин её фурье-компоненту v_n , u_n ,

P_n , Q_n , R_n :

$$\{v, u, P, Q, R\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{v, u, P, Q, R\}_n \exp[-in(\omega_0 t - k_y y)]. \quad (3.1)$$

Используя разложение (3.1), из системы уравнений (2.3) получим следующее уравнение для n -й гармоники магнитного поля:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \\ = \frac{ian\omega_0}{c^2} \left\{ v(\partial_x P + \partial_y Q) \right\}_n \sin \theta + \\ + \frac{\omega_0^2}{c^2} \left\{ av\partial_x(\gamma v) + au\partial_y(\gamma v) + \partial_t(v(\gamma - 1)) - \frac{au}{c} R \right\}_n - \\ - \frac{a}{c} \left\{ \partial_x(u(\partial_x P + \partial_y Q)) \right\}_n + \frac{a\partial_x \varepsilon_n}{c\varepsilon_n} \left\{ u(\partial_x P + \partial_y Q) \right\}_n + \\ + \frac{i\omega_0^2}{cn\omega_0} \partial_x \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{au}{c} R \right\}_n - \\ - \frac{in\omega_0 \varepsilon_n}{c} \partial_x \left(\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n} \right) \times \\ \times \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{av}{c} R \right\}_n. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Индекс " n " в (3.2) указывает на взятие n -й фурье-компоненты соответствующих функций. Здесь $\varepsilon_n = 1 - \omega_0^2/(n^2\omega_0^2)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте $n\omega_0$. Правая часть уравнения (3.2) отвечает нелинейному источнику генерации гармоник в плазме. В отсутствие нелинейных эффектов (при $a \rightarrow 0$) этот источник исчезает, и уравнение (3.2) переходит в уравнение, описывающее свободное распространение в неоднородной плазме р-поляризованной электромагнитной волны с частотой $n\omega_0$.

Примем во внимание, что зависимость электромагнитных полей и скоростей электронов от координаты x вдоль градиента плотности вблизи плазменного резонанса обратно пропорциональна величине ширины плазменного резонанса $\delta \ll L$ и оказывается существенно сильнее зависимости от поперечной координаты y , которая пропорциональна k_y : $\partial_x(\dots) \gg \partial_y(\dots)$. Кроме того, в рассматриваемом случае слабо неоднородной плазмы с характерным масштабом неоднородности $L \gg 1/k_0$ можно пренебречь вкладами, пропорциональными градиенту неоднородности в правой части (3.2). Собирая перечисленные условия, приходим к совокупности неравенств, задающих область применимости модели:

$$k_0 L \gg 1, \quad k_y \delta \ll 1, \quad \delta \ll L. \quad (3.3)$$

Учитывая основные допущения и модельные ограничения теории плазменного резонанса, которые задаются неравенствами (3.3) и тем самым определяют иерархию полей и скоростей вблизи критической плотности (2.5), получим из (3.2) уравнение для амплитуды отражённого от плазмы магнитного поля в вакууме на основной частоте с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы. В интересующем нас случае для магнитной составляющей поля на частоте лазера ω_0 учтём, что при $n = 1$ в (3.2) наибольший вклад

⁷ Оптимальным называется угол падения, для которого резонансное поглощение максимально: $\theta_{\text{опт}}$ соответствует $\rho_{\text{опт}}$ при фиксированном масштабе неоднородности L .

в источник дают резонансные слагаемые $\sim 1/\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = (i\Delta - x)/L$.

С учётом сделанных предположений уравнение (3.2) при $n = 1$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \partial_{xx}R_1 - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x R_1 + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) R_1 = \\ = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{J}_1 \right\}_z + \\ + \frac{a/c}{x - i\Delta} \left[u \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right]_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где компоненты вектора \mathbf{J}_1 определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 = \left\{ v \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 v) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v, \right. \\ \left. u \partial_x P - i\omega_0 v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u, 0 \right\}_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Индекс "1" в (3.4) и (3.5) указывает на взятие первой фурье-компоненты соответствующих функций. В (3.4) положено $\omega_L = \omega_0$, т.е. пренебрегается зависимостью частоты ω_L от координаты x . Такое приближение оправдано для слабо неоднородной плазмы, когда область локализации поля плазменного резонанса мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности плазмы L . Из уравнения (3.4) и соотношения (3.5) следует, что первая гармоника магнитного поля в вакууме определяется электрическим полем и скоростью электронов в области плазменного резонанса, которые были найдены в разделе 2.

Решение неоднородного уравнения (3.4) записывается через фундаментальную систему решений однородного уравнения Ψ^+ и Ψ^- в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_1(x) = \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) + \int_{-\infty}^x d\xi \mathcal{G}(x, \xi) f_1(\xi), \\ \mathcal{G}(x, \xi) = -\frac{\Psi_1^+(x) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(x)}{\Psi_1^+(\xi) \Psi_1^{-\prime}(\xi) - \Psi_1^{+\prime}(\xi) \Psi_1^-(\xi)}, \\ f_1(x) = \frac{a}{c} \left\{ ik_y \left(v P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{x - i\Delta} \left[u P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right] - \right. \\ \left. - \left[u P_x - i\omega_0 v (\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right]_x \right\}_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\mathcal{G}(x, \xi)$ — функция Грина, а функции Ψ_1^+ и Ψ_1^- удовлетворяют однородному уравнению

$$\partial_{xx} \Psi_1^\pm - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x \Psi_1^\pm + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) \Psi_1^\pm = 0. \quad (3.7)$$

В формулах (3.6) α_1^\pm — константы, определяемые граничными условиями для уравнения (3.4) применительно к решению (3.6). Граничные условия, в свою очередь, следуют из вида магнитного поля $R_1(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} R_1 = \tilde{C}_1^+ \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} x \cos \theta\right) + \tilde{C}_1^- \exp\left(-i \frac{\omega_0}{c} x \cos \theta\right), \\ x \rightarrow -\infty, \\ R_1 = 0, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где комплексные амплитуды \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- отвечают падающей и отражённой волнам соответственно. Подчёркнём, что пока из соображений удобства мы рассматриваем нормированную на безразмерную амплитуду a величину поля R (и соответствующую ей амплитуду \tilde{C}_1^-), однако конечная цель заключается в получении формул для магнитного поля B_z (и амплитуды C_1^-). Уравнение для фурье-компоненты B_1 получается из уравнения для R_1 после умножения на (am_e/e) , при этом связь между амплитудами \tilde{C}_1^- и C_1^- такая же, как между R_1 и B_1 . Поэтому при переходе к формуле для фурье-компоненты C_1^- магнитного поля B_z на основной частоте амплитуду \tilde{C}_1^- следует домножить на (am_e/e) .

В ходе построения нелинейного решения (3.6) будем опираться на линейные решения для (3.7), полученные на сегодняшний день в аналитическом виде только в двух предельных случаях: при $\rho \ll 1$ и $\rho > 1$ [37, 109]. При фиксированном масштабе неоднородности плазмы $L \gg 1/k_0$ (точнее, мы будем рассматривать $L > 10/k_0$) и заданной лазерной частоте ω_0 указанные случаи соответствуют пределам малых ($\rho \ll 1$) и больших ($\rho > 1$) углов падения θ лазерного излучения на плазму. В этом отношении найденные нелинейные решения носят асимптотический характер, позволяя находить поглощение справа и слева от максимума функции $G(\rho)$ (см. рис. 10).

Итак, решая уравнение (3.4) методом функции Грина с граничными условиями (3.8) (см. приложение Б, а также [44–46]), получим выражения для амплитуды первой гармоники магнитного поля в вакууме в случае не малых углов падения лазерного излучения на плазму ($\rho > 1$)

$$C_1^- = \Omega_1 C_1^+ + \frac{m_e}{e} \frac{\omega_0^3 \Delta}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{L}{c\omega_0 |\cos \theta|}\right)^{1/2} \Omega_2 \mathcal{I}, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 = R_L^{1/2} \exp\left[2i \frac{\omega_0}{c} L_+(-\infty) - i \frac{\pi}{2}\right], \\ \Omega_2 = \left(\frac{G_L}{2}\right)^{1/2} \exp[i\mathcal{Z} + i \arg B_1(0) - i\pi], \end{aligned} \quad (3.10)$$

и в пределе малых углов падения ($\rho \ll 1$)

$$\begin{aligned} C_1^- = R_L^{1/2} \exp(2i\mathcal{Z}) C_1^+ - \frac{2|C_1^+| \rho L}{A_L \Delta} (\operatorname{Ai}'(0))^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{2}(1 - R_L^{1/2})(1 + i\sqrt{3})\right] \exp(i\mathcal{Z} + i \arg B_1(0)) \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В этих формулах $R_L = |C_{1L}^-/C_1^+|^2$, $G_L = 1 - R_L$ — коэффициенты отражения R и поглощения G в линейной теории, а C_{1L}^- — амплитуда магнитного поля отражённой волны в линейном приближении; $A_L = a_L L^2/\Delta^2$, где a_L — безразмерная амплитуда магнитного поля в точке плазменного резонанса в линейной теории; \mathcal{I} определяется выражением (Б.11). При больших углах падения ($\rho > 1$)

$$\begin{aligned} R_L = \left(\frac{1 - (1/2) \exp[-(4/3)\rho^{3/2}]}{1 + (1/2) \exp[-(4/3)\rho^{3/2}]}\right)^2, \\ a_L = \left|\frac{cB_0^2 e^2}{\pi m^2} \frac{|\cos \theta|}{\omega_0^5 L^3} (1 - R_L)\right|^{1/2}, \quad B_0 = 2C_1^+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При малых углах падения ($\rho \ll 1$)

$$R_L = [1 - 2\pi^2(\text{Ai}'(0))^2 \rho]^2, \quad (3.13)$$

$$a_L = \left| \frac{2e \sin \theta}{m\omega_0^2 L} \left(\frac{c}{\omega_0 L} \right)^{1/6} (\pi |\cos \theta|)^{1/2} \text{Ai}'(0) (1 - R_L^{1/2}) C_1^+ \right|.$$

Штрих над Ai в (3.13) означает взятие первой производной функции Эйри.

3.2. Устранение расходимости коэффициента отражения: учёт релятивистских эффектов

Из вида формул (3.9) и (3.11) следует, что амплитуда отражённого магнитного поля представляется суммой линейного, C_{1L}^- , т.е. не зависящего от a , и нелинейного, C_{1N}^- , слагаемых: $C^- = C_{1L}^- + C_{1N}^-$, где зависимость C_{1N}^- от a (фактически от интенсивности лазерного света) задаётся интегралом \mathcal{I} (Б.11). В линейной теории безразмерная амплитуда $a = a_L$ определяется соотношениями (3.12) и (3.13), связывающими амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса с амплитудой падающей волны через коэффициент отражения R_L [37, 108]. Легко проверить, что использование в (3.9) и (3.11) (точнее, в интеграле \mathcal{I}) величин $a_L \propto B_0$ (3.12) и (3.13) вместо амплитуды a , в которой учитывалась бы нелинейность, приводит к завышенным значениям C_{1N}^- с ростом интенсивности⁸ лазерного излучения. Продемонстрируем это на примере формулы (3.9).

Ниже, при подстановке конкретных параметров лазера и плазмы, для определённости будем вести обсуждение на языке лазерной интенсивности I_0 [Вт см⁻²] Nd-лазера с длиной волны $\lambda = 1,064$ мкм, масштаба неоднородности L [λ], выраженного в длинах волны лазерного излучения, температуры плазмы T [кэВ], угла падения лазерного излучения θ и автомодельной переменной ρ . Исходя из того что нелинейное решение (3.9) уравнения (3.4) построено на основе линейного решения однородного уравнения, которое существует при не слишком малых углах, когда $\rho > 1$, значение параметра $\rho_{\min} \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta_{\min} = 1$ может считаться предельным для теории в этом случае, а θ_{\min} — минимально допустимым углом падения лазерного излучения на плазму при заданных ω_0 и L .

На рисунке 11 показан неограниченный рост $C_{1N}^-(a_L)$, приводящий к тому, что начиная с некоторого значения лазерной интенсивности величина $C_{1N}^-(a_L)$ превышает амплитуду поля лазерной накачки, а это физически невозможно. Такое поведение нелинейного вклада связано с неправомерным использованием в источнике $f_1(x)$ задаваемой в линейном приближении (3.12) амплитуды a_L , в которой не учитывается нелинейная связь между амплитудой плазменного поля в точке $x = 0$ и амплитудой поля лазерного излучения. Данный факт свидетельствует о необходимости построения самосогласованной нелинейной теории отражения лазерного излучения неоднородной плазмой с отличной от (3.12) и (3.13) амплитудой магнитного поля в точке резонанса $a \neq a_L$, в которой учтена нелинейная зависимость $|B_1(0)|$ от C_1^+ и проведена перенормировка функции источника $f_1(x)$ на новую амплитуду a . Как будет показано ниже, неограниченный

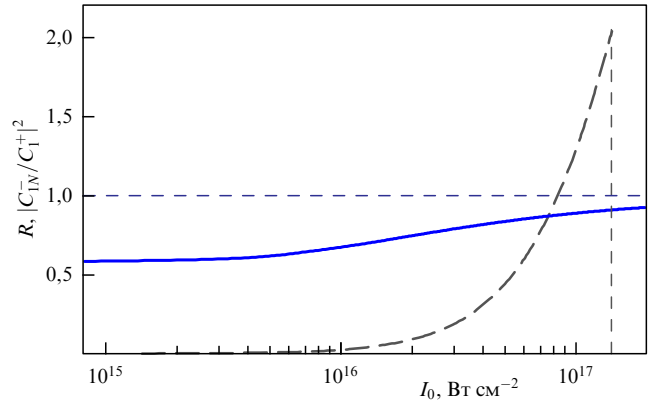


Рис. 11. Нелинейный коэффициент отражения R на основной частоте после процедуры перенормировки (синяя сплошная кривая) и величина $|C_{1N}^-/C_1^+|^2$ без учёта перенормировки (штриховая кривая) в зависимости от интенсивности Nd-лазерного поля I_0 для температуры $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ при угле падения лазерного излучения $\theta_{\min} = 10^\circ$. Штриховая вертикальная прямая соответствует границе опрокидывания электронных плазменных колебаний в точке резонанса в случае использования амплитуды a_L из линейной теории. Штриховая горизонтальная прямая отвечает асимптотическому пределу полного отражения $R = 1$.

рост нелинейной части коэффициента отражения $C_{1N}^-(a)$ в результате такой перенормировки сменяется насыщением. Зависимость полного нелинейного коэффициента отражения на основной частоте $R = |C_{1N}^-/C_1^+|^2$ от лазерной интенсивности для случая $\rho > 1$ после перенормировки на амплитуду a с учётом нелинейности показана на рис. 11 синей сплошной кривой. Выявлению аналитической связи между $B_1(0)$ и C_1^+ и получению формулы, отвечающей насыщению нелинейного роста $C_{1N}^-(a)$ на рис. 11, посвящён настоящий раздел.

Изложим всю последовательность шагов по устранению расходимости в случае $\rho > 1$, а для случая $\rho \ll 1$ приведём окончательный результат, который получается, если следовать описанной ниже схеме (подробности см. в [44]). Исходя из (Б.5) запишем формулу для первой гармоники магнитного поля в точке резонанса $x = 0$:

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0) + \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)]. \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.14) выражение (Б.6), связывающее α_1^- с α_1^+ , получим

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \left(\Psi_1^+(0) + \frac{i}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \Psi_1^-(0) \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \Psi_1^-(0) \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) \text{K}_1[(\xi - i\Delta)k_y] + \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)] = A_1 + A_2 + A_3. \quad (3.15)$$

Сравним два интегральных вклада A_2 и A_3 в (3.15). Чтобы оценить интегралы, воспользуемся (Б.2) и при-

⁸ Естественно, при таких интенсивностях, которые ограничены условием отсутствия опрокидывания плазменных колебаний в резонансе.

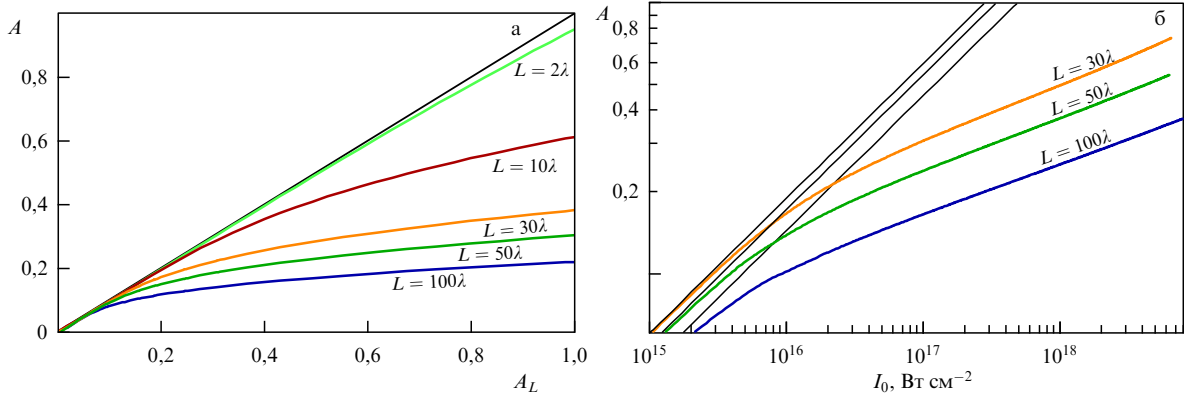


Рис. 12. Зависимости амплитуды A в нелинейной теории от амплитуды A_L , задаваемой линейным приближением (а), и от плотности потока энергии Nd-лазерного излучения I_0 (б), вычисленные для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштабов неоднородности $L = 2\lambda$, $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$, $L = 50\lambda$, $L = 100\lambda$, при соответствующих им минимальных углах падения лазерного излучения на плазму $\theta = \theta_{\min}$. Чёрная биссектриса (а) и чёрные прямые (б) отвечают пределу линейной теории.

ближёнными формулами для функций Инфельда и Макдональда при малых значениях аргумента $K_1(x)|_{x \approx 0} \approx 1/x$, $I_1(x)|_{x \approx 0} \approx x/2$:

$$\Psi_1^+(0)\Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi)\Psi_1^-(0) \approx \frac{\omega_0\xi(2i\Delta - \xi)}{2\pi Lc}, \quad (3.16)$$

$$A_2 \approx \frac{i}{2\pi(\xi - i\Delta)k_y^2}, \quad A_3 \approx \frac{\xi(2i\Delta - \xi)}{2(i\Delta - \xi)}.$$

Из второго неравенства условий применимости нашей модели (3.3) следует, что $A_2 \gg A_3$, а значит, вкладом A_3 можно пренебречь по параметру малости $k_y^2\Delta^2 \ll 1$. Таким образом, получаем упрощённое выражение для амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса:

$$R_1(0) = A_1 + A_2 = \alpha_1^+\Psi_1^+(0) + \alpha_1^-\Psi_1^-(0). \quad (3.17)$$

Отсюда, используя связь α_1^+ с α_1^- из (Б.6), а также формулы (Б.8), найдём:

$$R_1(0) = \left(\frac{2c|\cos\theta|}{\pi\omega_0 L \sin^2\theta}\right)^{1/2} \frac{\exp[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}]}{1 + (1/2)\exp[(2\omega_0/c)\mathcal{L}_+(0)]} \tilde{C}_1^+ - \frac{i/\pi k_y^2}{1 + (1/2)\exp[(2\omega_0/c)\mathcal{L}_+(0)]} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \quad (3.18)$$

Формулу (3.18) можно интерпретировать как нелинейное уравнение на амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса, поскольку правая часть данного выражения содержит интеграл, определяемый источником $f_1(\xi)$, в котором все функции нормированы на искомую амплитуду. Решением (3.18) относительно этой амплитуды определяется нелинейная связь последней с амплитудой поля накачки.

Переходя от \tilde{C}_1^+ к C_1^+ путём домножения \tilde{C}_1^+ на (am_e/e) и прибегая к нормировке (2.4), но уже вне рамок линейного приближения (3.12), перепишем уравнение (3.18) в виде

$$\frac{\omega_0^2}{2} \left(aL - \frac{\Delta\mathcal{I}}{\pi^2(1 + (1/2)\exp[(2\omega_0/c)\mathcal{L}_+(0)])} \right) \exp[i\arg B_1(0)] = \frac{|e|}{m} |C_1^+| \left(\frac{2c|\cos\theta|}{\pi\omega_0 L} \right)^{1/2} \frac{\exp[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z} + i\arg C_1^+]}{1 + (1/2)\exp[(2\omega_0/c)\mathcal{L}_+(0)]}. \quad (3.19)$$

или, что то же самое, на языке безразмерных переменных (амплитуд) $A = aL^2/\Delta^2$ и $A_L = a_L L^2/\Delta^2$, где a_L определяется из (3.12):

$$\left(A - \frac{L/\Delta}{2\pi^2} (1 + R_L^{1/2})\mathcal{I} \right) \exp[i\arg B_1(0)] = A_L \exp[i\mathcal{Z} + i\arg C_1^+]. \quad (3.20)$$

Поскольку интеграл \mathcal{I} (Б.11) является комплексной функцией амплитуды a , т.е. безразмерной амплитуды A , то выражение (3.20) представляет собой нелинейное трансцендентное комплексное уравнение на безразмерную амплитуду магнитного поля в точке плазменного резонанса как функцию амплитуды в линейной теории $A = A(A_L)$, а значит, и как функцию амплитуды падающей волны $A = A(C_1^+)$.

Вычисление A из (3.20) решает поставленную задачу отыскания нелинейной связи амплитуды магнитного поля в точке $x=0$ с амплитудой поля накачки и позволяет совершить перенормировку функций в (3.9) на новую амплитуду с учётом найденной связи. Комплексное уравнение (3.20) эквивалентно следующим двум уравнениям на модули и аргументы комплексных функций в правой и левой частях (3.20):

$$|F(A)| = A_L, \quad \phi + \phi_1 = \mathcal{Z} + \phi_0, \quad (3.21)$$

где

$$F(A) = A - \frac{L/\Delta}{2\pi^2} (1 + R_L^{1/2})\mathcal{I}, \quad (3.22)$$

$$\phi = \arg F(A), \quad \phi_0 = \arg C_1^+, \quad \phi_1 = \arg B_1(0).$$

Для вычисления интеграла (Б.11) и решения уравнения на модули из (3.21) использовался пакет компьютерной алгебры "Wolfram Mathematica" [122]. На рисунке 12а представлены зависимости амплитуды A от вычисленной по линейной теории амплитуды A_L для пяти значений масштаба неоднородности L . Зависимости A от плотности потока энергии лазерного излучения I_0 для трёх значений масштаба неоднородности L показаны на рис. 12б. Температура плазмы T здесь фиксирована, а углы падения равны минимальным $\theta = \theta_{\min}$ при соответствующих L . Нелинейность в области резонанса приводит к падению амплитуды поля в точке $x=0$ в сравнении

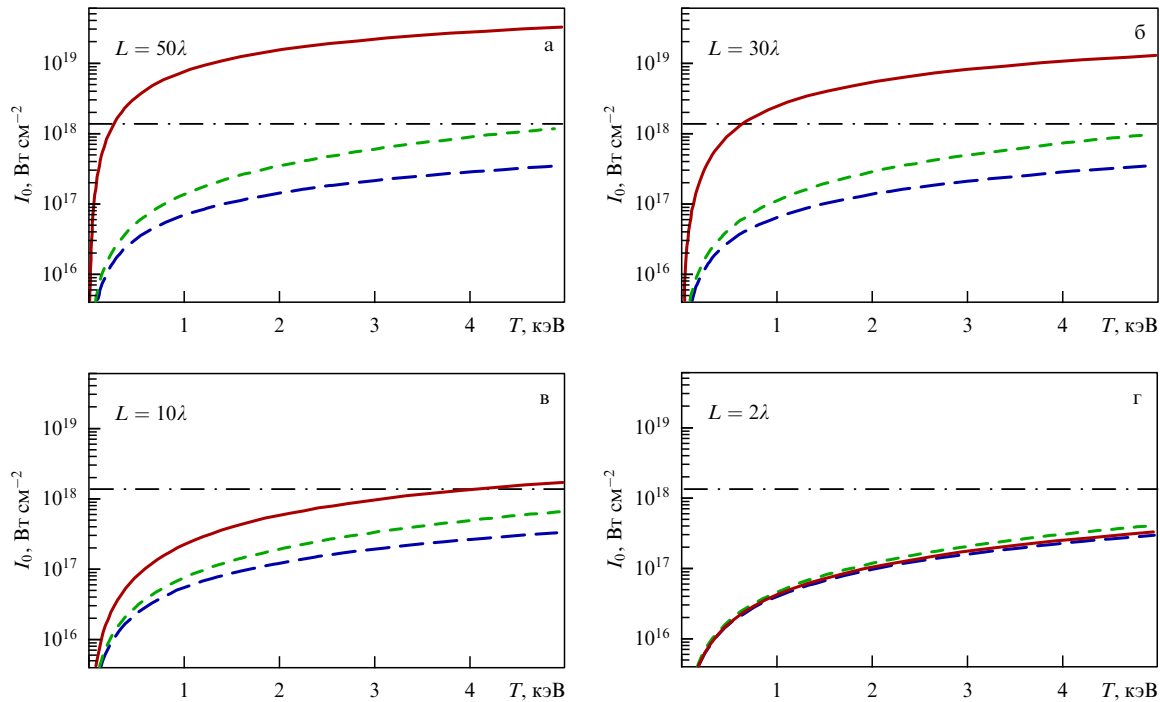


Рис. 13. Области применимости теории (гидродинамической модели) на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для Nd-лазера и различных масштабов неоднородности плотности плазмы $L = 50\lambda$ (а), $L = 30\lambda$ (б), $L = 10\lambda$ (в), $L = 2\lambda$ (г). Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учётом нелинейной перенормировки на амплитуду A в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учёта нелинейной перенормировки. Зелёная штриховая кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Углы падения всюду равны минимальным $\theta = \theta_{\min}$ при соответствующих L . Горизонтальная штрихпунктирная линия отсекает релятивистские интенсивности лазерного поля.

с результатом линейной теории, и наблюдается эффект насыщения — замедление роста амплитуды резонансного поля с ростом амплитуды поля накачки. В случае слабо неоднородной плазмы, когда $L \simeq (10-100)\lambda$, отличие A от A_L с увеличением лазерной интенсивности растёт весьма существенно, тогда как при сравнительно более резких градиентах неоднородности $L \simeq \lambda$ отличие A от амплитуды A_L слабо заметно.

Аналогичным образом получаем уравнения на резонансную амплитуду и фазы в пределе малых углов падения ($\rho \ll 1$):

$$|F(A)| = A_L, \quad \phi + \phi_1 = \mathcal{Z} + \phi_0, \quad (3.23)$$

где

$$F(A) = A + \frac{L/\Delta}{\pi^2} (1 - R_L^{1/2}) \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) \mathcal{I}, \quad (3.24)$$

$$\phi = \arg F(A), \quad \phi_0 = \arg C_1^+, \quad \phi_1 = \arg B_1(0),$$

а безразмерная амплитуда a_L и линейный коэффициент отражения на основной частоте R_L определяются по формулам (3.13).

3.3. Границы применимости гидродинамической модели на языке физических параметров

Перенормировка функции источника на амплитуду плазменного поля в точке резонанса с учётом нелинейности позволяет исследовать область применимости гидродинамической модели (см. рис. 8) на языке физических параметров лазера и плазмы. Граница применимости определяется опрокидыванием профиля плазменных колебаний в точке резонанса [14], которое происходит при достижении плотностью потока лазерной энергии

предельного значения. Поэтому выявленное выше падение резонансной амплитуды в релятивистском режиме сдвигает это пороговое значение в область более высоких лазерных интенсивностей в сравнении со значениями, следующими из нерелятивистской теории [14].

На рисунке 13 приведены границы опрокидывания на плоскости $\{T, I_0\}$ для разных значений масштаба неоднородности плазмы. Рисунок подтверждает вывод о расширении границ применимости теории плазменного резонанса в область максимально возможной интенсивности лазерного поля, при которой формулы используемой нами модели бесстолкновительной гидродинамики холодной электронной плазмы остаются однозначными. Поскольку существенное отличие амплитуды в нелинейной теории от амплитуды в линейном приближении наблюдается при плавных градиентах плотности плазмы $L \simeq (10-100)\lambda$ (см. рис. 12), то и расширение области применимости гидродинамической модели оказывается в этом случае наиболее заметным: граница опрокидывания смещается в область релятивистских лазерных интенсивностей, далеко за пределы границы, предсказываемой нелинейной нерелятивистской теорией [14] (зелёная штриховая кривая). При более резком градиенте неоднородности (рис. 13г) положения границ опрокидывания отличаются несущественно. На рисунке 13 также приведены границы опрокидывания, вычисленные с частичным учётом релятивистских эффектов движения электронов плазмы⁹, но с использо-

⁹ На языке ренормгруппового преобразования это означает, что учитывается только преобразование амплитуды скорости, а преобразованием времени, которое отвечает за фазовую модуляцию, пренебрегается.

ванием линейной связи (3.12) амплитуды магнитной компоненты электромагнитного поля в точке $x = 0$ с амплитудой поля накачки. В данном случае сравнение с нерелятивистской теорией, напротив, показывает сдвиг порога опрокидывания в область меньших лазерных интенсивностей. Подчеркнём ещё раз, что в наших построениях релятивистские эффекты учитываются только в узкой области плазменного резонанса при движении электрона в самосогласованном резонансно-усиленном плазменном поле, в то же время подразумеваются нерелятивистские интенсивности лазерного поля. Поэтому в последующих расчётах поглощения и эффективности генерации гармоник мы не будем рассматривать интенсивности лазерного излучения, превышающие релятивистский порог¹⁰, а ограничимся сверху интенсивностью, при которой безразмерная амплитуда лазерного поля $a_0 = 0,85 \times (I_0 [10^{18} \text{ Вт см}^{-2}] \lambda [\text{мкм}]^2)^{1/2}$ равняется единице, $a_0 = 1$. В связи с этим изображённые на рис. 13 границы опрокидывания, лежащие в релятивистской области, где $a_0 > 1$, следует рассматривать с формальной точки зрения. Мы подчёркиваем последнее обстоятельство штрихпунктирными горизонтальными прямыми на рис. 13, отсекающими области релятивистских интенсивностей лазерного поля.

Заметим, что условие опрокидывания, полученное в [14] (зелёная штриховая кривая на рис. 13), совпадает с хорошо известным условием $k_p e E_p / m \omega_p^2 = 1$, где $k_p = (\lambda_D^2 L)^{-1/3}$, $\omega_p \equiv \omega_L$, E_p — электрическое поле плазмы (см., например, [88]). Обсуждаемое в настоящей работе опрокидывание стационарных плазменных колебаний имеет пороговый характер и происходит только при превышении амплитуды колебаний порогового значения. Такой режим не соответствует режиму плазменных колебаний [18, 22], в котором нерелятивистская динамика электронов плазмы в окрестности критической плотности обсуждалась в рамках модели конденсатора и рассматривались вынужденные колебания неоднородного плазменного слоя во внешнем однородном высокочастотном электрическом поле. Вследствие неоднородности плазмы такие колебания оказываются нестационарными и опрокидывание происходит за конечный промежуток времени.

3.4. Релятивистски-нелинейный коэффициент резонансного поглощения

Отыскав в разделе 3.2 релятивистски-нелинейную связь амплитуды поля плазменного резонанса с амплитудой поля накачки, получим коэффициент резонансного поглощения с учётом этой связи. Рассмотрим случай $\rho > 1$. Подставляя величину \mathcal{I} , найденную из первого уравнения (3.21), в C_1^- (3.9) и принимая во внимание равенство фаз из второго уравнения (3.21), найдём амплитуду излучаемого из плазмы магнитного поля на основной частоте:

$$C_1^- = -iC_1^+ \exp\left(2i \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}(-\infty)\right) \left\{ R_L^{1/2} + (1 - R_L^{1/2}) \times \left[1 - \frac{A}{A_L} \exp(-i\phi) \right] \right\}. \quad (3.25)$$

¹⁰ Лазерное поле называется релятивистским, если электрон, двигающийся в этом поле, на одной длине волны набирает кинетическую энергию, равную энергии покоя.

Формула (3.25) учитывает нелинейность амплитуды поля плазменного резонанса, которая выражается переходом от амплитуды A_L в линейной теории отражения к амплитуде A , вычисляемой из (3.21). Тогда коэффициент отражения запишется в виде

$$R = \left| \frac{C_1^-}{C_1^+} \right|^2 = \left| R_L^{1/2} + (1 - R_L^{1/2}) \left[1 - \frac{A}{A_L} \exp(-i\phi) \right] \right|^2. \quad (3.26)$$

Численное и аналитическое (см. приложение В) исследование интеграла \mathcal{I} (Б.11) показывает, что он представляет собой чисто мнимую величину. Поэтому из (3.21) и (3.22) вытекают равенства

$$\phi = \arg F(A) = \arccos \frac{A}{|F(A)|} = \arccos \frac{A}{A_L}, \quad \cos \phi = \frac{A}{A_L}, \quad (3.27)$$

которые позволяют записать коэффициент отражения в более компактной форме. Цепочка тождественных преобразований даёт:

$$\begin{aligned} & \left| R_L^{1/2} + (1 - R_L^{1/2}) \left[1 - \frac{A}{A_L} (\cos \phi - i \sin \phi) \right] \right|^2 = \\ & = 1 - \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 (1 - R_L). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Окончательно получаем нелинейные коэффициенты отражения R и поглощения G при $\rho > 1$:

$$R = 1 - \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 (1 - R_L), \quad G = \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 G_L. \quad (3.29)$$

Формулы (3.29) очевидным образом демонстрируют предельный переход в линейную теорию при $A \rightarrow A_L$, т.е. верхнее ограничение коэффициентов отражения R и поглощения G их предельными значениями R_L и G_L . Уменьшение коэффициента резонансного поглощения с ростом лазерной плотности потока энергии показано на рис. 14а, где представлены зависимости G от автономной переменной ρ при фиксированных температуре плазмы и масштабе неоднородности ($\rho > 1$). Рисунок 14б демонстрирует уменьшение G при переходе к слабо неоднородной плазме, если зафиксировать лазерную интенсивность.

Аналогичным образом (см. подробности в [44]) находим коэффициенты отражения $R = |C_1^- / C_1^+|^2$ и поглощения G в пределе $\rho \ll 1$:

$$\begin{aligned} R &= \left| R_L^{1/2} + \left[\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) - R_L^{1/2} \right] \left[1 - \frac{A}{A_L} \exp(-i\phi) \right] \right|^2, \\ G &= 1 - R. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подчеркнём принципиальную важность учёта релятивистских эффектов в плазменном резонансе при отыскании коэффициента нелинейного резонансного поглощения. Аналитическая оценка интеграла \mathcal{I} (Б.11) показывает (см. приложение В), что он отличен от нуля только при учёте релятивистской нелинейности. А именно, для конечных значений параметра A при $c = \infty$ и $B = 0$ интеграл (Б.11) строго обращается в нуль:

$$\mathcal{I}|_{c=\infty} = \mathcal{I}_0 = 0. \quad (3.31)$$

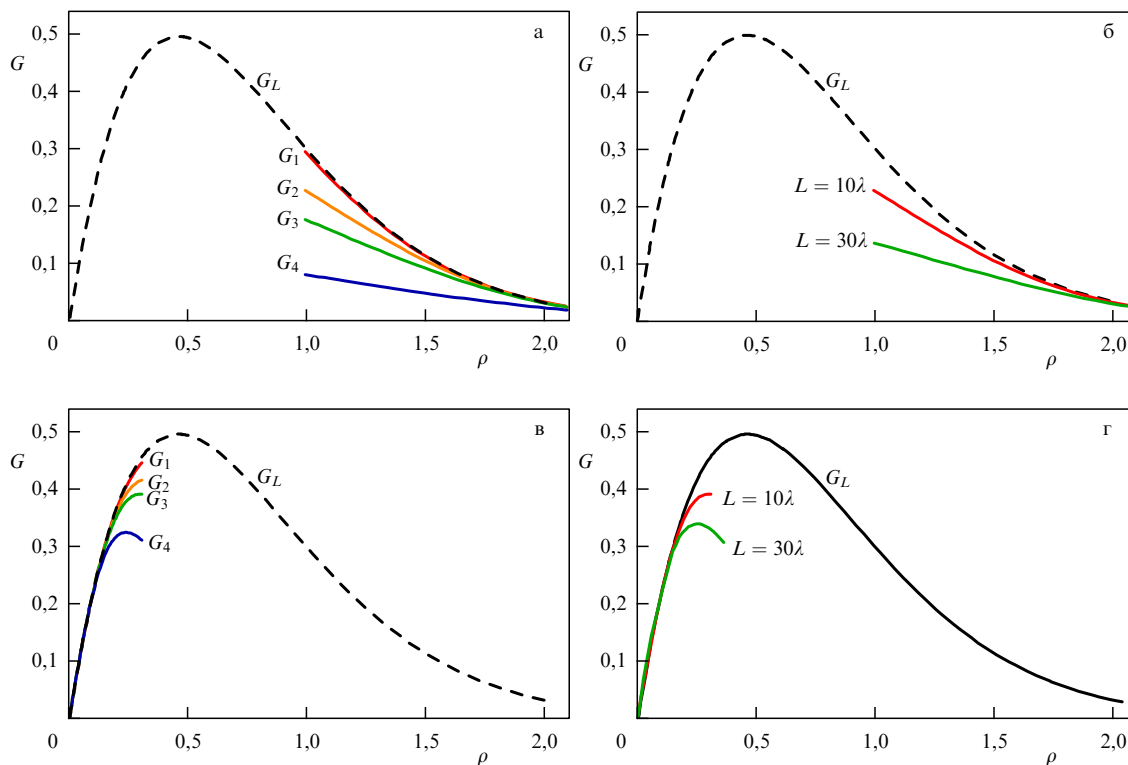


Рис. 14. Зависимости коэффициента резонансного поглощения G от автомодельной переменной ρ при больших (а, б) и при малых (в, г) углах падения. (а, в) Графики построены при заданных значениях температуры плазмы $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 10\lambda$, для различных интенсивностей Nd-лазера: $I_0 = 10^{16}$ Вт см $^{-2}$ (G_1), $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт см $^{-2}$ (G_2), $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (G_3), $I_0 = 5 \times 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (G_4). (б, г) Лазерная интенсивность фиксирована $I_0 = 5 \times 10^{16}$ Вт см $^{-2}$, а сплошные цветные кривые отвечают разным масштабам неоднородности плазмы: $L = 10\lambda$, $L = 30\lambda$. Штриховая чёрная кривая G_L соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории.

При этом из (3.21), (3.23) и (3.29), (3.30) получаем $A = A_L$ и $R = R_L$, т.е. в нерелятивистском пределе нелинейный вклад в коэффициент отражения отсутствует даже при учёте нерелятивистской нелинейности, и линейные соотношения (3.12), (3.13) остаются справедливыми. Таким образом, отличие R от R_L возникает только в релятивистской теории нелинейного плазменного резонанса.

На рисунке 14в приведены кривые коэффициента нелинейного резонансного поглощения G , вычисленные в пределе $\rho \ll 1$ по формуле (3.30), для различных значений плотности потока излучения Nd-лазера, при фиксированных температуре плазмы и масштабе неоднородности. Как и в случае $\rho > 1$, коэффициент резонансного поглощения уменьшается с ростом интенсивности лазерного излучения. Рисунок 14г отвечает фиксированной лазерной интенсивности и демонстрирует усиление эффекта подавления поглощения при переходе к слабо неоднородной плазме, что согласуется с тенденцией насыщения резонансной амплитуды плазменного поля.

Покажем, что анализ зависимостей коэффициента резонансного поглощения $G(\rho)$ при $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ не только приводит к общему выводу о подавлении поглощения, но и позволяет выдвинуть предположение об изменении оптимального угла падения лазерного излучения на плазму, т.е. о смещении максимума кривой $G(\rho)$ относительно максимума, предсказываемого в линейной теории. Действительно, сравнивая кривые $G(\rho)$ для $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ (см. рис. 14) при фиксированной интенсивности I_0 , мы наблюдаем асимметричность подавления слева и справа от максимума функции $G(\rho)$. А именно, в области больших углов падения ($\rho > 1$) поглощение подавляется

существеннее, чем при малых углах. Такая асимметричность может означать, что рост интенсивности поля накачки приводит не только к уменьшению коэффициента поглощения в широком диапазоне изменения ρ , но и к сдвигу максимума поглощения в область меньших ρ или, что то же самое, в область меньших углов падения θ лазерного излучения на плазму. Хотя, как уже было сказано, выражения (3.30) и (3.29) имеют асимптотический характер, отражая поведение коэффициента поглощения в двух предельных случаях и, строго говоря, не позволяют вычислять его во всём диапазоне значений ρ , тем не менее из общих соображений подобия построим функцию $G(\rho)$ в промежуточной области $\rho \approx 0,5$, соединив асимптотики для $\rho > 1$ и $\rho \ll 1$ при фиксированной интенсивности лазерного излучения (рис. 15а). В качестве примера возьмем $I_0 = 10^{16}$, 5×10^{16} , 10^{17} Вт см $^{-2}$ и соединим асимптотики, соответствующие данным интенсивностям (штриховые цветные кривые на рис. 15а). В этих случаях максимум поглощения падает до значений $G_m \approx 0,47$, $G_m \approx 0,43$, $G_m \approx 0,4$ соответственно, что находится в качественном согласии с результатами работ [39, 40], а оптимальное значение ρ_{opt} , отвечающее таким максимумам, смещается из точки $\rho_{\text{opt}} \approx 0,5$ в сторону меньших ρ и при $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ достигает $\rho_{\text{opt}} \approx 0,3$.

Подчеркнём следующее обстоятельство. Мы сравниваем коэффициенты поглощения при разных лазерных интенсивностях I_0 , фиксируя масштаб неоднородности плотности плазмы L , хотя известно, что L может изменяться в результате не учитываемых нами разлёта плазмы и действия пондеромоторной силы лазерного поля [6, 64, 118 – 121, 123 – 129], в итоге оказывая влияние

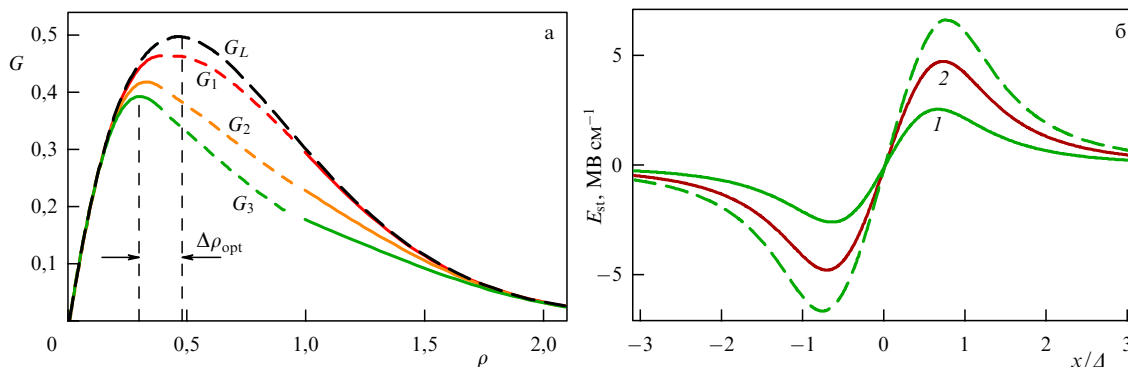


Рис. 15. (а) Достроенные в промежуточной области $\rho \approx 0,5$ асимптотики коэффициента нелинейного поглощения $G(\rho)$ для различных интенсивностей Nd-лазера $I_0 = 10^{16}, 5 \times 10^{16}, 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (G_1, G_2, G_3 соответственно). Графики построены при фиксированных температуре $T = 2$ кэВ и масштабе неоднородности плазмы $L = 10\lambda$. Чёрная штриховая кривая G_L отвечает поглощению в линейной теории [6, 67]. (б) Пространственные распределения квазистатического электрического поля плазменного резонанса, вычисленные при разных значениях плотности потока I_0 излучения Nd-лазера, для температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштаба неоднородности $L = 30\lambda$ и угла падения $\theta_{\min} = 10^\circ$. Кривые 1 и 2 отвечают интенсивностям $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ и $I_0 = 10^{18}$ Вт см $^{-2}$ соответственно. Штриховая кривая описывает пространственный профиль поля в нелинейной нерелятивистской теории [14] при интенсивности $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$.

на величину поглощения. Например, согласно работам [39, 40], при достижении интенсивности лазерного излучения выше $I_0 \approx 3 \times 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ уменьшение коэффициента поглощения сменяется его ростом благодаря нелинейному эффекту укручения профиля плотности плазмы за счёт пондеромоторного воздействия падающего электромагнитного излучения. С другой стороны, заметим, что скачок профиля плотности в области резонанса имеет тенденцию размываться со временем за счёт гидродинамического растекания плазмы на временах порядка наносекунды и долей наносекунд (см., например, [130]). Мы исходим из того, что изменение профиля плотности в нашей теории можно учитывать в первом приближении через параметр L , предполагая при этом выполнение условия слабой неоднородности плазмы. Хотя в общем случае L и зависит от I_0 , у нас L и I_0 — входящие извне, формально независимые управляющие параметры, соотношение между которыми может быть определено, например, методами численного моделирования гидродинамики плазмы. Теория демонстрирует, каким образом на величину поглощения влияет именно релятивистская нелинейность движения электронов в резонансно-усиленном плазменном поле при заданных I_0, T, L , и может рассматриваться в качестве составной части более масштабных схем вычислений, в том числе с применением численных методов при исследовании лазерно-плазменного взаимодействия. Последовательный аналитический учёт самосогласованной деформации профиля плотности неоднородной плазмы в условиях пространственно-временной модуляции фазы релятивистских колебаний электронов представляет собой нетривиальную задачу, требующую отдельного подробного рассмотрения при дальнейшем развитии теории.

3.5. Генерация электростатического поля вблизи критической плотности

При исследовании электромагнитных полей, возбуждаемых вблизи критической плотности, помимо основной и высших гармоник также представляют интерес *квазистатические поля*, механизм генерации которых основан на нелинейном взаимодействии высокочастотных колебаний, таком, что образующаяся при их комбинационном

сложении частота результирующей моды равна нулю. Эффект генерации квазистатического поля становится тривиальным, если рассматривать его в условиях слабой нелинейности, когда величина, определяемая отношением амплитуды осцилляций электрона в резонансно-усиленном потенциальном электрическом поле к ширине плазменного резонанса, мала по сравнению с единицей, — такой механизм отвечает биению двух основных гармоник плазменного поля и даёт хорошо известное выражение для силы высокочастотного давления излучения (силы Миллера). В условиях же сильной нелинейности, когда указанное отношение сравнимо с единицей, спектр нелинейного плазменного поля в окрестности резонанса обогащён высшими гармониками конечной интенсивности. В этом случае [14] вклад в генерацию квазистатического поля даёт всё многообразие комбинационных взаимодействий гармоник основной частоты $\{1 + 1, 2 + 2, \dots, n + n, \dots\}$, вычисление которых при наличии различных типов нелинейности представляет собой нетривиальную задачу и оказывается важным при оценке амплитуды поля. В настоящем разделе мы покажем, что оценка амплитуды квазистатического поля в рамках слабо нелинейной или сильно нелинейной нерелятивистской теории даёт завышенный результат, корректируемый при учёте релятивистской нелинейности [45].

Слабо нелинейная теория генерации квазистатического электрического поля р-поляризованной электромагнитной волной в неоднородной плазме при учёте диссипации излучения в точке плазменного резонанса была построена В.Ю. Быченковым, А.Ш. Абдуллаевым, Ю.М. Алиевым и А.А. Фроловым [17]. Авторы нашли стационарное пространственное распределение квазистатического электрического поля в окрестности плазменного резонанса и показали, что оно имеет биполярную форму. Позже В.Ф. Ковалев и В.В. Пустовалов нашли [14] структуру квазистатических полей в режиме сильной нерелятивистской нелинейности и пришли к аналогичному [17] выводу о биполярности пространственного распределения электрического поля, указав, что компонента квазистатического электрического поля меняет знак при переходе через точку плазменного резонанса. Представленная здесь теория позволяет оценить

не только коэффициент нелинейного поглощения/отражения на основной частоте, но и эффективность генерации высших гармоник лазерного излучения, а также квазистатического электрического поля в окрестности плазменного резонанса. Отысканию спектров излучения из плазмы и их детальному анализу посвящён следующий раздел. Здесь же достигнутый прогресс в теории плазменного резонанса проиллюстрируем на примере квазистатического электрического поля E_{st} , локализованного в области критической плотности. Это поле представляет собой среднее по времени полное продольное электрическое поле плазменного резонанса с учётом всех спектральных составляющих:

$$E_{st} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{px}(\tau, x) d\tau, \quad (3.32)$$

где E_{px} определяется неявным образом посредством функций $P_0(\chi, l)$, $v_0(\chi, l)$, $x_0(\chi, l)$, $\tau(\chi, l)$ из (2.21) через параметрические переменные χ, l .

На рисунке 15б представлено пространственное распределение квазистатического электрического поля в окрестности точки плазменного резонанса $x = 0$ при заданных температуре плазмы и масштабе неоднородности для различных плотностей потока лазерной энергии. Видно, что электрическое поле (3.32), так же как в слабо нелинейной [17] и в сильно нелинейной нерелятивистской [14] теориях, имеет универсальную биполярную форму и меняет знак в точке плазменного резонанса $x = 0$. При этом нелинейная нерелятивистская теория [14] даёт завышенные значения амплитуды поля (см. штриховую линию на рис. 15б). Так, для заданных значений T, L максимум амплитуды статического поля $E_{st} \approx 7 \text{ МВ см}^{-1}$ в нерелятивистской теории достигается уже при $I_0 = 10^{17} \text{ Вт см}^{-2}$, а в релятивистской теории при той же лазерной интенсивности имеем $E_{st} \approx 2,5 \text{ МВ см}^{-1}$.

Оценим характерную энергию $W \sim eE_{st}\Delta$, приобретаемую электроном за счёт ускорения квазистатическим электрическим полем на расстоянии порядка ширины плазменного резонанса. Так, для параметров $L = 30\lambda$, $T = 2 \text{ кэВ}$, $I_0 \approx 10^{18} \text{ Вт см}^{-2}$, $\theta_{\min} = 10^\circ$ энергия ускоренных электронов составляет $W \simeq 30 \text{ кэВ}$. Ещё предстоит понять возможные следствия такого механизма генерации быстрых электронов, хотя уже можно сделать вывод о том, что благодаря биполярности электрического поля быстрые электроны испытывают на себе действие разнонаправленной статической электрической силы в плазменном резонансе и поэтому не покидают его узкой пространственной области. Последнее позволяет заключить, что такие электроны не окажут дополнительного паразитного эффекта на предподогрев ЛТС-мишени, ограничение которого составляет одну из важнейших задач выявления оптимальных условий реализации ЛТС в схеме прямого нагрева [18–21, 24–26, 33].

4. Генерация высших гармоник

Процессы генерации гармоник в лазерной плазме, образующейся при взаимодействии лазерного излучения с твердотельными мишенями, в течение полувека являются предметом как экспериментальных, так и теоретических исследований [15]. Впервые генерация гармоник наблюдалась в 1970 г. в работе А. Карузо и др. [131], где была получена вторая гармоника лазерного излучения,

затем продемонстрированная также в [132, 133]. Вскоре стало ясно, что детальное исследование характеристик вторичного излучения может служить источником богатых сведений о состоянии лазерной плазмы. Речь идёт о методике диагностики плазмы, основанной на исследовании второй гармоники, которая позволяет получать информацию об эволюции параметров лазерной плазмы с высоким временным и пространственным разрешением. Первые предложения по использованию измерений интенсивности и спектра второй гармоники для определения различных параметров лазерной плазмы в области критической плотности были сформулированы в работах В.В. Пустовалова, А.В. Виноградова и В.П. Силина [134, 135]. Полученные позже различными группами [136–139] оценки локальной температуры и характерного масштаба неоднородности плотности лазерной плазмы продемонстрировали целесообразность развития методов диагностики параметров плазмы по её излучению в диапазоне частот вблизи удвоенной частоты поля накачки. Кроме того, в [140] было указано, что в рамках диагностики по второй гармонике можно получать информацию не только о макроскопических параметрах плазмы, но также об уровне и спектре развивающейся в плазме параметрической турбулентности.

Вскоре после экспериментов [131–133] последовали эксперименты по обнаружению третьей [141] гармоники и гармоник с высокими номерами вплоть до 11-й и $n = 2–5$ в случаях CO_2 - [54] и неодимового лазера [142] соответственно. Регистрация гармоник более высокого порядка была осуществлена в 1981 г. в ходе экспериментов Р.Л. Кармана и др. [55, 143] по взаимодействию CO_2 -лазера интенсивностью $10^{14}–10^{16} \text{ Вт см}^{-2}$ с твердотельными мишенями. При этом наблюдались гармоники лазерной частоты вплоть до 29-й [143] и даже 46-й [55] гармоник. Более того, были впервые получены спектры вторичного излучения, характеризующиеся медленным (не экспоненциальным) убыванием интенсивностей гармоник с ростом их номера и "частокольные" спектры с выравниванием интенсивностей соседних гармоник.

Во многих теоретических исследованиях генерации гармоник в неоднородной плазме используется математическая модель, основанная на эффекте плазменного резонанса [1, 3]. Ко времени экспериментального обнаружения второй гармоники [131] уже имелись теоретические представления [8], указывающие на возможную связь данного эффекта с возбуждением в лазерной плазме сильных продольных электронных ленгмюровских колебаний благодаря линейной трансформации лазерного излучения. В области, где частота плазменных колебаний близка к частоте падающего на плазму излучения, дальнейшее взаимодействие продольных плазменных колебаний друг с другом либо с волной лазерной накачки приводит к генерации вторичного излучения на удвоенной частоте лазерного света. На основе этих представлений Н.С. Ерохин, В.Е. Захаров, С.С. Моисеев и В.В. Мухин построили слабо нелинейную теорию генерации второй гармоники [8, 10]. Обобщая подход, предложенный в [8], В.П. Силин, А.Б. Владимирский и Н.П. Троценко решили задачи о генерации гармоник произвольной кратности в холодной [11] и горячей плазме [13] соответственно. Они показали, что возникающие в результате резонанса сильные плазменные колебания

порождают нелинейные электронные токи, являющиеся источником генерации вторичного излучения, обогащённого высшими гармониками. Тот же механизм рассматривался в работе [144] в связи с объяснением ряда экспериментов [55, 143]. Предположение о слабой нелинейности в окрестности резонанса позволило авторам работ [8, 11, 144] использовать теорию возмущений по амплитуде поля накачки. Указанное предположение даёт возможность пренебречь влиянием высших гармоник на низшие, в том числе и на основную гармонику, амплитуда которой считается заданной. Из теории возмущений следует, что плотность потока вторичного излучения на частоте $n\omega_0$ пропорциональна n -й степени плотности потока лазерного излучения, падающего на плазму. Такая зависимость приводит к экспоненциально быстрому спадаанию интенсивностей гармоник с ростом их номера n . Однако с увеличением амплитуды поля накачки предположение о слабой нелинейности нарушается и возникает необходимость учёта эффектов, обусловленных сильной нелинейностью. Наличие сильной нелинейности качественно меняет процесс генерации целых гармоник, причём высшие гармоники, которые, согласно стандартной (слабо нелинейной) теории возмущений [8, 11], были экспоненциально малы, становятся существенно усиленными, что приводит к более плавному спадаанию или даже выравниванию интенсивностей соседних гармоник [55].

Указания на возможность существования более плавного спадающих спектров излучения из плазмы были даны ещё М.Б. Исиченко и В.В. Янковым [145, 146] в ходе качественного обсуждения генерации гармоник лазерного излучения за счёт опрокидывания нерелятивистских электронных потоков, но без строгого теоретического обоснования. В цикле теоретических работ конца 1980-х годов [14, 147–153] удалось построить аналитическую теорию генерации высших гармоник в условиях сильной нерелятивистской нелинейности в окрестности критической плотности неоднородной плазмы. Было показано, что даже при небольших по нынешним меркам лазерных интенсивностях $\sim 10^{16}$ Вт см $^{-2}$ возможна генерация электромагнитного излучения со спектром, характеризующимся существенно более медленным, чем в стандартной теории возмущений [11], спадаанием амплитуд гармоник с ростом их номера, что подтверждалось экспериментальными фактами [55, 143]. Затем были получены основные формулы для коэффициента трансформации лазерного излучения в гармоники для холодной и горячей плазмы, а также проанализированы их температурные зависимости [148, 150–152]. Продолжением указанных работ являются недавние исследования [56, 57], в которых обсуждался вопрос о влиянии на генерацию гармоник релятивистских эффектов динамики электронной компоненты плазмы вблизи критической плотности и при условии эффективного резонансного поглощения. Ниже будут изложены результаты этих последних теоретических исследований, позволяющих описать спектральный состав гармоник, излучаемых из области плазменного резонанса.

4.1. Решение задачи о генерации высших гармоник при релятивистском плазменном резонансе

Для описания процесса генерации гармоник исходим из полученного ранее уравнения (3.2). С учётом неравенств (3.3) для случая $n \geq 2$ уравнение (3.2) прибли-

жается к виду

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \\ = \frac{a}{c} \left\{ \text{in} k_y v \partial_x P + k_y \omega_0 v \partial_x (\gamma_0 v) + \frac{k_y \omega_0}{a} \partial_t (v(\gamma_0 - 1)) - \right. \\ \left. - \partial_x (u \partial_x P) + \frac{i\omega_0}{n} \partial_x \left[v \partial_x (\gamma_0 u) + \frac{1}{a} \partial_t (u(\gamma_0 - 1)) \right] \right\}_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При выводе (4.1), как и в предыдущих разделах, мы пренебрегли зависимостью частоты от координаты x , $\omega_L = \omega_0$, что законно для слабо неоднородной плазмы, в которой ширина плазменного резонанса мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности плотности L . Иерархия компонент электромагнитного поля вблизи критической плотности (2.5) позволяет удержать в правой части (4.1) только члены, пропорциональные k_y . В результате получаем волновое уравнение с источником в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \\ = - \frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot} \mathbf{J}_n \right\}_z, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где компоненты нелинейного тока определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n = \left\{ v \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 v) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v, \right. \\ \left. u \partial_x P - \frac{i\omega_0}{n} v \partial_x (\gamma_0 u) - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u, 0 \right\}_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При скоростях движения электрона, много меньших скорости света ($\gamma_0 \rightarrow 1$), выражение (4.3) переходит в формулу для тока, полученную при построении нелинейной нерелятивистской теории [14]. Как и в случае $n = 1$, из уравнения (4.2) и соотношения (4.3) следует, что для вычисления n -й гармоники магнитного поля в вакууме необходимо знать нелинейный ток, который определяется структурой (2.21) электрического поля и скорости электронов в области плазменного резонанса.

Аналогично случаю основной гармоники, запишем решение неоднородного уравнения (4.2) через фундаментальную систему решений однородного уравнения Ψ^+ и Ψ^- в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_n(x) = \alpha_n^+ \Psi_n^+(x) + \alpha_n^- \Psi_n^-(x) + \int_{-\infty}^x d\xi \mathcal{G}(x, \xi) f_n(\xi), \\ \mathcal{G}(x, \xi) = - \frac{\Psi_n^+(x) \Psi_n^-(\xi) - \Psi_n^+(\xi) \Psi_n^-(x)}{\Psi_n^+(\xi) \Psi_n^{\prime-}(\xi) - \Psi_n^{\prime+}(\xi) \Psi_n^-(\xi)}, \\ f_n(x) = \frac{a}{c} \left\{ \text{in} k_y \left(v P_x - \frac{i\omega_0}{n} v(\gamma_0 v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) v \right) + \right. \\ \left. + \left[u P_x - \frac{i\omega_0}{n} v(\gamma_0 u)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma_0 - 1) u \right]_x \right\}_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь α_n^\pm — константы, определяемые граничными условиями для уравнения (4.2) применительно к решению (4.4). Граничные условия, в свою очередь, следуют

из вида магнитного поля $R_n(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} R_n &= \tilde{C}_n^- \exp\left(-i \frac{\omega_0}{c} x \cos \theta\right), \quad x \rightarrow -\infty, \\ R_n &= 0, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где комплексная амплитуда \tilde{C}_n^- соответствует волне, отражённой от плазменного слоя.

Найдём коэффициент преобразования в гармоники при не слишком малых углах θ , таких что $\rho > 1$. Решение однородного линейного уравнения в различных областях относительно точки поворота x_{n0} для гармоники с частотой $n\omega_0$ имеет вид (σ_1, σ_2 — некоторые константы):

$$\begin{aligned} R_n &= -i\mathcal{E}_n \left(\frac{3}{2} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{1/6} \left\{ \sigma_1 \text{Ai} \left[-\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{2/3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 \text{Bi} \left[-\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{2/3} \right] \right\}, \quad x < x_{n0}, \\ R_n &= -i\mathcal{E}_n \left(\frac{3}{2} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{1/6} \left\{ \sigma_1 \text{Ai} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{2/3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 \text{Bi} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{2/3} \right] \right\}, \quad x > x_{n0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\sqrt[4]{\varepsilon_n - \sin^2 \theta}}, \\ \mathcal{L}_n^-(x) &= \int_x^{x_{n0}} dt \sqrt{\varepsilon_n - \sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_n^+(x) &= \int_{x_{n0}}^x dt \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что равномерно пригодное представление для функций Ψ^+ и Ψ^- во всей области изменения координаты x , за исключением малой окрестности резонанса высшего порядка (т.е. в области, где $\varepsilon(n\omega_0, x) \approx 0$), даётся функциями

$$\begin{aligned} \Psi_n^+(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{1/6} \text{Ai} \left[-\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{2/3} \right], \\ &\quad x < x_{n0}, \\ \Psi_n^+(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{2/3} \right], \\ &\quad x > x_{n0}, \\ \Psi_n^-(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{1/6} \text{Bi} \left[-\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^-(x)\right)^{2/3} \right], \\ &\quad x < x_{n0}, \\ \Psi_n^-(x) &= \mathcal{E}_n \left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{1/6} \text{Bi} \left[\left(\frac{3n\omega_0}{2c} \mathcal{L}_n^+(x)\right)^{2/3} \right], \\ &\quad x > x_{n0}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Точка поворота x_{n0} гармоники с частотой $n\omega_0$, определяемая условием $\varepsilon(n\omega_0, x_{n0}) = \sin^2 \theta$, в рассматриваемом нами случае не слишком больших углов θ , таких что $\sin^2 \theta < 3/4$, для всех высших гармоник лежит правее точки плазменного резонанса, т.е. $x_{n0} > 0$.

Следуя общей схеме, изложенной для $n = 1$ в приложении Б (см. подробности вычислений для случая

$n \geq 2$ в [44, 56, 57]), получим следующее выражение для амплитуды гармоники магнитного поля B_z в вакууме с номером $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} C_n^- &= \frac{im_e \omega_0^3 A^2 \exp(i n \arg R_1(0) - i n \pi + i \int_{-\infty}^0 k_n(x) dx)}{4\pi e c (\cos^2 \theta - 1/n^2)^{1/2} (1 - 1/n^2)^{1/4} |\cos \theta|^{1/2}} \times \\ &\quad \times \left[\exp \left\{ \frac{4in^3 L \omega_0}{3c} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2} \right)^{3/2} \right\} I_n^- + i I_n^+ \right], \quad (4.7) \\ I_n^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \exp \left(i n \tau \pm i n B x_0 \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2}} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\partial_\chi \left(P_0 - \frac{i}{n} \gamma_0 v_1 \right) \partial_l \tau - \partial_l \left(P_0 - \frac{i}{n} \gamma_0 v_1 \right) \partial_\chi \tau - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau) (\gamma_0 - 1) \right] v_1 \sin \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2}} \times \right. \\ &\quad \times \left[\left(u_0 \partial_\chi P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_\chi (\gamma_0 u_0) \right) \partial_l \tau - \right. \\ &\quad \left. - \left(u_0 \partial_l P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_l (\gamma_0 u_0) \right) \partial_\chi \tau - \right. \\ &\quad \left. \left. - (\partial_l \tau \partial_\chi x_0 - \partial_l x_0 \partial_\chi \tau) (\gamma_0 - 1) u_0 \right] \right\}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Наличие двух слагаемых в квадратных скобках в формуле для C_n^- соответствует двум различным физическим механизмам генерации гармоник. Слагаемое, пропорциональное I_n^+ , описывает волну гармоники, непосредственно излучаемую в вакуум из области плазменного резонанса, а слагаемое, пропорциональное I_n^- , — волне гармоники, излучаемой из области плазменного резонанса в глубь плазмы и выходящей в вакуум после отражения от области более плотной плазмы. Интегралы (4.8) в (4.7) далее вычисляются с использованием системы компьютерной алгебры "Wolfram Mathematica" [122].

4.2. Спектральный состав излучения и сравнение с сильно нелинейной нерелятивистской теорией

Для исследования спектрального состава излучения примем магнитное поле первой гармоники при $x \rightarrow -\infty$ в виде

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega_0 t + \varphi_0) + \\ &\quad + B_s \cos(-(k_x x - k_y y) - \omega_0 t + \varphi_s), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где индексы 0 и s обозначают падающую и отражённую волны соответственно. Тогда исходя из (4.7) интенсивность I_n гармоники, испускаемой из плазмы, и коэффициент отражения \mathcal{R}_n на частоте $n\omega_0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \left| \frac{C_n^-}{C_1^+} \right|^2 = \frac{k_0 L G_L |\Omega_n|^2}{4\pi^3 A_L^2 (1 - 1/n^2) (\cos^2 \theta - 1/n^2)^{1/2}}, \\ \Omega_n &= \exp \left\{ \frac{4in^3 L \omega_0}{3c} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2} \right)^{3/2} \right\} I_n^- + i I_n^+, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$I_n = \mathcal{R}_n I_0, \quad C_1^+ = \frac{B_0}{2},$$

где I_0 — плотность потока падающего на плазму излучения, а I_n^\pm определяются выражениями (4.8). В

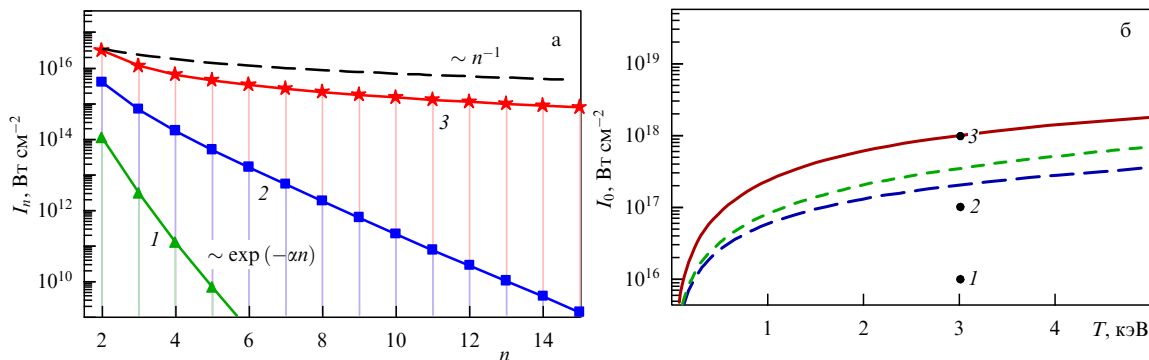


Рис. 16. (а) Спектры излучения из плазмы, вычисленные для значений плотности потока Nd-лазерного света $I_0 = 10^{16}$ Вт см⁻² (кривая 1), 10^{17} Вт см⁻² (кривая 2), 10^{18} Вт см⁻² (кривая 3) при фиксированных температуре плазмы $T = 3$ кэВ, масштабе неоднородности $L = 10\lambda$ и угле падения лазерного излучения $\theta_{\min} = 14,5^\circ$. (б) Границы применимости гидродинамической модели на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для масштаба неоднородности $L = 10\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учётом нелинейной перенормировки амплитуды в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учёта нелинейной перенормировки. Зелёная штриховая кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Точки 1, 2, 3 на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ соответствуют кривым 1, 2, 3 на рис. а.

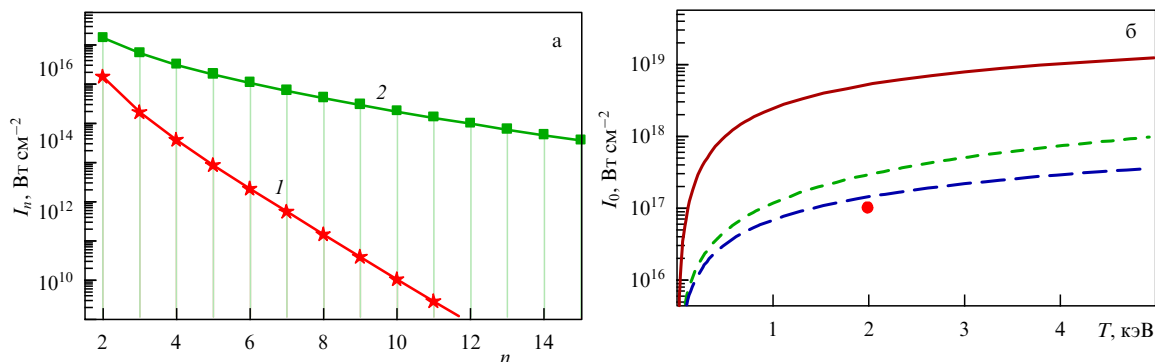


Рис. 17. (а) Спектры магнитного поля в релятивистской (кривая 1) и нерелятивистской [14] (кривая 2) теориях при $I_0 = 10^{17}$ Вт см⁻² (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ, $\theta = \theta_{\min}$ для $L = 30\lambda$. (б) Границы применимости гидродинамической модели на плоскости параметров $\{T, I_0\}$ для масштаба неоднородности $L = 30\lambda$. Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учётом нелинейной перенормировки амплитуды в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учёта нелинейной перенормировки. Зелёная штриховая кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории [14]. Красная точка отвечает набору параметров $I_0 = 10^{17}$ Вт см⁻² (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ, $\theta = \theta_{\min}$, $L = 30\lambda$.

качестве оценки результатов теории на границе её применимости мы рассмотрим характеристики излучения из плазмы при углах θ_{\min} для случая Nd-лазера с длиной волны $\lambda = 1,064$ мкм. На рисунке 16а показаны зависимости интенсивностей I_n гармоник отражённого магнитного поля от номера n при фиксированных значениях масштаба неоднородности L и температуры T плазмы для различных значений плотности потока I_0 лазерного излучения, соответствующих точкам 1, 2, 3 на параметрической плоскости $\{T, I_0\}$ (рис. 16б). Из сравнения спектров $I_n(n)$ следует, что с ростом амплитуды поля накачки происходит изменение наклона спектральной кривой, а именно её выполаживание, которое достигает максимального проявления вблизи границы опрокидывания резонансных плазменных колебаний, где формируются спектры излучения, характеризующиеся степенным законом убывания I_n с ростом номера n , но более быстрым, чем $1/n$. Рисунок 17а, где представлены спектральные кривые, полученные с учётом и без учёта [14] релятивистских эффектов при фиксированных параметрах I_0, θ, T, L , показывает, что за счёт насыщения амплитуды поля плазменного резонанса и сдвига границы опрокидывания в область больших лазерных

интенсивностей спектр излучения в релятивистской теории характеризуется более быстрым спаданием гармоник с возрастанием номера n . Из рисунка 17б, где отмечена точка, соответствующая набору параметров для рис. 17а, видно, что эта точка близка к границе опрокидывания в нерелятивистской теории [14] и далека от границы опрокидывания в представленной здесь релятивистской теории. Подчеркнём, что существенные различия между спектральными кривыми в релятивистской и нерелятивистской [14] теориях являются прямым следствием фазовой модуляции релятивистских плазменных колебаний в окрестности критической плотности плазмы, которая была подробно исследована в предыдущих разделах. Учёт релятивизма плазменных колебаний приводит к наличию в формулах (4.7) и (4.8) как лоренц-фактора γ_0 , так и параметрической зависимости τ от x и P , отвечающей за фазовую модуляцию колебаний. Чтобы проиллюстрировать определяющее влияние на перестройку спектров именно фазовой модуляции при переходе к релятивистской теории, сравним спектры излучения из плазмы в нерелятивистской теории [14] со спектрами, вычисленными с использованием формул (4.7) и (4.8), но без учёта фазовой модуляции,

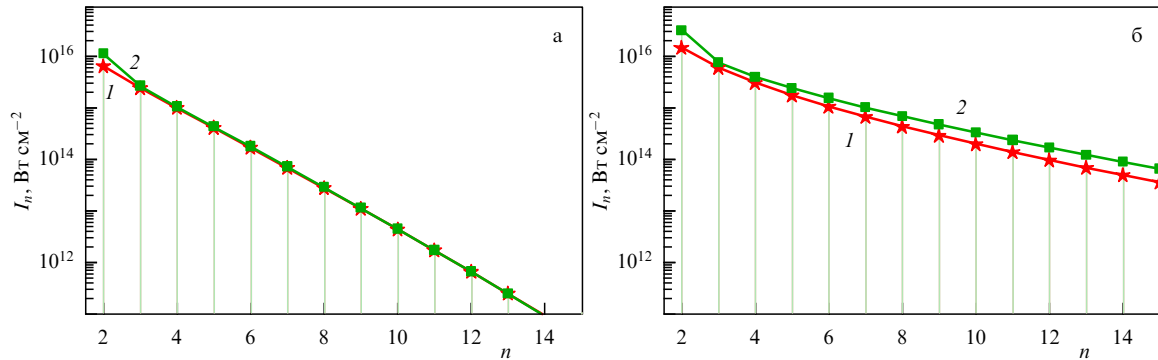


Рис. 18. Спектры магнитного поля, полученные в нерелятивистской теории [14] (кривая 1) и в релятивистской теории, но без учёта фазовой модуляции (кривая 2) при $I_0 = 1,3 \times 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ, $\theta = \theta_{\min}$ для $L = 100\lambda$ (а) и $L = 30\lambda$ (б).

Таблица 1. Отношения интенсивностей гармоник с номерами $n = 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, вычисленных без учёта фазовой модуляции (\tilde{I}_n) и в нелинейной нерелятивистской (I_n^{NR}) теории [14] при $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (Nd-лазер), $T = 2$ кэВ

L	$\tilde{I}_2/I_2^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_5/I_5^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_7/I_7^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_9/I_9^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_{11}/I_{11}^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_{13}/I_{13}^{\text{NR}}$	$\tilde{I}_{15}/I_{15}^{\text{NR}}$
30λ	2,2	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8
100λ	1,7	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9	0,9

т.е. когда $\tau(\chi, l) = \chi$ и выражения для I_n^\pm принимают вид

$$I_n^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \exp\left(in\chi \pm inBx_0 \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2}}\right) \times \\ \times \left\{ \left[(\gamma_0 - 1) \partial_l x_0 - \partial_l \left(P_0 - \frac{i}{n} \gamma_0 v_1 \right) \right] v_1 \sin \theta \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[(\gamma_0 - 1) u_0 \partial_l x_0 - \left(u_0 \partial_l P_0 - \frac{i}{n} v_1 \partial_l (\gamma_0 u_0) \right) \right] \right\}.$$

Сравнение показывает (рис. 18) отсутствие существенных различий в интенсивностях гармоник как в случае менее ($L = 30\lambda$), так и в случае более ($L = 100\lambda$) протяжённых градиентов неоднородности плазмы (см. также табл. 1). Таким образом, изменение структуры спектра при переходе к релятивистской теории определяется в основном фазовой модуляцией резонансно-усиленных плазменных колебаний.

Изменение зависимости $I_n(n)$ с уменьшением характерного масштаба неоднородности плотности плазмы L представлено на рис. 19. Для сравнительно больших L (рис. 19а) с увеличением градиента неоднородности наблюдается переход к более плавной зависимости интенсивности I_n гармоник от номера n , однако дальнейший рост градиента неоднородности (рис. 19б) приводит к снижению эффективности генерации гармоник и к спектрам с экспоненциальным законом спада, поскольку условие $k_0 L \gg 1$, необходимое для реализации механизма плазменного резонанса [3], выполняется всё менее и менее точно. Такая картина отлична от результатов работ [16, 154, 155], где рассматривались относительные масштабы неоднородности L/λ в диапазоне 0,1–1,0 при исследовании эффективности поглощения лазерного излучения и генерации второй гармоники. В частности, величина $L/\lambda \sim 0,23$ была указана в [16] как оптимальная для генерации второй гармоники механизмом плазменного резонанса. Наша теория показывает, что такие масштабы неоднородности не характерны для проявления механизма плазменного резонанса, хотя используемая модель применима только в случае протяжённых

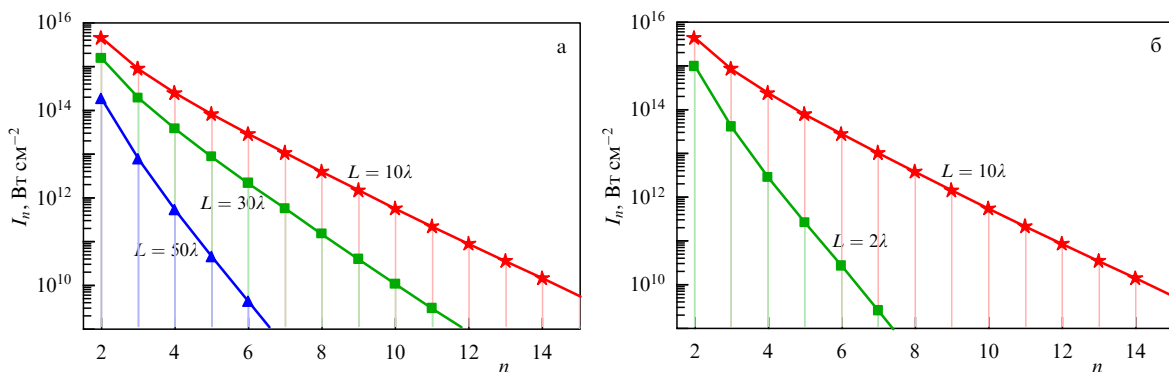


Рис. 19. Спектральные распределения магнитного поля в вакууме при фиксированных интенсивности поля излучения Nd-лазера $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$, угле падения $\theta = \theta_{\min}$ и температуре плазмы $T = 2$ кэВ для различных значений масштаба неоднородности $L = 50\lambda$, $L = 30\lambda$, $L = 10\lambda$ (а) и $L = 2\lambda$, $L = 10\lambda$ (б).

градиентов $L/\lambda \gg 1/2\pi$. Формально мы не можем провести сравнение с [16, 154, 155] для $L/\lambda \sim 0,23$ вследствие условий применимости нашей теории. Однако можно утверждать, что эффект плазменного резонанса как механизм генерации гармоник для столь резких градиентов плотности плазмы $L \sim \lambda$ перестаёт эффективно работать.

Результаты нашей теории хорошо согласуются с медленно убывающими спектрами гармоник CO_2 -лазера, которые наблюдались в экспериментах более чем сорокалетней давности [54, 55] и до недавнего времени не получали объяснения. Действительно, при интенсивности CO_2 -лазера $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт см $^{-2}$ и температуре электронов $T \simeq 1$ кэВ нелинейные эффекты в окрестности критической плотности настолько сильны, что могут привести к опрокидыванию плазменных колебаний. Вблизи такой интенсивности теория предсказывает спектры гармоник, характеризующиеся слабой зависимостью от n . Так, для интенсивностей падающего излучения $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт см $^{-2}$ при $L = 10\lambda$ и $T \simeq 1$ кэВ получаем $I_2/I_3 \approx 2$, $I_3/I_4 \approx 1,7$ и $I_5/I_6 \approx 1,4$, что соответствует экспериментальным результатам [55]. В случае, когда $I_0 \simeq 10^{14} - 10^{15}$ Вт см $^{-2}$, теория даёт $I_2/I_3 \approx 9$, $I_3/I_4 \approx 6,5$ и $I_5/I_6 \approx 5$, что хорошо согласуется с [54], где уменьшение энергии гармоник с ростом n оценивалось как $I_n/I_{n+1} \approx 6$.

Поскольку экспериментальные данные [54, 55] получены для достаточно длинных лазерных импульсов, оговорим роль движения ионов и приведём оценки в пользу предлагаемого нами механизма формирования спектров вторичного излучения. Действительно, наряду с быстрым движением электронов, которое вносит определяющий вклад в структуру спектров, имеет место медленное гидродинамическое движение ионов, типично со скоростями порядка скорости ионного звука на характерном уровне $v_s \approx 10^7$ см с $^{-1}$. Последнее проявляется как в виде движения самой поверхности критической плотности, так и в виде течения плазмы через область критической плотности [12]. Проявление движения критической поверхности сказывается в том, что спектральный пик гармоник может доплеровски смещаться либо в синюю, либо в красную область спектра. Течение же плазмы при учёте конечного времени регистрации спектра приводит к доплеровскому уширению линии гармоник, из-за того что скорость течения меняется во времени. Вследствие малости характерной скорости ионов в сравнении с электронными скоростями (тепловыми и осцилляционными) учёт движения ионов не приведёт к существенным изменениям глобальной — линейчатой структуры спектра гармоник. Малыми смещениями и уширениями спектральных линий можно пренебречь, поскольку их характерный масштаб незначителен по сравнению с расстоянием между гармониками, т.е. в случае легко выполняющегося неравенства $\omega_0 \gg v_s/\delta$, примерно выражающегося в виде 10^{15} с $^{-1} \gg 10^{11}$ с $^{-1}$.

4.3. Связь с теорией возмущений

Обсудим связь построенной здесь теории со слабо нелинейной теорией генерации гармоник. Авторы статьи [10] отмечали слабую зависимость эффективности генерации второй гармоники от ширины плазменного резонанса (эффективной частоты столкновений), когда нелинейные эффекты малы. Покажем, что это действительно так. В таблице 2 даётся сравнение интенсивностей второй

Таблица 2. Значения интенсивностей второй гармоники, вычисленные по теории возмущений, I_2^{PT} , и в релятивистской теории, I_2 , для различных плотностей потоков Nd-лазерного света I_0 при $L = 10\lambda$, $T = 3$ кэВ и $\theta = \theta_{\text{min}}$

I_0 , Вт см $^{-2}$	I_2^{PT} , Вт см $^{-2}$	I_2 , Вт см $^{-2}$
10^{16}	10^{14}	10^{14}
10^{17}	4×10^{16}	4×10^{15}
10^{18}	10^{18}	3×10^{16}

гармоники в теории возмущений [8, 11] с интенсивностями, полученными в релятивистской теории. Видно, что при умеренных плотностях потока лазерного излучения I_0 нелинейность слабо влияет на генерацию второй гармоники, однако с ростом I_0 , т.е. с приближением к границе опрокидывания, отличие становится заметным: теория возмущений существенно завышает интенсивность второй гармоники. С другой стороны, в [10] было показано, что предел применимости слабо нелинейной теории находится значительно ниже порога опрокидывания. Авторы [10] сформулировали критерий малости нелинейности, который формально задаёт пределы применимости теории возмущений для оценки эффективности генерации второй гармоники:

$$\left| \frac{eH_0 \sin \theta}{2mc\omega_0 \tilde{\beta}} \right| < \left(\frac{\tilde{\beta}}{\rho_0} \right)^{2/3}. \quad (4.11)$$

Здесь H_0 — амплитуда магнитного поля в точке плазменного резонанса, $\tilde{\beta} = \sqrt{T_e/mc^2}$, $\rho_0 = \omega_0 L/c$. В терминах интенсивности лазерного излучения I_0 для набора параметров из табл. 2 это условие эквивалентно неравенству $I_0 < 5 \times 10^{15}$ Вт см $^{-2}$. Однако, как показывает табл. 2, при $I_0 = 10^{16}$ Вт см $^{-2}$ теория возмущений всё ещё даёт интенсивности второй гармоники I_2^{PT} , совпадающие с интенсивностями из релятивистской теории. Таким образом, слабо нелинейная теория генерации второй гармоники даёт хорошую оценку эффективности генерации даже за пределами формальной применимости теории.

Сравним эффективность генерации высших гармоник при различных плотностях потока лазерного излучения (рис. 20). При малых и умеренных интенсивностях I_0 лазерного поля результаты слабо нелинейной теории [11] совпадают с результатами релятивистской теории до номеров гармоник $n \approx 10$ (рис. 20а). Затем, с ростом интенсивности поля лазерной накачки, теория Владимирского — Силина начинает существенно завышать значения амплитуд гармоник (рис. 20б). Наконец, в области параметров лазерно-плазменной системы, при которых в окрестности плазменного резонанса существенны релятивистские эффекты, наблюдается расхождение ряда теории возмущений (рис. 20в), и последняя уже не может претендовать на сколько-нибудь удовлетворительную оценку интенсивностей гармоник I_n .

В заключение настоящего раздела отметим, что на сегодняшний день медленно спадающие спектры излучения из плазмы получены также в случаях более коротких, мощных (релятивистских) лазерных импульсов фемтосекундной длительности и более резких градиентов неоднородности плазмы, когда реализуются другие (отличные от механизма плазменного резонанса) механизмы генерации гармоник [15, 102]. В предельном случае полужанной плазмы процесс генерации гармоник пред-

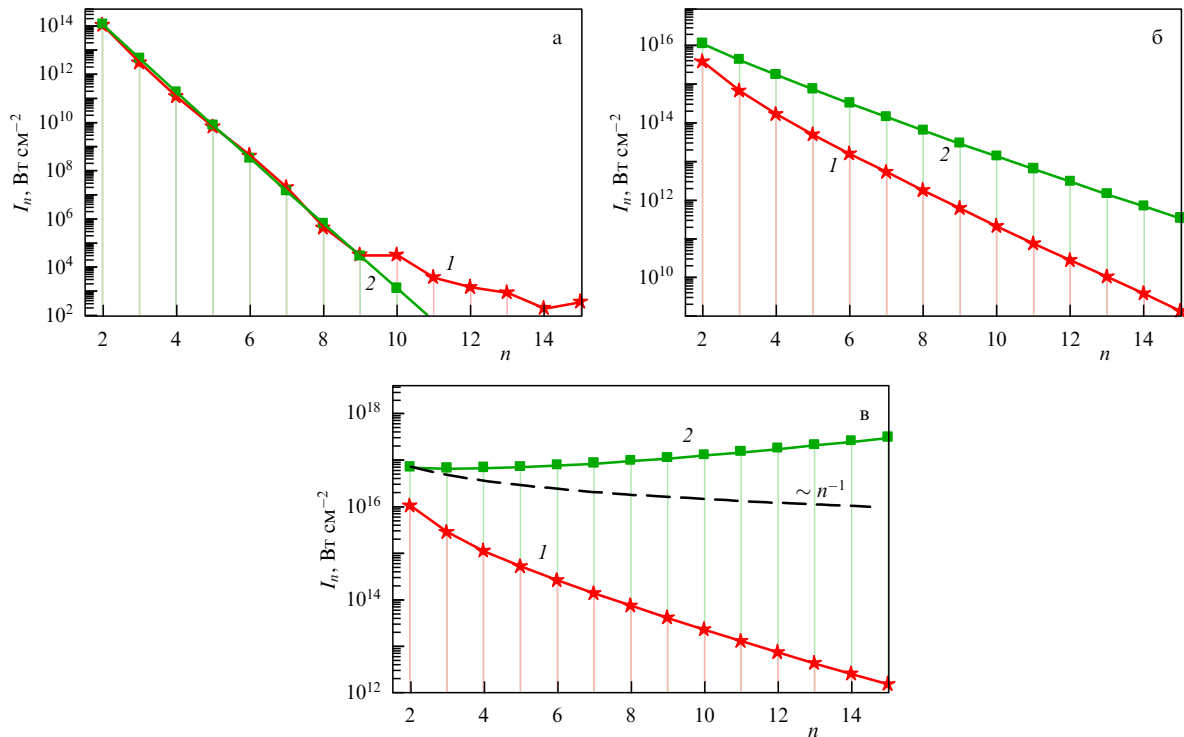


Рис. 20. Спектры магнитного поля в вакууме, полученные в релятивистской теории (1) и в теории возмущений [11] (2) для различных интенсивностей Nd-лазерного излучения: $I_0 = 10^{16}$ Вт см $^{-2}$ (а), $I_0 = 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (б), $I_0 = 2,5 \times 10^{17}$ Вт см $^{-2}$ (в). Графики построены при фиксированных $T = 3$ кэВ, $L = 10\lambda$, $\rho = 1$.

ставляется как отражение лазерного излучения от осциллирующего электронного (плазменного) зеркала [156–158]. Модель осциллирующего зеркала приводит к степенным спектрам гармоник вида $\propto \omega^{-8/3}$ в сильно релятивистском пределе [159], когда скорости колебаний электрона в лазерном поле близки к скорости света. Такая модель генерации гармоник [156, 159] была подтверждена численным моделированием в рамках PIC-метода. Плавные спектры вторичного излучения в условиях резкой (ступенчатой) границы плазма–вакуум, которые характеризуются степенным законом спада интенсивности гармоник, также были получены в работах [160–163] с использованием численного моделирования, однако всё ещё не получили подробно разработанного теоретического обоснования. Применяемые в наших исследованиях методы позволяют надеяться на построение содержательной физической теории в этой области, поскольку в будущем они могут быть распространены на указанные режимы генерации гармоник при высоких лазерных интенсивностях, когда описание динамики плазмы следует вести на языке кинетических уравнений.

5. Заключение

Трудно не согласиться, что наличие последовательной аналитической теории какого-либо явления, даже в рамках определённых ограничений, в существенной мере характеризует уровень понимания его физических основ и возможностей его описания в широком диапазоне управляющих параметров. Особую ценность представляют теории для условий сильной нелинейности, не допускающей использования пертурбативных методов и зачастую требующей применения или разработки новых

подходов. Так, начиная с конца 1980-х годов поиск подобных подходов привёл к внедрению в физику сильного лазерно-плазменного взаимодействия уникального математического инструментария ренормгрупповых симметрий [68]. Он позволил описать плазменный резонанс и генерацию высших гармоник в условиях сильной нерелятивистской электронной нелинейности в области критической плотности неоднородной плазмы [14, 147–153], новые режимы самофокусировки света [164–168], нелокальный теплоперенос [169], ускорение ионов при разлёте плазмы в вакуум [170–175] и пондеромоторную кумуляцию ионов в лазерно-плазменном канале [176]. Представленный обзор даёт ещё одну иллюстрацию успешного использования ренормгрупповых симметрий в физике лазерно-плазменного взаимодействия.

Спустя 30 лет после работы [14] удалось развить заложенные в ней РГ-идеи и построить теорию нелинейного релятивистского плазменного резонанса, используя в качестве исходной электромагнитную структуру Гинзбурга–Денисова [1, 2]. Отличительная особенность метода, применённого в процессе отыскания решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающих электрическое поле и скорость электронов вблизи критической плотности плазмы, заключается в использовании двухпараметрической алгебры ренормгрупповых генераторов, которая позволила получить решения, справедливые в широком диапазоне параметров, характеризующих различные типы нелинейности, и разделить вклады релятивистской и нерелятивистской (конвективной) нелинейностей (см. раздел 2.1). Именно такая возможность является одной из причин использования многомерных ренормгрупп для систем с несколькими параметрами [177].

Разделение нелинейностей, в свою очередь, привело к последовательному двухэтапному переходу между решениями. Первый этап соответствует переходу от линейного [2] к сильно нелинейному нерелятивистскому решению [14] посредством РГ-преобразования по нерелятивистскому параметру нелинейности. На втором этапе РГ-преобразованием по релятивистскому параметру осуществляется переход к нелинейному релятивистскому решению. Границы применимости используемой нами гидродинамической модели естественным образом задаются условием опрокидывания резонансно-усиленных плазменных колебаний, найденным с учётом как конвективной, так и релятивистской нелинейности движения электронов (см. разделы 2.3, 3.3).

Знание электромагнитного поля в области плазменного резонанса позволило построить теорию релятивистски-нелинейного резонансного поглощения электромагнитного излучения в неоднородной плазме и тем самым существенно продвинуть границу теоретического описания резонансного поглощения лазерной плазмой в область высоких интенсивностей лазера: теория позволяет вычислять коэффициент нелинейного резонансного поглощения G в диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт см⁻² мкм². Полученный в разделе 3.4 коэффициент G зависит от четырёх лазерно-плазменных управляющих параметров: лазерной интенсивности, масштаба неоднородности плазмы, её температуры и угла падения лазерного излучения на плазму. Отметим, что в ряде исследований [39–41] была продемонстрирована зависимость коэффициента поглощения от интенсивности лазерного излучения при учёте релятивистских эффектов движения электронов вблизи критической плотности неоднородной плазмы, хотя линейная теория такой зависимости, конечно, не предполагает [6]. При этом на фоне очевидных успехов в описании нелинейного резонансного поглощения можно заметить противоречивость известных на сегодня результатов, полученных разными научными группами. К примеру, одними [38] утверждается универсальность оптимального угла падения лазерного излучения на плазму и монотонный рост коэффициента поглощения с увеличением интенсивности поля лазерной накачки. Другие, напротив, отмечают [39, 40] эффект подавления резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивности вплоть до интенсивности $I_0 \approx 3 \times 10^{17}$ Вт см⁻² (Nd-лазер) или указывают [41] на смещение максимума угловой функции коэффициента нелинейного поглощения относительно положения максимума в линейной теории. Более того, в работах [38, 41] не устанавливается чётких границ применимости предложенных полуаналитических моделей, но рассматривается такой широкий диапазон градиентов неоднородности плазмы, который, вообще говоря, предполагает переходы между различными моделями поглощения в зависимости от характерных масштабов неоднородности плотности. Рассмотренный в данном обзоре подход позволяет более чётко сформулировать границы применимости модели нелинейного плазменного резонанса, связанные как с предельной для гидродинамической модели величиной потока лазерного излучения, так и с максимально допустимой величиной градиента плотности плазмы.

Нелинейный эффект подавления амплитуды поля плазменного резонанса и нелинейного "отключения" резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивно-

сти, продемонстрированный в разделах 3.2 и 3.4, качественно согласуется с выводами работ на основе численного моделирования [39, 40]. Пока удаётся провести лишь качественное сравнение теории с упомянутыми численными расчётами, поскольку в работах по РИС-моделированию показано поведение максимума поглощения в зависимости от величины лазерного потока при оптимальном (по линейной теории) угле падения — а в рамках нашей теории значение величины поглощения в этой точке можно оценить, экстраполируя асимптотические решения для больших и малых углов падения (см. раздел 3.4). Однако и такая экстраполяция даёт хорошее согласие с численным моделированием. Например, в работе [39] при $L = 4\lambda$ и $I_0\lambda^2 = 10^{17}$ Вт см⁻² мкм² количество поглощаемой энергии падает с 50 % до 45 %, в то время как оценка по теории даёт $G \approx 0,4$. Кроме того, анализ асимптотического поведения коэффициента поглощения позволил сделать заключение об асимметричности влияния релятивистской нелинейности на угловую функцию коэффициента резонансного поглощения: при больших углах падения поглощение подавляется существенно, чем при малых. Такая асимметричность может означать, что рост интенсивности поля накачки приводит не только к уменьшению релятивистски-нелинейного резонансного поглощения в широком диапазоне углов падения, но и к смещению максимума поглощения в область меньших углов.

Исследование свойств квазистатического электрического поля плазменного резонанса E_{st} в разделе 3.5 показало, что форма пространственного распределения поля в релятивистской теории остаётся такой же, как предсказывают слабо [17] и сильно нелинейная нерелятивистская [14] теории: поле биполярно и меняет знак в точке плазменного резонанса. Вместе с тем релятивистская нелинейность заметно влияет на амплитуду E_{st} , понижая максимальное значение поля в сравнении с результатами нерелятивистской теории [14]. При лазерных потоках вплоть до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт см⁻² мкм² генерируемое в окрестности критической плотности неоднородной плазмы поле E_{st} не превышает величины в несколько МВ см⁻¹, что ограничивает максимальную энергию ускоренных в нём электронов на уровне нескольких десятков кэВ. Вследствие биполярности E_{st} эти электроны не покидают пространственной области плазменного резонанса и не вносят вклада в паразитный для ЛТС-экспериментов эффект предпрогрева мишени. Отметим, что полноценное количественное исследование динамических и энергетических свойств горячих электронов, генерируемых в окрестности критической плотности, требует последовательного описания не только в рамках механизма ускорения электростатическим полем в модели холодной плазмы, но и в режиме выноса плазменных волн с учётом теплового движения электронов плазмы, что находится вне рамок представленных исследований и требует отдельного рассмотрения.

Построенная в разделе 4 теория генерации гармоник лазерного излучения в неоднородной плазме с учётом релятивистски-нелинейных эффектов в окрестности критической плотности позволила исследовать спектральные характеристики излучения из плазменного резонанса в диапазоне лазерных интенсивностей до $I_0\lambda^2 = 10^{18}$ Вт см⁻² мкм². Продemonстрировано формирование спадающих по степенному закону энергетических спектров излучения из плазмы вблизи порога опроки-

дывания резонансно-усиленных плазменных колебаний. При этом генерация высших гармоник наиболее эффективна при градиентных масштабах плазмы порядка 10λ и в диапазоне интенсивностей лазерного излучения $I_0\lambda^2 = 5 \times 10^{17} - 10^{18}$ Вт см⁻² мкм². Результаты исследований [56, 57] находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов [54, 55], в которых были обнаружены медленно убывающие спектры гармоник из плазмы при небольших интенсивностях $I_0 \simeq 10^{15}$ Вт см⁻² излучения СО₂-лазера (см. раздел 4.2). Подчеркнем, что в контексте ЛТС для развитой теории представляют интерес эксперименты по режиму ударного зажигания ("shock ignition") [33, 178], поскольку для них характерны именно такие интенсивности лазерного излучения, при которых в окрестности критической плотности плазмы могут проявиться релятивистские эффекты. К сожалению, пока не существует целенаправленных экспериментов по регистрации высших гармоник применительно к такому высокоинтенсивному ЛТС-режиму. Представленное исследование могло бы стимулировать проведение соответствующих экспериментов.

Значительный прогресс в лазерных технологиях за последние 30 лет, во многом благодаря методу усиления чирпированного лазерного импульса [179], привёл к смещению исследовательского интереса в сторону процессов генерации высших гармоник в плазме релятивистски-интенсивными, короткими (фемтосекундными) лазерными импульсами. При взаимодействии таких импульсов с твердотельными мишенями образуется характеризующаяся крутыми градиентами плотности плазма, в ней формируются локальные неоднородности в распределении электронной плотности в виде тонких электронных сгустков [15]. В результате в плазме реализуются режимы генерации гармоник, отличные от режима эффективного плазменного резонанса. Например, широкое распространение получила модель релятивистского осциллирующего зеркала [102, 156], в которой взаимодействие электромагнитного излучения с локальными неоднородностями плазмы рассматривается как отражение от гармонически осциллирующего электронного зеркала с релятивистским изменением частоты и амплитуды отражённой волны. На основе указанного и подобных ему механизмов изучается генерация вторичного электромагнитного излучения из плазмы в дальнем ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах [15], генерация аттосекундных импульсов [160, 180, 181], а также предлагаются способы повышения частоты и увеличения интенсивности излучения [182–188], однако последовательных аналитических теорий в данном направлении всё ещё не существует. В этом плане представленное здесь исследование с теоретико-методологической точки зрения указывает возможный путь построения последовательной теории генерации гармоник релятивистски-сильного лазерного импульса, поскольку используемые нами достаточно универсальные подходы могут послужить основой для её развития.

Итак, представленная в настоящем обзоре теория позволяет количественно и качественно оценивать величину поглощения и эффективность генерации гармоник лазерного излучения при нелинейном плазменном резонансе в неоднородной плазме в зависимости от интенсивности лазерного света, угла его падения на плазму, характерного масштаба неоднородности плотности и температуры плазмы. Обозначенное в разделе 3.4 воз-

можное усовершенствование теории с учётом самосогласованной деформации профиля плотности плазмы или рассмотрение полученных аналитических выражений наряду с кодами, описывающими гидродинамику плазмы в условиях воздействия лазерной накачки, позволит корректировать приведённые здесь выводы о поведении коэффициента поглощения с ростом потока энергии лазерного излучения. Результаты теории могут найти применение в задачах диагностики лазерной плазмы, при планировании или интерпретации экспериментов по лазерному термоядерному синтезу, а также могут сыграть важную роль в сопровождении и направлении полномасштабного численного моделирования взаимодействия лазерных импульсов с твердотельными мишенями.

Благодарности. Авторы признательны С.Ю. Гуськову, Н.Н. Демченко, А.А. Андрееву, А.В. Киму, И.В. Тимофееву и А.А. Фролову за интерес к работе и полезные комментарии.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках соглашения № 075-15-2021-1361. В.Ф. Ковалев благодарен за частичную поддержку Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания по теме № 122041100137-4.

6. Приложения

А. Вычисление допускаемой группы

На примере уравнений для продольных компонент электрического поля и скорости электронов (2.6) приведём основные шаги отыскания допускаемой группы преобразований. Воспользуемся процедурой классического группового анализа Ли дифференциальных уравнений [96], но с тем отличием, что в список независимых переменных, наряду с t, x, v, P , включим также параметры a, β . Такой приём расширения числа переменных, вовлекаемых в групповое преобразование, является характерным для метода ренормгруппы. Координаты $\zeta^i, i = 1, \dots, 4$ и $\eta^j, j = 1, 2$ оператора (2.8) находятся из системы определяющих уравнений, являющихся критерием инвариантности системы (2.6) относительно искомой группы:

$$\begin{aligned} X_1 [\partial_t v + av \partial_x v - \gamma_0^{-3} P] \Big|_{(2.6)} &= 0, \\ X_1 [\partial_t P + av \partial_x P + \omega_0^2 v] \Big|_{(2.6)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Здесь X_1 — первое продолжение инфинитезимального оператора X искомой группы преобразований (2.8). Значок $|_{(2.6)}$ означает, что действие продолженного оператора X_1 рассматривается на многообразии, задаваемом уравнениями (2.6) и всеми их дифференциальными следствиями. Оператор X_1 связан с X формулой продолжения:

$$X_1 = X + \zeta_1^1 \partial_{\eta^1} + \zeta_2^1 \partial_{\eta^2} + \zeta_1^2 \partial_{\zeta^1} + \zeta_2^2 \partial_{\zeta^2}. \quad (\text{A.2})$$

Как и выше, мы используем обозначение частной производной $\partial_{x^i} \equiv \partial/\partial x^i$ по переменной x^i , поэтому символ ∂_{ζ^k} означает производную по производной $\partial u/\partial x^k$.

Дополнительные координаты ζ_k^j выражаются через ξ^i и η^j с помощью операторов полного дифференцирования D_k :

$$\zeta_k^j = D_k \eta^j - u_i^j D_k \xi^i, \quad D_k = \partial_{x^k} + u_k^i \partial_{u^i}, \quad (A.3)$$

$$u_i^j \equiv \partial_{x^i} u^j, \quad \{u^j\} = \{v, P\}, \quad \{\xi^i\} = \{t, x, a, \beta\}.$$

Индексы в (A.3) принимают следующие значения: $i = 1, \dots, 4, j = 1, 2, k = 1, 2$, по повторяющимся индексам производится суммирование. С учётом (2.6), (2.8) и (A.2), (A.3) система определяющих уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} a\eta^1 + avY\xi^1 - Y\xi^2 + v\xi^3 &= 0, \\ Y\eta^1 - z^{3/2}(PY\xi^1 + \eta^2) + \frac{3}{2}(1-z)Pz^{1/2} \left(\frac{\xi^4}{\beta} + 2\frac{\eta^1}{v} \right) &= 0, \\ Y(a\eta^2 + \xi^2\omega_0^2 + \xi^3P) = 0, \quad Y\xi^3 = 0, \quad Y\xi^4 = 0, \end{aligned} \quad (A.4)$$

где

$$Y \equiv \partial_t + av\partial_x + Pz^{3/2}\partial_v - \omega_0^2 v \partial_P, \quad z \equiv 1 - \beta v^2. \quad (A.5)$$

Опуская подробности решения уравнений (A.4), приведём найденные координаты оператора X :

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \xi_1(I_1, I_2, I_3) - \frac{\eta^2}{\omega_0^2 v} + \\ &+ \frac{\xi^4}{4\sqrt{2}\omega_0\beta} \int dz \frac{2 - 3/\sqrt{z} + 1/z^{3/2}}{(1-z)^{3/2} \sqrt{\beta I_1/2 - 1/\sqrt{z} + 1}}, \\ \xi^2 &= \xi_2(I_1, I_2, I_3) - \frac{a\eta^2}{\omega_0^2} - \frac{\xi^3 P}{\omega_0^2}, \quad (A.6) \\ \eta^1 &= \frac{z^{3/2}}{v} \left[\eta_1(I_1, I_2, I_3) - \frac{P}{\omega_0^2} \eta^2 - \frac{\xi^4}{2\beta^2} \left(2 - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{z^{3/2}} \right) \right], \\ \eta^2 &= \eta^2(t, x, v, P), \quad \xi^{3,4} = \xi^{3,4}(a, \beta, I_1, I_2, I_3). \end{aligned}$$

Здесь $\xi_{1,2}, \xi^{3,4}, \eta^2$ — произвольные функции своих аргументов, а I_1, I_2, I_3 — инварианты оператора Y , определяющиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) + \frac{P^2}{\omega_0^2}, \\ I_2 &= x + \frac{Pa}{\omega_0^2}, \quad (A.7) \\ I_3 &= t - \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \int \frac{dz}{z^{3/2} \sqrt{1-z} \sqrt{I_1 - (2\omega_0^2/\beta)(1/\sqrt{z} - 1)}}. \end{aligned}$$

Оператор (2.8) с найденными координатами (A.6) задаёт бесконечную группу точечных непрерывных преобразований в пространстве шести переменных t, x, v, P, a, β , которая служит искомой наиболее широкой группой, допускаемой уравнениями (2.6), необходимой в дальнейшем при построении ренормгруппы. Конкретизация координат $\xi^i, i = 1, \dots, 4$ и $\eta^j, j = 1, 2$ с помощью операции сужения [68] группы (2.8), (A.6) на частном решении определяет ренормгрупповые преобразования, позволяющие использовать результаты линейной теории при построении решения уравнений (2.6) в широкой области значений параметров нелинейности a и β .

Конечные преобразования по групповым параметрам a и β находятся обычным образом — решением соответствующих уравнений Ли.

Б. Амплитуда магнитного поля в вакууме на основной частоте

В условиях слабой неоднородности плазмы, $k_0 L \gg 1$, приближённое решение уравнения (3.7) можно записать через функции Эйри:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) &= \varepsilon_1 \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[- \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_0, \\ \Psi_1^+(x) &= \varepsilon_1 \left(- \frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{1/6} \text{Ai} \left[\left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_0, \\ \Psi_1^-(x) &= \varepsilon_1 \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[- \left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_-(x) \right)^{2/3} \right], \quad x < x_0, \\ \Psi_1^-(x) &= \varepsilon_1 \left(- \frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{1/6} \text{Bi} \left[\left(\frac{3\omega_0}{2c} \mathcal{L}_+(x) \right)^{2/3} \right], \quad x > x_0, \end{aligned} \quad (B.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{4\sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta}}, \quad \mathcal{L}_-(x) = \int_x^{x_0} d\tau \sqrt{\varepsilon_1 - \sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_+(x) &= \int_{x_0}^x d\tau \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Здесь x_0 — точка поворота, которая отвечает условию $\varepsilon_1(x_0) = c^2 k_y^2 / \omega_0^2$. Формулы (B.1), определяющие решение однородного уравнения (3.7) справа и слева от точки поворота, тем не менее, оказываются непригодными в окрестности плазменного резонанса $x = 0$, где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

Поскольку источник $f_1(\xi)$ локализован в окрестности плазменного резонанса, то при вычислении функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$ следует использовать формулы для Ψ_+ , Ψ_- при $x \approx 0$. Решение однородного линейного уравнения вблизи точки плазменного резонанса $x = 0$ при не слишком малых углах θ , таких что $\rho > 1$, выражается через функции Инфельда I_1 и Макдональда K_1 , что приводит к следующим формулам для функций Ψ_1^\pm справа и слева от точки $x = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) &= \frac{i\Delta - x}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\ &\times I_1((i\Delta - x)k_y), \quad x \lesssim 0; \\ \Psi_1^+(x) &= \frac{x - i\Delta}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\ &\times I_1((x - i\Delta)k_y), \quad x \gtrsim 0; \quad (B.2) \\ \Psi_1^-(x) &= \frac{\sqrt{2}(i\Delta - x)}{\pi L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\ &\times K_1((i\Delta - x)k_y), \quad x \lesssim 0; \\ \Psi_1^-(x) &= \frac{\sqrt{2}(x - i\Delta)}{\pi L} \left(\frac{\omega_0 L}{c} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\ &\times [K_1((x - i\Delta)k_y) + i\pi I_1((x - i\Delta)k_y)], \quad x \gtrsim 0. \end{aligned}$$

В пределе малых углов падения ($\rho \ll 1$) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) &= q^{-1/6} \left\{ \frac{1}{2} \text{Bi}(0) q^{4/3} \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \text{Bi}'(0) \left[1 + \frac{\rho}{2} q^{4/3} \eta^2 \left(\ln(q^{2/3} \eta) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} q^2 \eta^3 \right] \right\}, \quad x \lesssim 0; \\ \Psi_1^-(x) &= -q^{-1/6} \left\{ \frac{1}{2} \text{Ai}(0) q^{4/3} \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + \text{Bi}'(0) \left[1 + \frac{\rho}{2} q^{4/3} \eta^2 \left(\ln(q^{2/3} \eta) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} q^2 \eta^3 \right] \right\}, \quad x \lesssim 0; \\ \Psi_1^+(x) &= q^{1/6} \eta^{1/2} \left\{ \pi^2 \rho (\text{Bi}'(0))^2 \text{Ai} [q^{2/3} (\sin^2 \theta - \eta)] + \right. \end{aligned} \tag{Б.3}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + i [1 - i \pi^2 \rho \text{Ai}'(0) \text{Bi}'(0)] \text{Bi} [q^{2/3} (\sin^2 \theta - \eta)] \right\}, \quad x \geq 0; \\ \Psi_1^-(x) &= q^{1/6} \eta^{1/2} \left\{ -\pi^2 \rho (\text{Ai}'(0))^2 \text{Bi} [q^{2/3} (\sin^2 \theta - \eta)] + \right. \\ &\quad \left. + i [1 + i \pi^2 \rho \text{Ai}'(0) \text{Bi}'(0)] \text{Ai} [q^{2/3} (\sin^2 \theta - \eta)] \right\}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь штрих означает взятие первой производной и приняты обозначения: $q \equiv \omega_0 L / c$, $\eta \equiv (i\Delta - x) / L$. Несложные вычисления дают:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(x) \Psi_1^{-\prime}(x) - \Psi_1^{+\prime}(x) \Psi_1^-(x) \Big|_{x \geq 0} &= \\ = \begin{cases} -\frac{\omega_0}{\pi c} \frac{i\Delta - x}{L}, & \rho > 1, \\ \frac{\omega_0}{\pi c} \frac{i\Delta - x}{L}, & \rho \ll 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{Б.4}$$

Подставляя (Б.4) в (3.6), получаем

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) \pm \\ &\quad \pm \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(x) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(x)], \end{aligned} \tag{Б.5}$$

где знак "+" соответствует случаю $\rho > 1$, а знак "-" — случаю $\rho \ll 1$. Используя условие обращения магнитного поля $R_1(x)$ в нуль при $x \rightarrow \infty$, экспоненциальное затухание функций $\text{Ai}(x)$ и $\text{K}_1(x)$, а также экспоненциальный рост $\text{Bi}(x)$, найдём связь констант α_1^+ и α_1^- при $\rho > 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &= \frac{i}{2} \alpha_1^+ \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) \text{K}_1[(\xi - i\Delta)k_y], \end{aligned} \tag{Б.6}$$

и при $\rho \ll 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^+ &= \frac{\mathcal{D} - i\pi^2 \rho (\text{Ai}'(0))^2 \alpha_1^-}{1 - i\pi^2 \rho \text{Ai}'(0) \text{Bi}'(0)}, \quad \mathcal{D} \equiv \frac{\pi c L}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} \mathcal{M}(\xi) d\xi, \\ \mathcal{M}(\xi) &\equiv [1 - i\pi^2 \rho \text{Ai}'(0) \text{Bi}'(0)] \Psi_1^-(\xi) - i\pi^2 \rho (\text{Ai}'(0))^2 \Psi_1^+(\xi). \end{aligned} \tag{Б.7}$$

В области, где плотность плазмы обращается в нуль, т.е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле представляется в виде линейной комбинации падающей и отражённой плоских волн с коэффициентами \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- (3.8). Эти коэффициенты могут быть выражены через α_1^+ и α_1^- , если использовать в (Б.5) формулы (Б.2) и перейти к пределу

$x \rightarrow -\infty$ с учётом асимптотических выражений для функций Эйри. В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^+ &= (i\alpha_1^+ + \alpha_1^-) \frac{\exp(-i\mathcal{Z})}{2\sqrt{\pi|\cos\theta|}}, \\ \tilde{C}_1^- &= (\alpha_1^- - i\alpha_1^+) \frac{\exp(i\mathcal{Z})}{2\sqrt{\pi|\cos\theta|}}, \end{aligned} \tag{Б.8}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty).$$

Для получения связи отражённой амплитуды \tilde{C}_1^- с падающей \tilde{C}_1^+ исключим из (Б.8) коэффициенты α_1^+ и α_1^- с учётом (Б.6) и (Б.7) и, принимая во внимание локализацию источника в области $(\xi - i\Delta)k_y \ll 1$, подставим подынтегральные функции $\text{K}_1(\xi)$ и $\mathcal{M}(\xi)$ при малых значениях аргумента. Находим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^- &= -i \exp \left[2i \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty) \right] \times \\ &\quad \times \frac{1 - (1/2) \exp \left[(2\omega_0/c) \mathcal{L}_+(0) \right]}{1 + (1/2) \exp \left[(2\omega_0/c) \mathcal{L}_+(0) \right]} \tilde{C}_1^+ - \\ &\quad - \frac{i \exp \left[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z} \right]}{1 + (1/2) \exp \left[(2\omega_0/c) \mathcal{L}_+(0) \right]} \times \\ &\quad \times \left(\frac{cL}{2\pi\omega_0 |\cos\theta| k_y^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}, \quad \rho > 1, \\ \tilde{C}_1^- &= \frac{1 - \pi^2 \rho \text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) + i \text{Bi}'(0)]}{1 + \pi^2 \rho \text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) - i \text{Bi}'(0)]} \exp(2i\mathcal{Z}) \tilde{C}_1^+ - \\ &\quad - \frac{i \exp(i\mathcal{Z}) \mathcal{D}}{(\pi|\cos\theta|)^{1/2} (1 + \pi^2 \rho \text{Ai}'(0) [\text{Ai}'(0) - i \text{Bi}'(0)])}, \quad \rho \ll 1. \end{aligned} \tag{Б.9}$$

Далее, учитывая обращение в нуль полей $P(x, t)$, $Q(x, t)$ и скоростей $v(x, t)$, $u(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$, упростим интеграл от источника $f_1(x)$ в (Б.9) интегрированием по частям, и, как следствие, исключением из подынтегрального выражения функций поперечных компонент электрического поля u и скорости электронов Q :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f_1(x)}{x - i\Delta} = \frac{i\Delta \omega_0^3 k_y}{2\pi c a} \exp[-i\pi + i \arg B_1(0)] \mathcal{I}, \tag{Б.10}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 \exp[i\tau(\chi, l)]}{x_0 - i} [\partial_\chi \tau \partial_l (P_0 - i\gamma_0 v_1) - \\ &\quad - \partial_{l\tau} \partial_\chi (P_0 - i\gamma_0 v_1) - (\partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_{l\tau} \partial_\chi x_0)(\gamma_0 - 1)], \\ P_0 &= -\frac{A}{1 + l^2} (l \cos \chi + \sin \chi), \quad v_0 = -\frac{A}{1 + l^2} (l \sin \chi - \cos \chi), \\ \gamma_0 &= 1 + \frac{B^2 v_0^2}{2}, \quad x_0 = l - P_0, \quad v_1 = v_0 \frac{(1 + (1/4)B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + (1/2)B^2 v_0^2}, \\ \tau(\chi, l) &= \chi - \left(\zeta \text{E}(\varphi, k) - \frac{2}{\zeta} \text{F}(\varphi, k) - \varphi \right), \end{aligned} \tag{Б.11}$$

$$\zeta = \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}}.$$

Используя (Б.10) и переходя от амплитуд, характеризующих нормированные функции R , к амплитудам, которые соответствуют истинному магнитному полю B_z , находим выражения для амплитуд первой гармоники отражённого магнитного поля в вакууме (3.9) и (3.11).

В. Аналитическая оценка интеграла \mathcal{I}

Найдём приближённо интеграл (Б.11) для значений безразмерной амплитуды A , при которых можно считать, что $A^2 \ll 1$. Поскольку в релятивистском режиме параметр B , отвечающий за релятивистскую нелинейность, при температурах $T \simeq 1$ кэВ принимает значения $B \simeq 1$, а безразмерная амплитуда $A \simeq 0,5$, то разложим подынтегральные функции в (Б.11) в ряд по параметру $(AB)^2$. Отличим τ от χ при этом можно пренебречь. Итак,

$$\mathcal{I} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 \exp(i\chi)}{x_0 - i} [\partial_l(P_0 - i\gamma_0 v_0) - \partial_l x_0(\gamma_0 - 1)]. \tag{B.1}$$

Выражая скорость v_1 через v_0 , x_0 через P_0 и разлагая функцию v_1 в ряд по параметру $(AB)^2$ с точностью до первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \approx & \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 \exp(i\chi)}{x_0 - i} \times \\ & \times \left[\partial_l(P_0 - iv_0) - \frac{B^2 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \partial_l P_0 \right) \right] = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\mathcal{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 \exp(i\chi)}{x_0 - i} \partial_l(P_0 - iv_0), \tag{B.3}$$

которое не зависит от B и соответствует учёту нерелятивистской нелинейности, т.е. $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}|_{c=\infty}$. Замечая, что подынтегральная функция имеет особенность $(x_0 - i)^{-1}$, вычислим \mathcal{I}_0 по теории вычетов, заменив интегрирование по χ интегрированием по окружности единичного радиуса. Переход к переменной $z = \exp(i\chi)$ даёт

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{A(1 - \alpha z^2)}{2z(1 + i l)}, \quad P_0 = -\frac{A(1 + \alpha z^2)}{2z(l - i)}, \\ x_0 - i &= \frac{A(z - z_1)(z - z_2)}{2z(l + i)}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

где

$$z_{1,2} = -\frac{1 + l^2}{A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha(1 + l^2)^2}} \right), \quad \alpha = \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{l - i}{l + i}, \tag{B.5}$$

$$|z_1| > 1, \quad |z_2| < 1.$$

Тогда интеграл по времени χ сводится к интегралу по кругу $|z| = 1$, который определяется вычетами в точках $z = z_2, z = 0$ и оказывается равен нулю:

$$\int_{|z|=1} dz \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \sum_{z=z_2, 0} \text{res} \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 0. \tag{B.6}$$

Таким образом, нерелятивистское слагаемое \mathcal{I}_0 не даёт вклада в \mathcal{I} . Слагаемое \mathcal{I}_1 после замены $z = \exp(i\chi)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= -\frac{B^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0^3 \exp(i\chi)}{x_0 - i} = \\ &= -\frac{B^2 A^2}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l + i}{(1 + i l)^3} \int_{|z|=1} dz \frac{1 - 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z^4 - \alpha^3 z^6}{z^2(z - z_1)(z - z_2)}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Интеграл по кругу определяется суммой вычетов подынтегральной функции $f(z)$ в точках $z = z_2, z = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} dz f(z) &= 2\pi i \sum_{z=z_2, 0} \text{res} \frac{1 - 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z^4 - \alpha^3 z^6}{z^2(z - z_1)(z - z_2)} = \\ &= 2\pi i \frac{3z_1 - z_2}{z_1^3 z_2} \approx \frac{6i\pi}{z_1^2 z_2}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Последнее приближённое равенство справедливо, поскольку $|z_1| \gg |z_2|$. Переходя в (Б.5) для $z_{1,2}$ к пределу при $A^2 \ll 1$ и вычисляя интеграл по пространству вновь по теории вычетов, получим

$$\begin{aligned} z_2 &\approx -\frac{A}{2\alpha(1 + l^2)}, \\ \mathcal{I}_1 &\approx \frac{3i\pi A^3 B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l^2 + 2il - 1}{(1 + l^2)^3} = -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Вклад \mathcal{I}_2 находится аналогичным образом и равен

$$\mathcal{I}_2 = \frac{B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{\exp(i\chi) v_0^3 \partial_l P_0}{x_0 - i} \approx -\frac{15i\pi^2 B^2 A^5}{4096}. \tag{B.10}$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$, запишем окончательное приближённое значение интеграла \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} \approx -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \tag{B.11}$$

Список литературы

1. Денисов Н Г *ЖЭТФ* **31** 609 (1956); Denisov N G *Sov. Phys. JETP* **4** 544 (1957)
2. Гершман Б Н, Гинзбург В Л, Денисов Н Г *УФН* **61** 561 (1957)
3. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Oxford: Pergamon Press, 1964)
4. Силин В П *УФН* **145** 225 (1985); Silin V P *Sov. Phys. Usp.* **28** 136 (1985)
5. Арцимович Л А, Сагдеев Р З *Физика плазмы для физиков* (М.: Атомиздат, 1979)
6. Forslund D W et al. *Phys. Rev. A* **11** 679 (1975)
7. Pert G J *Plasma Phys.* **20** 175 (1978)
8. Ерохин Н С, Захаров В Е, Моисеев С С *ЖЭТФ* **56** 179 (1969); Erokhin N S, Zakharov V E, Moiseev S S *Sov. Phys. JETP* **29** 101 (1969)
9. Виноградов А В, Пустовалов В В *ЖЭТФ* **63** 940 (1972); Vinogradov A V, Pustovalov V V *Sov. Phys. JETP* **36** 492 (1973)
10. Erokhin N S, Moiseev S S, Mukhin V V *Nucl. Fusion* **14** 333 (1974)
11. Владимирский А Б, Силин В П *Физика плазмы* **6** 354 (1980); Vladimirskii A B, Silin V P *Sov. J. Plasma Phys.* **6** 196 (1980)
12. Басов Н Г и др. *Квантовая электроника* **6** 1829 (1979); Basov N G et al. *Sov. J. Quantum Electron.* **9** 1081 (1979)

13. Троценко Н П "Сильно нелинейная теория плазмы без столкновений на основе нелинейных диэлектрических проницаемостей", Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: МФТИ, 1983)
14. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *ТМФ* **81** 69 (1989); Kovalev V F, Pustovalov V V *Theor. Math. Phys.* **81** 1060 (1989)
15. Teubner U, Gibbon P *Rev. Mod. Phys.* **81** 445 (2009)
16. Sandhu A S et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 025005 (2005)
17. Абдуллаев А Ш и др. "Генерация статических электрических полей при воздействии на плазму мощного электромагнитного излучения", Препринт № 8 (М.: ФИАН СССР, 1986)
18. Albritton J, Koch P *Phys. Fluids* **18** 1136 (1975)
19. DeNeef P *Phys. Rev. Lett.* **39** 997 (1977)
20. Forslund D W, Kindel J M, Lee K *Phys. Rev. Lett.* **39** 284 (1977)
21. Буланов С В, Коврижных Л М, Сахаров А С *ЖЭТФ* **72** 1873 (1977); Bulanov S V, Kovrizhnykh L M, Sakharov A S *Sov. Phys. JETP* **45** 1809 (1977)
22. Lee A Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **48** 319 (1982)
23. Gibbon P *Phys. Rev. Lett.* **73** 664 (1994)
24. Gibbon P, Förster E *Plasma Phys. Control. Fusion* **38** 769 (1996)
25. Гуськов С Ю и др. *Квантовая электроника* **41** 886 (2011); Gus'kov S Yu et al. *Quantum Electron.* **41** 886 (2011)
26. Colaitis A et al. *Phys. Rev. E* **94** 041101 (2015)
27. Басов Н Г, Крохин О Н *ЖЭТФ* **46** 171 (1964); Basov N G, Krokhin O N *Sov. Phys. JETP* **19** 123 (1964)
28. Dawson J M *Phys. Fluids* **7** 981 (1964)
29. Max C E "Physics of the coronal plasma in laser fusion targets", in *Les Houches, Summer School on Laser-Plasma Interaction, Session XXXIV, 1980* (Eds R Balian, J C Adam) (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1982) p. 301
30. Tabak M et al. *Phys. Plasmas* **1** 1626 (1994)
31. Craxton R S et al. *Phys. Plasmas* **22** 110501 (2015)
32. Бельков С А и др. *ЖЭТФ* **148** 784 (2015); Bel'kov S A et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **121** 686 (2015)
33. Colaitis A et al. *Phys. Plasmas* **23** 072703 (2016)
34. Rosenberg M J et al. *Phys. Rev. Lett.* **120** 055001 (2018)
35. Демченко Н Н *ЖЭТФ* **157** 120 (2020); Demchenko N N *J. Exp. Theor. Phys.* **130** 945 (2020)
36. Pisarczyk T *Plasma Phys. Control. Fusion* **62** 115020 (2020)
37. Speziale T, Catto P J *Phys. Fluids* **20** 990 (1977)
38. Cai H et al. *Phys. Plasmas* **13** 094504 (2006)
39. Xu H et al. *Phys. Plasmas* **13** 123301 (2006)
40. Ding W-J et al. *Phys. Plasmas* **16** 042315 (2009)
41. Rajouria S K, Magesh Kumar K K, Tripathi V K *Phys. Plasmas* **20** 083112 (2013)
42. Метельский И И, Ковалев В Ф, Быченков В Ю *Краткие сообщения по физике ФИАН* **42** (12) 68 (2015); Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Bull. Lebedev Phys. Inst.* **43** 16 (2016)
43. Метельский И И, Ковалёв В Ф, Быченков В Ю *Физика плазмы* **43** 169 (2017); Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Plasma Phys. Rep.* **43** 175 (2017)
44. Метельский И И "Релятивистски-нелинейное резонансное поглощение и генерация высших гармоник интенсивного лазерного излучения в неоднородной плазме", Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: ФИАН, 2022)
45. Метельский И И, Ковалев В Ф, Быченков В Ю *ЖЭТФ* **160** 283 (2021); Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *J. Exp. Theor. Phys.* **133** 236 (2021)
46. Метельский И И *Краткие сообщения по физике ФИАН* (12) 49 (2021); Metelskii I I *Bull. Lebedev Phys. Inst.* **48** 400 (2021)
47. Mendel C W (Jr.), Olsen J N *Phys. Rev. Lett.* **34** 859 (1975)
48. Donaldson T P, Lädach P, Wägli P *Phys. Lett. A* **70** 419 (1979)
49. Yabe T et al. *Jpn. J. Appl. Phys.* **20** L141 (1981)
50. Estabrook K, Krueer W L *Phys. Rev. Lett.* **40** 42 (1978)
51. Adam J C, Heron A *Phys. Fluids* **31** 2602 (1988)
52. Tarasevitch A et al. *Phys. Rev. A* **62** 023816 (2000)
53. Veisz L et al. *Phys. Plasmas* **11** 3311 (2004)
54. Burnett N H et al. *Appl. Phys. Lett.* **31** 172 (1977)
55. Carman R L, Rhodes C K, Benjamin R F *Phys. Rev. A* **24** 2649 (1981)
56. Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Phys. Plasmas* **26** 113113 (2019)
57. Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *J. Russ. Laser Res.* **40** 429 (2019)
58. Аскарьян Г А *ЖЭТФ* **42** 1568 (1962); Askar'yan G A *Sov. Phys. JETP* **15** 1088 (1962)
59. Гинзбург В Л, Гуревич А В *УФН* **70** 393 (1960); Ginzburg V L, Gurevich A V *Sov. Phys. Usp.* **3** 175 (1960)
60. Аскарьян Г А *УФН* **111** 249 (1973); Askar'yan G A *Sov. Phys. Usp.* **16** 680 (1974)
61. Гуревич А В, Шварцбург А Б *Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере* (М.: Наука, 1973)
62. Гуревич А В *УФН* **120** 319 (1976); Gurevich A V *Sov. Phys. Usp.* **19** 869 (1976)
63. Гуревич А В *УФН* **177** 1145 (2007); Gurevich A V *Phys. Usp.* **50** 1091 (2007)
64. Estabrook K G, Valeo E J, Krueer W L *Phys. Fluids* **18** 1151 (1975)
65. Wilks S C *Phys. Fluids B* **5** 2603 (1993)
66. Gibbon P, Andreev A A, Platonov K Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **54** 045001 (2012)
67. Ahedo E, Sanmartin J R *Plasma Phys. Control. Fusion* **29** 419 (1987)
68. Ковалев В Ф, Ширков Д В *УФН* **178** 849 (2008); Kovalev V F, Shirkov D V *Phys. Usp.* **51** 815 (2008)
69. Shirkov D V, in *Renormalization Group'91, Second Intern. Conf., 3-6 September 1991, Dubna, USSR* (Eds D V Shirkov, V B Priezzhev) (Singapore: World Scientific, 1992) p. 1
70. Kovalev V F, Krivenko S V, Pustovalov V V, in *Renormalization Group'91, Second Intern. Conf., 3-6 September 1991, Dubna, USSR* (Eds D V Shirkov, V B Priezzhev) (Singapore: World Scientific, 1992) p. 300
71. Ширков Д В *ДАН СССР* **263** 64 (1982); Shirkov D V *Sov. Phys. Dokl.* **27** 197 (1982)
72. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *ДАН СССР* **103** 391 (1955)
73. Bogoliubov N N, Shirkov D V "Charge renormalization group in quantum field theory" *Nuovo Cimento* **3** 845 (1956)
74. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *ЖЭТФ* **30** 77 (1956); Bogoliubov N N, Shirkov D V *Sov. Phys. JETP* **3** 57 (1956)
75. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1984); Пер. на англ. яз.: Bogoliubov N N, Shirkov D V *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: John Wiley and Sons, 1980)
76. Metelskii I I, Kovalev V F, Bychenkov V Yu *J. Phys. Conf. Ser.* **769** 012083 (2016)
77. Жекулин Л А *ЖЭТФ* **4** 76 (1934)
78. Жекулин Л А *Изв. АН СССР* **4** 409 (1940)
79. Альперт Я Л, Гинзбург В Л, Фейнберг Е Л *Распространение радиоволн* (М.: ГИИТЛ, 1953)
80. Försterling K *Arch. Elektr. Übertr.* **3** 115 (1949)
81. Försterling K, Wüster H-O *J. Atmos. Terr. Phys.* **2** 22 (1951)
82. Голант В Е, Пилия А Д *УФН* **104** 413 (1971); Golant V E, Piliya A D *Sov. Phys. Usp.* **14** 413 (1972)
83. Васьков В В, Гуревич А В *ЖЭТФ* **69** 176 (1975); Vas'kov V V, Gurevich A V *Sov. Phys. JETP* **42** 91 (1975)
84. Гуревич А В *УФН* **117** 184 (1975); Gurevich A V *Sov. Phys. Usp.* **18** 746 (1975)
85. Гуревич А В и др. *УФН* **170** 1181 (2000); Gurevich A V et al. *Phys. Usp.* **43** 1103 (2000)
86. Ахиезер А И, Любарский Г Я *ДАН СССР* **80** 193 (1951)
87. Ахиезер А И, Половин Р В *ЖЭТФ* **30** 915 (1956); Akhiezer A I, Polovin R V *Sov. Phys. JETP* **3** 696 (1956)
88. Dawson J M *Phys. Rev.* **113** 383 (1959)
89. Coffey T P *Phys. Fluids* **14** 1402 (1971)
90. Krueer W L *Phys. Fluids* **22** 1111 (1979)
91. Милотин С В, Фролов А А, Чижонков Е В *Вычислительные методы и программирование* **14** 295 (2013)
92. Фролов А А, Чижонков Е В *Вычислительные методы и программирование* **15** 537 (2014)
93. Drake J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **36** 196 (1976)
94. Цинцадзе Н Л *ЖЭТФ* **59** 1251 (1971); Tsintsadze N L *Sov. Phys. JETP* **32** 684 (1971)
95. Bulanov S V, Naumova N M, Pegoraro F *Phys. Plasmas* **1** 745 (1994)
96. Овсянников Л В *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978); Пер. на англ. яз.: Ovsiannikov L V *Group Analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press, 1982)

97. Ибрагимов Н Х *Группы преобразований в математической физике* (М.: Наука, 1983); Пер. на англ. яз.: Ibragimov N H *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics* (Berlin: Springer, 1984)
98. Журавский А М *Справочник по эллиптическим функциям* (М.: Изд-во АН СССР, 1941)
99. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (М.: Наука, 1981); Пер. на англ. яз.: Prudnikov A P, Brychkov Yu A, Marichev O I *Integrals and Series* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1986)
100. Гуревич А В, Зыбин К П *УФН* **165** 723 (1995); Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Usp.* **38** 687 (1995)
101. Appell P *Traité de Mécanique Rationnelle* Т. 1 (Paris: Gauthier-Villars, 1941); Пер. на русск. яз.: Аппель П *Теоретическая механика* Т. 1 (М.: Физматлит, 1960)
102. Буланов С В и др. *УФН* **183** 449 (2013); Bulanov S V et al. *Phys. Usp.* **56** 429 (2013)
103. Давыдова Т А *Физика плазмы* **7** 291 (1981)
104. Каплан А Е *ЖЭТФ* **72** 1710 (1977); Kaplan A E *Sov. Phys. JETP* **45** 896 (1977)
105. Brantov A V et al. *Phys. Plasmas* **10** 3385 (2003)
106. Hirsch P, Shmoys J J. *Res. Natl. Bur. Stand. D* **69** 521 (1965)
107. Hirsch P *Radio Sci.* **2** 407 (1967)
108. Пилия А Д *ЖТФ* **36** 818 (1966); Piliya A D *Sov. Tech. Phys.* **11** 609 (1966)
109. Омельченко А Я, Степанов К Н *Укр. физический журн.* **12** 1445 (1967)
110. Tang T *Radio Sci.* **5** 111 (1970)
111. Омельченко А Я, Папченко В И, Степанов К Н *Изв. вузов. Радиофизика* **14** 1484 (1971); Omel'chenko A Ya, Panchenko V I, Stepanov K N *Radiophys. Quantum Electron.* **14** 1166 (1971)
112. Kelly D L, Banos A (Jr.), UCLA Plasma Physics Group Report No. PPG-170 (1974)
113. Budden K G *Radio Waves in the Ionosphere* (Cambridge: Univ. Press, 1961)
114. Hinkel-Lipsker D E, Fried B D, Morales G J *Phys. Rev. Lett.* **62** 2680 (1989)
115. Hinkel-Lipsker D E, Fried B D, Morales G J *Phys. Rev. Lett.* **66** 1862 (1991)
116. Hinkel-Lipsker D E, Fried B D, Morales G J *Phys. Fluids B* **4** 1772 (1992)
117. Hinkel-Lipsker D E, Fried B D, Morales G J *Phys. Fluids B* **5** 1746 (1993)
118. Гильденбург В Б *ЖЭТФ* **46** 2156 (1964); Gil'denburg V B *Sov. Phys. JETP* **19** 1456 (1964)
119. Жаров А А, Кондратьев И Г, Миллер М А *Письма в ЖЭТФ* **25** 355 (1977); Zharov A A, Kondrat'ev I G, Miller M A *JETP Lett.* **25** 330 (1977)
120. Гильденбург В Б и др. *Физика плазмы* **7** 732 (1981); Gil'denburg V B et al. *Sov. J. Plasma Phys.* **7** 399 (1981)
121. Алиев Ю М и др. *Письма в ЖЭТФ* **42** 437 (1985); Aliev Yu M et al. *JETP Lett.* **42** 539 (1985)
122. WOLFRAM. Wolfram Language and System. Doc. Center. Integrate, <https://reference.wolfram.com/language/ref/Integrate.html>
123. Гильденбург В Б, Кондратьев И Г, Марков Г А *Изв. вузов. Радиофизика* **12** 655 (1969); Gil'denburg V B, Kondrat'ev I G, Markov G A *Radiophys. Quantum Electron.* **12** 522 (1969)
124. Гильденбург В Б, Фрайман Г М *ЖЭТФ* **69** 1601 (1975); Gil'denburg V B, Fraiman G M *Sov. Phys. JETP* **42** 816 (1975)
125. Галеев А А и др. *Письма в ЖЭТФ* **21** 539 (1975); Galeev A A et al. *JETP Lett.* **21** 251 (1975)
126. Ghen H-H, Liu O-S *Phys. Rev. Lett.* **39** 1147 (1977)
127. Shukla P K, Spatschek K H *J. Plasma Phys.* **19** 387 (1978)
128. Гильденбург В Б, Литвак А Г, Фрайман Г М *Письма в ЖЭТФ* **28** 433 (1978); Gil'denburg V B, Litvak A G, Fraiman G M *JETP Lett.* **28** 401 (1978)
129. Демченко Н Н, Розанов В Б, Тагвиашвили М Н *Квантовая электроника* **16** 546 (1989); Demchenko N N, Rozanov V B, Tagviashvili M N *Sov. J. Quantum Electron.* **19** 361 (1989)
130. Tikhonchuk V T et al. *Matter Radiat. Extremes* **6** 025902 (2021)
131. Caruso A et al. *Phys. Lett. A* **33** 29 (1970)
132. Decroisette M, Meyer B, Piar G J. *Phys. Colloq.* **32** C56-119 (1971)
133. Рупасов А А, Цапенко В П, Шиканов А С, Препринт № 94 (М.: ФИАН СССР, 1972)
134. Виноградов А В, Пустовалов В В *ЖЭТФ* **63** 940 (1973); Vinogradov A V, Pustovalov V V *Sov. Phys. JETP* **36** 492 (1973)
135. Пустовалов В В и др., в сб. *II Международная конф. по теории плазмы, Киев, 28 октября – 1 ноября 1974 г.* (Киев: Ин-т теоретической физики АН УССР, 1974) Доклад
136. Saleres A, Decroisette M, Patou C *Opt. Commun.* **13** 321 (1975)
137. Горохов А А и др. *Письма в ЖЭТФ* **21** 111 (1975); Gorokhov A A et al. *JETP Lett.* **21** 49 (1975)
138. Крохин О Н и др. *Письма в ЖЭТФ* **22** 47 (1975); Krokhin O N et al. *JETP Lett.* **22** 21 (1975)
139. Fabre E et al. *Opt. Commun.* **18** 218 (1976)
140. Быченков В Ю, Силин В П, Тихончук В Т *Физика плазмы* **3** 1314 (1977); Bychenkov V Yu, Silin V P, Tikhonchuk V T *Sov. J. Plasma Phys.* **3** 730 (1977)
141. Baldis H A, Pépin H, Grek B *Appl. Phys. Lett.* **27** 291 (1975)
142. McLean E A et al. *Appl. Phys. Lett.* **31** 825 (1977)
143. Carman R L, Forslund D W, Kindel J M *Phys. Rev. Lett.* **46** 29 (1981)
144. Bezzerides B, Jones R D, Forslund D W *Phys. Rev. Lett.* **49** 202 (1982)
145. Исиченко М Б, Яньков В В *Письма в ЖЭТФ* **37** 297 (1983); Isichenko M B, Yan'kov V V *JETP Lett.* **37** 351 (1983)
146. Исиченко М Б, Яньков В В *ЖЭТФ* **87** 1914 (1984); Isichenko M B, Yan'kov V V *Sov. Phys. JETP* **60** 1101 (1984)
147. Ковалев В Ф, Пустовалов В В "Генерация гармоник горячей лазерной плазмой при укручении профиля возбуждаемой ленгмюровской волны", Препринт № 56 (М.: ФИАН СССР, 1988)
148. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Квантовая электроника* **15** 726 (1988); Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Quantum Electron.* **18** 463 (1988)
149. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Краткие сообщения по физике ФИАН* (3) 41 (1989)
150. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Физика плазмы* **15** 47 (1989); Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Plasma Phys.* **15** 27 (1989)
151. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Физика плазмы* **15** 563 (1989); Kovalev V F, Pustovalov V V *Sov. J. Plasma Phys.* **15** 327 (1989)
152. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Квантовая электроника* **16** 2261 (1989); Kovalev V F, Pustovalov V V *Quantum Electron.* **19** 1454 (1989)
153. Ковалев В Ф, Пустовалов В В *Краткие сообщения по физике ФИАН* (2) 29 (1991)
154. Bastiani S et al. *Phys. Rev. E* **56** 7179 (1997)
155. Schlegel Th et al. *Phys. Rev. E* **60** 2209 (1999)
156. Буланов С В и др. *Краткие сообщения по физике ФИАН* (6) 11 (1991)
157. Bulanov S V, Esirkepov T, Tajima T *Phys. Rev. Lett.* **91** 085001 (2003)
158. Bulanov S V, Naumova N M, Pegoraro F *Phys. Plasmas* **1** 745 (1994)
159. Baeva T, Gordienko S, Pukhov A *Phys. Rev. E* **74** 065401 (2006)
160. Pirozhkov A S et al. *Phys. Plasmas* **13** 013107 (2006)
161. Lichters R, Meyer-ter-Vehn J, Pukhov A *Phys. Plasmas* **3** 3425 (1996)
162. Norrey P A et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 1832 (1996)
163. Tarasevitch A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 103902 (2007)
164. Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Tikhonchuk V T *Phys. Rev. A* **61** 033809 (2000)
165. Ковалев В Ф, Попов К И, Быченков В Ю *ЖЭТФ* **141** 31 (2012); Kovalev V F, Popov K I, Bychenkov V Yu *J. Exp. Theor. Phys.* **114** 25 (2012)
166. Ковалев В Ф, Быченков В Ю *Письма в ЖЭТФ* **107** 484 (2018); Kovalev V F, Bychenkov V Yu *JETP Lett.* **107** 458 (2018)
167. Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Phys. Rev. E* **99** 043201 (2019)
168. Быченков В Ю, Ковалев В Ф *Изв. вузов. Радиофизика* **63** 825 (2020); Bychenkov V Yu, Kovalev V F *Radiophys. Quantum Electron.* **63** 742 (2021)
169. Ibragimov N H et al. *Int. J. Non-Linear Mech.* **71** 1 (2015)
170. Ковалев В Ф, Быченков В Ю, Тихончук В Т *Письма в ЖЭТФ* **74** 12 (2001); Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Tikhonchuk V T *JETP Lett.* **74** 10 (2001)

171. Ковалев В Ф, Быченков В Ю, Тихончук В Т *ЖЭТФ* **122** 264 (2002); Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Tikhonchuk V T *J. Exp. Theor. Phys.* **95** 226 (2002)
172. Kovalev V F, Bychenkov V Yu *Phys. Rev. Lett.* **90** 185004 (2003)
173. Быченков В Ю и др. *УФН* **185** 77 (2015); Bychenkov V Yu et al. *Phys. Usp.* **58** 71 (2015)
174. Ковалев В Ф, Быченков В Ю, Бочкарев С Г *Квантовая электроника* **47** 1023 (2017); Kovalev V F, Bychenkov V Yu, Bochkarev S G *Quantum Electron.* **47** 1023 (2017)
175. Bochkarev S G et al. *Sci. Rep.* **8** 9404 (2018)
176. Ковалев В Ф, Быченков В Ю *ЖЭТФ* **148** 5 (2015); Kovalev V F, Bychenkov V Yu *J. Exp. Theor. Phys.* **121** 1 (2015)
177. Stephens C R *Int. J. Mod. Phys. B* **12** 1379 (1998)
178. Tentori A et al. *Phys. Plasmas* **28** 103302 (2021)
179. Strickland D, Mourou G *Opt. Commun.* **56** 219 (1985)
180. Naumova N M et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 063902 (2004)
181. Bulanov S S et al. *Phys. Rev. E* **73** 049904 (2006)
182. Bulanov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 085001 (2003)
183. Kulagin V V et al. *Phys. Plasmas* **14** 113101 (2007)
184. Meyer-ter-Vehn J, Wu H-C *Eur. Phys. J. D* **55** 433 (2009)
185. Bulanov S S et al. *Phys. Lett. A* **374** 476 (2010)
186. Bulanov S S et al. *Phys. Plasmas* **19** 020702 (2012)
187. Esirkepov T Zh et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 025002 (2009)
188. Mourou G, Tajima T *Science* **331** 41 (2011)

Relativistic-nonlinear resonant absorption and generation of harmonics of electromagnetic radiation in an inhomogeneous plasma

I.I. Metelskii^(1,2,a), V.F. Kovalev^(2,3,b), V.Yu. Bychenkov^(1,2,c)

⁽¹⁾ *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

⁽²⁾ *Dukhov Research Institute of Automatics, ul. Sushchevskaya 22, 127030 Moscow, Russian Federation*

⁽³⁾ *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Miusskaya pl. 4, 125047 Moscow, Russian Federation*

E-mail: ^(a) metelski@lebedev.ru, ^(b) vfkvfkv@gmail.com, ^(c) bychenkovvy@lebedev.ru

Since the pioneering work of V.L. Ginzburg and N.G. Denisov, who discovered the effect of linear absorption of electromagnetic radiation in an inhomogeneous plasma due to strong plasma resonance at near-critical densities, the theory of this phenomenon has not been developed steadily in application to strong electromagnetic fields of practical interest today, primarily laser ones. This review is devoted to a systematic presentation of the results of an analytic relativistic-nonlinear theory of resonant absorption and generation of laser radiation harmonics in an inhomogeneous plasma with a strongly manifested plasma electron nonlinearity up to laser light intensities that make the motion of electrons in the vicinity of the critical density relativistic. Using the methods of the modern theory of transformation groups, we describe the structure of the nonlinear electromagnetic field in a plasma resonance, nonlinear effects of the suppression of the resonant absorption coefficient and the angle shift of the resonance absorption curve with increasing laser intensity, the formation of sufficiently smooth spectra of laser light harmonics, decreasing in accordance with a power law, the spectrum of laser light harmonics emitted by plasma near the breaking threshold of a nonlinear plasma field, and the basic properties of the electrostatic field generated in the vicinity of the critical density.

Keywords: laser plasma, resonant absorption, harmonic generation, nonlinear plasma oscillations, relativistic effects, plasma hydrodynamics, renormalization group symmetries

PACS numbers: 42.65.Ky, 52.25.Os, **52.30.-q**, **52.35.-g**, 52.35.Fp, 52.35.Hr, **52.38.-r**, 52.40.Db, 52.50.Jm, **52.57.-z**

Bibliography — 188 references

Received 3 May 2023, revised 14 June 2023

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (5) 457–494 (2024)

Physics – Uspekhi **67** (5) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.06.039410>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2023.06.039410>