Февраль 2004 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 174, № 2*

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Непертурбативная КХД и суперсимметричная КХД

В.А. Новиков

В обзоре обсуждаются непертурбативные явления в квантовой хромодинамике (КХД), в частности конфайнмент. Показано, как эти проблемы разрешаются на примере точного решения $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории Янга–Миллса. Обсуждаются возможные перспективы применения идей дуальности в КХД.

PACS numbers: 12.38.Aw, 12.38.Lg, 12.60.Jv

Содержание

1. **Введение (113).**
2. **Непертурбативная динамика (113).**
   2.1. Фаза Хиггса. 2.2. Фаза конфайнмента. 2.3. Эффект Мейснера. 2.4. Дуальный эффект Мейснера. 2.5. Непертурбативный вакуум КХД.
3. **Непертурбативное операторное разложение (115).**
4. **Скрытый масштаб в КХД (116).**
5. **Предварительные итоги (116).**
6. **Суперсимметричная КХД (116).**
7. **Глюонный конденсат (117).**
8. **Режим сильной связи (117).**
   8.1. Мощь голоморфности. 8.2. $\mathcal{N} = 2$ SUSY-глюодинамика. 8.3. Конденсация монополей. 8.4 Недавний прогресс.
9. **Заключение (120).**

Список литературы (120).

Слава Богу, что он создал мир таким, что все, что в нем важно, то просто, а то, что сложно, то неважно.
Григорий Сковорода, странствующий украинский философ XVIII века.

1. Введение

Я принадлежу поколению теоретиков ИТЭФ, которые никогда не видели Исаака Яковлевича Померанчука, но которые слышали от его ближайших друзей бесконечное число шуток, высказываний, баек о нем или любимых им. По свидетельству многих теоретиков старшего поколения, вышеприведенное высказывание Григория Сковороды[1] было одним из наиболее часто повторяемых И.Я. Померанчуком. Оно отвечало его представлениям о физике, о соотношении сложности и простоты в науке.

В настоящем обзоре обсуждаются непертурбативные явления. Важность предмета ясна хотя бы из того факта, что масса всех окружающих нас предметов и нас самих на 99 % обязана своим происхождением непертурбативным явлениям. В обход высказыванию Г. Сковороды, непертурбативные явления — предмет чрезвычайно сложный. Прогресс в его понимании весьма медленный (сродни пониманию турбулентности). Однако за последние 25 лет была проделана огромная работа, и за сложностью стали проглядываться контуры простоты. Полной картины еще нет, но некоторые фрагменты видны вполне отчетливо. Часть этих фрагментов рассматривается ниже.

2. Непертурбативная динамика

2.1. Фаза Хиггса

Наш мир описывается Стандартной моделью с калибровочной группой $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$. Переносчики взаимодействий — векторные калибровочные бозоны: фотон, W- и Z-бозоны и глюоны соответственно. Гравитация описывается также калибровочной теорией — ОТО (общей теорией относительности). Ее переносчиком является безмассовый бозон со спином 2 — гравитон. Материя — это кварки и лептоны. Стандартная модель устроена так, что ни кваркам, ни лептонам нельзя приписать массу "руками". Механическая (токовая) масса кварков и лептонов возникает из-за взаимодействия со скалярным полем Хиггса $\phi(x)$.

Согласно существующей догме поле Хиггса конденсируется в пространстве, так что вакуумное ожидание поля отлично от нуля: $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \eta \neq 0$. Это хорошо понятое непертурбативное явление — эффект Хиггса. Говорят, что калибровочные теории находятся в фазе Хиггса. Ненулевое вакуумное ожидание поля Хиггса приводит к ненулевым массам калибровочных W- и Z-бозонов, кварков и лептонов. По-видимому, поле Хиггса — фундаментальное поле Стандартной модели.

[1] Цитируется неточно, воспроизводится по рассказам сотрудников теоротдела ИТЭФ.

В.А. Новиков. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-83-93. Факс (095) 127-08-33
E-mail: novikov@heron.itep.ru

Статья поступила 24 марта 2003 г.

Все попытки построить поле $\phi(x)$ как составное (типа конденсата в теории сверхпроводимости Бардина – Купера – Шриффера) приводили к противоречию с экспериментальными данными. Отвечающий полю Хиггса бозон до сих пор не обнаружен в эксперименте. Его обнаружение — основная задача экспериментальной физики следующего десятилетия.

Ядра, протоны и нейтроны построены из легких u- и d-кварков. В нуклоне механическая (токовая) масса трех кварков составляет около 10 МэВ, что надо сравнить с массой нуклона порядка 1000 МэВ. Таким образом, эффект Хиггса (который мы хорошо понимаем) объясняет 1 % массы окружающей нас материи. Остальные 99 % связаны с гораздо менее понятным явлением — конфайнментом.

2.2. Фаза конфайнмента

Фундаментальные поля $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{c}}$-теории сильных взаимодействий (хромодинамики) — это восемь глюонов A_μ^a $(a=1,\ldots,8)$ и триплеты кварков q_f^i $(i=1,2,3,\ f=1,\ldots,N_f)$. Ни глюоны, ни кварки не наблюдаются в виде свободных состояний. На малых расстояниях кварки отчетливо видны (в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию). Однако на больших расстояниях наблюдаются только бесцветные адроны (синглеты по $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{c}}$). Это явление получило название конфайнмента, т.е. пленения цвета.

Качественное объяснение конфайнмента состоит в том, что силовые линии хромоэлектрического поля между двумя статическими цветными зарядами формируют силовую трубку постоянной толщины, так что вся энергия поля сосредоточена в этой трубке и поэтому пропорциональна ее длине: $V(r) \simeq \sigma r$. Такой потенциал отвечает постоянной силе взаимодействия между двумя кварками, так что они никогда не освобождаются от этого взаимодействия, т.е. не вылетают. Потенциальная энергия взаимодействия легких кварков сосредоточена в энергии трубки, и масса нуклонов на 99 % состоит из энергии хромоэлектрического поля в трубке.

2.3. Эффект Мейснера

Похожее явление имеет место в теории сверхпроводников. В сверхпроводниках заряженный конденсат ϕ^{--} (куперовские пары) отличен от нуля ниже температуры фазового перехода: $\langle\phi^{--}\rangle \neq 0$. В результате, магнитное поле не может проникнуть в глубь сверхпроводника (эффект Хиггса в $3D$ U(1)-теории). Поэтому если внести в сверхпроводник магнитный заряд g (монополь) и антимонополь $\tilde{g}$, то (чтобы минимизировать свободную энергию) магнитные силовые линии формируются в трубку — трубку Абрикосова, так что энергия взаимодействия монополя и антимонополя пропорциональна расстоянию между ними.

2.4. Дуальный эффект Мейснера

Аналогия с конфайнментом была сразу же замечена 'т Хофтом [1], Мандельстамом [2] и Грибовым [3]. Конфайнмент выглядит как дуальный эффект Мейснера, когда все электрические (калибровочные) заряды q надо заменить на магнитные заряды g (и наоборот), а электрическое поле E — на магнитное поле B (и наоборот). Таким образом, качественная картина конфайнмента состоит в том, что монополи конденсируются в вакууме, а заряды не вылетают.

Ответить на вопросы, что это за монополи в $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{c}}$-хромодинамике, почему они конденсируются и т.п., нелегко. Существует возможность получить ответы непосредственно на эти вопросы с помощью суперкомпьютеров. Калибровочные теории в непрерывном пространстве-времени заменяются на калибровочные теории на дискретной решетке конечной длины. Компьютеры разыгрывают возможные флуктуации такой теории поля. Если размеры существенных флуктуаций окажутся заметно больше размера дискретной решетки, то можно думать, что дискретизация не важна и компьютерная симуляция не далека от реальной теории поля в реальном пространстве-времени. Успехи на этом пути велики (их обзору посвящена статья Борнякова и др. [4]).

Существует, однако, возможность понять некоторые свойства непертурбативной физики, не обращаясь к суперкомпьютерам. При этом приходится оставить прямолинейный путь, а двигаться обходными путями. Основными подспорьями на таких обходных путях служат понятия аналитичности и дуальности.

Одним из образцов "обходного маневра" в физике является работа Грибова, Иоффе и Померанчука [5] по $\mathrm{e^+e^-}$-аннигиляции в адроны, в которой с помощью аналитичности поведение сечения ($\mathrm{e^+e^-} \to$ адроны) было связано со свойствами коммутаторов электромагнитных токов на малых расстояниях.

Близкий по духу подход в случае КХД привел к созданию метода правил сумм КХД, который позволил вычислять параметры адронов в терминах параметров непертурбативного вакуума КХД.

2.5. Непертурбативный вакуум КХД

Основными элементами метода правил сумм КХД являются асимптотическая свобода, аналитичность (голоморфность) и дуальность. Первый успех метода — построение дисперсионной теории чармония в 1977 г. [6]. Остановимся на этом примере подробнее.

Из полного электромагнитного тока выделим часть, связанную с тяжелым c-кварком, $J_\mu^{\mathrm{c}} = \bar{c}\gamma_\mu c$, и рассмотрим поляризационный оператор, отвечающий такому току:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\mathrm{c}} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \exp(\mathrm{i}qx)\big\langle 0\big|T\big\{J_\mu^{\mathrm{c}}(x)\,J_\nu^{\mathrm{c}}(0)\big\}\big|0\big\rangle = \\ = (g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)\,. \qquad (1)$$

Нетрудно показать, что $\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)$ является аналитической функцией переменной q^2 с особенностями при $q^2>0$. Скачок $\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)$ связан с рождением резонансов J/ψ, ψ', ψ'' и пар D-мезонов и т.п.

С помощью аналитичности (т.е. дисперсионных соотношений) можно вычислить функцию $\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)$ во всей плоскости q^2 в терминах масс и ширин резонансов и параметров непрерывного спектра. С другой стороны, благодаря асимптотической свободе можно вычислять ту же функцию $\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)$ вдали от особенностей по теории возмущений, оперируя с кварками и глюонами.

В случае тяжелых c-кварков точка $q^2=0$ находится достаточно далеко от порога и сравнение двух разных вычислений $\Pi^{\mathrm{c}}(q^2)$ вблизи $q^2=0$ приводит к правилам сумм КХД:

$$\int \mathrm{d}q^2\,\frac{1}{(q^2)^n}\,R_{\mathrm{c}}^{\mathrm{pt}} = \int \mathrm{d}q^2\,\frac{1}{(q^2)^n}\,R_{\mathrm{c}}^{\exp}\,, \qquad (2)$$

где $R_c^{\rm pt}$ и $R_c^{\rm exp}$ — сечения (нормированные) e^+e^--аннигиляции, взятые из теории возмущений и эксперимента соответственно.

Это пример дуальности. Одну и ту же физическую реальность можно описать либо в терминах взаимодействующих кварков и глюонов, либо в терминах адронов. Если бы соотношение (2) было верно для всех значений n, то мы имели бы поточечную (локальную) дуальность: $R^{\rm pt} = R^{\rm exp}$, что, безусловно, не отвечает действительности. Если же соотношение (2) верно для нескольких ближайших значений n, то имеет место интегральная дуальность, когда усредненные физические сечения мало отличаются от усредненных теоретико-возмущенческих сечений.

Однако (и это был совершенно неожиданный подарок природы) если в соотношение (2) подставить реальные массы и ширины, то окажется, что наинизший J/ψ-резонанс доминирует в правилах сумм уже для первых нескольких значений n. Что касается теоретических вычислений, то они представляются в виде разложения по малому параметру $\alpha_s(m_c)$ — бегущей константе сильных взаимодействий на масштабе m_c. Поэтому в левой части (2) можно ограничиться первым членом разложения, если не гоняться за точностью, лучшей 10 %. В результате, можно "вычислить" параметры J/ψ-резонанса в теории возмущений. Эти вычисления находились в неплохом согласии с экспериментом. Такова была теория чармония в 1977 г. [6].

У представленной выше теории есть один существенный недостаток. Внутри теории невозможно найти никаких указаний, когда соотношение дуальности (2) перестает работать. Действительно, с увеличением номера n вклад J/ψ-резонанса насыщает дисперсионный интеграл со все лучшей точностью. С другой стороны, точность теоретико-возмущенческих вычислений также не ухудшается с ростом номера n. Поэтому создается впечатление, что соотношение (2) работает при всех значениях n, что, конечно же, неверно. Локальной дуальности нет, узкий J/ψ-резонанс никак не похож на сечение рождения $c\bar{c}$-кварков в теории возмущений, и равенство (2) должно разрушиться при больших значениях n.

Выход из парадокса был предложен в работах [7, 8]. Мысль состояла в том, что, кроме теории возмущений, важны непертурбативные флуктуации. Вакуум КХД содержит глюонный конденсат $\langle \alpha_s G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} \rangle \neq 0$, где $G^a_{\mu\nu}$ — тензор глюонного поля, α_s — константа сильных взаимодействий. Взаимодействие кварков с вакуумным конденсатом как раз ответственно за нарушение соотношения дуальности (2). При малых значениях n это взаимодействие мало по сравнению с теорией возмущений и соотношение (2) работает хорошо. Однако, начиная с некоторого $n_{\rm cr}$, взаимодействие с непертурбативными конденсатами резко возрастает и от соотношения дуальности (2) следует отказаться.

Механизм нарушения дуальности особенно прозрачен в случае поляризационных операторов с легкими кварками. В этом случае вдали от физических особенностей соотношение дуальности имеет вид

$$\Pi^{\rm exp}(q^2) \approx \Pi^{\rm pt} + \frac{c}{q^4} \langle \alpha_s G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} \rangle + \ldots \tag{3}$$

Здесь функция $\Pi(q^2)$ отнормирована так, что является безразмерной, коэффициент c определяется конкретным видом токов легких кварков, многоточие отвечает вкладу операторов более высокой размерности.

Пертурбативный вклад $\Pi^{\rm pt}(q^2)$ зависит от медленно меняющихся функций типа $\ln q^2$, т.е. функция $\Pi^{\rm pt}$ является почти константой во всей области изменений q^2. При больших значениях q^2 непертурбативный вклад ведет себя как ряд по малым степенны́м поправкам к основному пертурбативному члену. Однако при уменьшении q^2 степени "взрываются" и начинают доминировать в правой части (3). Масштаб, отделяющий большие значения q^2 от малых, определяется, очевидно, величиной конденсата. Переход очень быстрый — степенной. Так выглядит модифицированная дуальность.

Как уже говорилось, природа устроена так, что степенны́е поправки позволяют (в ряде случаев) подойти к физической области так близко, что резонансы начинают доминировать в дисперсионных интегралах. При этом поправки к пертурбативным вычислениям остаются еще малыми. В результате удается вычислить параметры резонансов. Это и есть правила сумм КХД. Таким образом были вычислены массы и ширины легких мезонов [9], массы и магнитные моменты нуклонов [10] и многое другое. Количество статей по правилам сумм КХД исчисляется сотнями.

3. Непертурбативное операторное разложение

Теоретическое обоснование правил сумм — операторное разложение вне рамок теории возмущений [11]. По духу такое разложение очень близко процедуре, предложенной Вилсоном для построения эффективного действия. Предполагается, что все теоретико-полевые флуктуации можно разделить на коротковолновые и длинноволновые. Асимптотическая свобода КХД гарантирует, что коротковолновые флуктуации с достаточной точностью могут быть описаны теорией возмущений и их вклад можно явно вычислить. Что касается длинноволновых флуктуаций, то их вычисление затруднительно, поскольку им отвечает режим сильной связи. Однако формально поведение таких флуктуаций описывается эффективным действием с бесконечным рядом по локальным операторам.

Для T-произведения токов $J(x)$ на малых расстояниях процедура сводится к соотношению

$$\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \, \exp(\mathrm{i}qx) \, T\{J(x), J(0)\} \underset{q^2 \to \infty}{\approx}$$

$$\underset{q^2 \to \infty}{\approx} \sum_n c_n(\mu, q^2) \, \frac{O_n(\mu)}{[q^2]^{\mathrm{Dim}\, O_n/2 + d}} \,. \tag{4}$$

Здесь параметр μ отделяет малые расстояния от больших. Коэффициенты $c_n(\mu, q^2)$ явно учитывают вклад малых расстояний, т.е. теории возмущений, инстантонов малых размеров и т.п. Они аналогичны бегущим константам связи перед новыми операторами в эффективном действии. Операторы $O_n(\mu)$ аналогичны новым членам эффективного взаимодействия для длинноволновых флуктуаций в вилсоновском эффективном действии. Степени $[q^2]^{-(\mathrm{Dim}\, O_n/2 + d)}$ выделены для того, чтобы коэффициенты $c_n(\mu, q^2)$ оставались безразмерными. Их зависимость от q^2 очень слабая (через $\ln q^2$ и т.п).

Для процессов типа аннигиляции ($e^+e^- \to$ адроны или $Z \to$ адроны) следует рассмотреть вакуумное ожидание T-произведения соответствующих токов. Вакуумные ожидания операторов O_n как раз и являются конденсатами $\langle\alpha_s G^2\rangle$, $\langle\bar{q}q\rangle, \ldots$ Все незнание сильных взаимодействий оказывается закодированным в виде ряда неизвестных конденсатов. При известной изобретательности этого оказывается достаточным, чтобы вычислить некоторые параметры некоторых адронов.

4. Скрытый масштаб в КХД

Можно, однако, обойтись без изобретательности и получить важную информацию о сильных взаимодействиях, так сказать, задаром. Действительно, различные токи взаимодействуют с *вакуумными полями* неуниверсально. Скажем, ρ-мезон может быть рожден из вакуума током $j_\mu = \bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d$. Теория возмущений описывается петлей (поляризационным оператором). Взаимодействие с глюонными полями также описывается петлей и пропорционально $(\alpha_s/16\pi)G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}$.

Если теперь обратиться к глюонным токам, например к скалярному току $J = \alpha_s G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}$, то теория возмущений опять описывается петлей, а взаимодействие с вакуумными полями усилено: оно происходит в древесном приближении. Таким образом, глюонные поправки для глюонных токов оказываются усиленными по отношению к глюонным поправкам к кварковым токам множителями типа $2\pi/\alpha_s$. Поэтому масштаб нарушения дуальности (а значит, и масштаб масс резонансов) для обычных мезонов и глюболов совсем разный.

Подтверждение этому наблюдению можно найти в точных низкоэнергетических теоремах. Введя в теорию поля новые объекты — конденсаты, можно ожидать новых соотношений для иных объектов. Одна из таких теорем выглядит следующим образом [12]:

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left\langle T\left\{\frac{3\alpha_s}{4\pi}\,G^2(x),\,\frac{3\alpha_s}{4\pi}\,G^2(0)\right\}\right\rangle = \frac{18}{b}\left\langle\frac{\alpha_s}{\pi}\,G^2\right\rangle. \quad (5)$$

В теории возмущений левая часть соотношения (5) начинается с членов порядка α_s^2, однако правая часть пропорциональна α_s (на самом деле $\alpha_s^{(0)}$, так как $\alpha_s G^2$ — ренорминвариант).

Подставляя конкретные числа, легко убедиться, что если для "старых" адронов масштаб масс $\Lambda^2 \approx 1$ ГэВ^2, то масштаб масс для глюболов в некоторых каналах достигает $\Lambda^2 \approx 16$ ГэВ^2 [12]. Это предсказание до сих пор ждет подтверждений либо от непосредственных экспериментов, либо от компьютерных экспериментов. (Следует оговориться, что большой масштаб нарушения дуальности не всегда означает, что наинизший резонанс имеет большую массу. Расстояние между резонансами должно быть большим.)

5. Предварительные итоги

Из всех этих упражнений с КХД можно извлечь несколько уроков.

1. "Физический" вакуум не похож на пустоту. Он заполнен непертурбативными конденсатами. Взаимодействие кварков и глюонов с вакуумными полями оказывается решающим для формирования бесцветных адронов.

2. Существует множество точных теорем для непертурбативных конденсатов. Эта тема до сих пор не исчерпана. Последняя по времени теорема найдена в начале 2003 г. [13].

3. Существует естественное ограничение применимости правил сумм КХД. Процедура разделения расстояний на большие и малые кажется тривиальной и никаких неприятностей не приносит. Однако, несмотря на асимптотическую свободу, знание малых расстояний оказывается недостаточным. Кроме теории возмущений, следует учитывать инстантоны малых размеров [11]. Эти флуктуации хорошо известны, и их можно учесть. Существуют и менее известные объекты. Скажем, расходимость ряда теории возмущений (ультрафиолетовые и инфракрасные ренормалоны) приводит к степенны́м поправкам в коэффициентных функциях, которые запутывают анализ степенных поправок (см. работы В.И. Захарова, начиная с середины 90-х годов).

4. КХД представляется слишком сложной теорией, чтобы вычислять теоретически конденсаты и другие вакуумные структуры, не обращаясь к суперкомпьютерам. Следует искать более простые, но все еще интересные теории.

6. Суперсимметричная КХД

Такую возможность нам предоставляют суперсимметричные теории. Ниже можно найти наметки краткого введения в суперсимметрию.

Суперсимметрия (SUSY) — симметрия между бозонами и фермионами:

$$\begin{aligned}
&|\text{бозон}\rangle \overset{\text{SUSY}}{\leftrightarrow} |\text{фермион}\rangle\,,\\
&E^n_{\mathrm{B}} \leftrightarrow E^n_{\mathrm{F}}\,,\\
&\text{глюон } \mathrm{g} \leftrightarrow \text{глюино } \tilde{\mathrm{g}}\,,\\
&\text{кварк } \mathrm{q} \leftrightarrow \text{скварк } \tilde{\mathrm{q}}\,.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Наряду с пространством-временем x_μ *суперпространство* содержит нечетные измерения, описываемые грассмановыми (нечетными) координатами θ_α, $\bar{\theta}_{\dot\alpha}$ ($\alpha, \dot\alpha = 1, 2$; $\{\theta_\alpha\theta_\beta\} = 0$).

Суперисчисление совсем просто, вот все правила:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,\theta = 1\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,1 = 0 \qquad (\text{дифференцирование}),$$

$$\int \mathrm{d}\theta\cdot\theta = 1\,,\quad \int \mathrm{d}\theta\cdot 1 = 0\ (\text{интегрирование}).$$

Поскольку переменные θ_α антикоммутируют, то все *суперполя* имеют конечное разложение по θ. Скалярное киральное суперполе выглядит так:

$$\phi(x,\theta) = \phi(x) + \theta_\alpha\psi^\alpha(x) + \theta_\alpha\theta^\alpha F(x)\,.$$

Оно содержит два фермионных поля $\psi^\alpha(x)$, скалярное поле $\phi(x)$ и дополнительное скалярное поле $F(x)$. Таким образом, число фермионных степеней свободы всегда равно числу бозонных степеней свободы.

Неренормализационные теоремы — коренное свойство суперсимметричных теорий. Уже создатели суперсимметрии Гольфанд и Лихтман отмечали [14], что в таких теориях происходит значительное сокращение расходимостей.

"Докажем" теорему, что в суперсимметрии энергия вакуума равна нулю.

Доказательство 1. Числа бозонных и фермионных степеней свободы равны, массы бозонов и фермионов равны. Петли бозонов и фермионов входят с разным знаком, поэтому одни петли в точности сокращают другие петли.

Доказательство 2. Из-за суперсимметрии энергия вакуумных бозонных мод E_n^{B} в точности равна энергии фермионных мод E_n^{F}:

$$E_{\mathrm{vac}} = \sum_n E_n^{\mathrm{B}} - \sum_n E_n^{\mathrm{F}} = \sum_n (E_n^{\mathrm{B}} - E_n^{\mathrm{F}}) \equiv 0 \,. \tag{7}$$

И наконец, приведем суперполевое доказательство.

Доказательство 3. Энергия вакуума равна интегралу по суперпространству от плотности энергии вакуума $\varepsilon_{\mathrm{vac}}$. В силу однородности пространства плотность энергии вакуума $\varepsilon_{\mathrm{vac}}$ не может зависеть от координат x_μ и, следовательно, координат $\theta_\alpha, \bar{\theta}_\alpha$. Поэтому

$$E_{\mathrm{vac}} = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar{\theta}\, \varepsilon_{\mathrm{vac}} = 0 \tag{8}$$

из-за правил интегрирования грассмановых переменных $\int \mathrm{d}\theta = 0$.

Все эти рассуждения дают надежду, что суперсимметричные теории могут быть решены точно, что, безусловно, является весьма привлекательной чертой теории. С другой стороны, в нашем мире не наблюдается никакой точной суперсимметрии. Для этого не нужно делать специальных экспериментов. Никто никогда не видел скалярный электрон с массой 0,5 МэВ. Поэтому теоретики предположили, что суперсимметрия существует (лишь на малых расстояниях) при больших энергиях, а при малых энергиях она нарушается, так что массы электрона и скалярного электрона различаются. Но вклады высоких энергий от e и $\tilde{\mathrm{e}}$ сокращают друг друга. Последние 10 лет предпринимаются огромные усилия по поиску суперсимметричных частиц. Ограничения на их массу превышают сотню ГэВ. Пока нет никаких следов суперсимметрии. И основной аргумент в пользу SUSY — ее красота.

В одной из своих работ Н. Зейберг написал: "Было бы жалко, если бы Природа не воспользовалась такой прекрасной идеей, как SUSY". Однако, как написал Н. Бор по другому поводу, "не нам давать указания Богу, чем пользоваться при построении мира".

Вернемся к суперсимметричным теориям.

7. Глюинный конденсат

Начнем с SU(2)-суперглюодинамики. Она содержит три глюона A_μ^a (безмассовых, поперечных) и три глюино λ_α^a (две ориентации спина). Глюинное поле λ_α^a — нижняя компонента кирального суперполя W_α^a. Легко показать, что вакуумные средние от нижних компонент киральных полей не зависят от координат. В частности, вакуумный коррелятор

$$\Pi(x,y) = \big\langle 0 \big| T\big\{\lambda^2(x), \lambda^2(y)\big\} \big| 0 \big\rangle \equiv \mathrm{const}\,. \tag{9}$$

В силу асимптотической свободы на малых расстояниях $|x-y| \ll 1/\Lambda$, где Λ — параметр, определяющий бег константы связи, можно вычислить вклад в вакуумный коррелятор $\Pi(x,y)$. Вклад теории возмущений равен нулю, так как коррелятор (9) испускает два фермиона в точке x и испускает (а не поглощает) два фермиона в точке y. Таких фейнмановских диаграмм нет. С другой стороны, SU(2)-инстантон как раз содержит четыре нулевые моды фермионов и дает ненулевой вклад в (9).

Рассмотрим теперь большие расстояния: $|x-y| \gg 1/\Lambda$. При бесконечных расстояниях следует ожидать распада корреляций:

$$\Pi(x,y) \underset{|x-y|\to\infty}{\Longrightarrow} \langle \lambda^2 \rangle^2 \,. \tag{10}$$

Таким образом, для SU(2) получаем [15]

$$\langle 0|\mathrm{Tr}\,\lambda^2|0\rangle^2 = \frac{2^{10}\pi^4}{5}\exp\left(-\frac{8\pi}{g_0^2}\right)\frac{M^6}{g_0^4} = \frac{144}{5}\,\Lambda^6 \,. \tag{11}$$

Для SU(N_{c}) аналогичные вычисления дают

$$\langle \lambda_\alpha^a \lambda_\alpha^a \rangle = c\Lambda^3 \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{N_{\mathrm{c}}}\,k\right).$$

Коэффициент c точно вычисляется, число $k = 0, 1, \ldots, N_{\mathrm{c}} - 1$ "считает" различные вакуумные состояния.

Инстантоны лежат в одной из SU(2)-подгрупп группы O(4) = SU(2) × SU(2), и ровно половина суперсимметрии не нарушается внешним инстантонным полем. Легко показать, что этой половины суперсимметрии достаточно, чтобы доказать, что пертурбативных поправок к (11) не существует, так же как нет поправок к вакуумной энергии [15]. Следовательно, инстантонное вычисление глюинного конденсата является точным вычислением.

В соотношении (11) мы сначала выразили глюинный конденсат через параметр обрезания M^2 и голую константу связи g_0, а затем через физический параметр Λ.

Ясно, что физическая величина $\langle \lambda^2 \rangle$ не должна зависеть от обрезания. Отсюда немедленно получается "точная" β-функция (NSVZ [16]):

$$\beta(\alpha_{\mathrm{s}}) = -3N_{\mathrm{c}}\,\frac{\alpha_{\mathrm{s}}^2}{2\pi}\,\frac{1}{1 - N_{\mathrm{c}}\alpha_{\mathrm{s}}/2\pi} \,. \tag{12}$$

Таково было состояние теории в 1983–1984 годах. Через 10 лет произошла новая революция в суперсимметричных теориях поля: в некотором смысле удалось прорваться в область сильной связи.

8. Режим сильной связи

Революция в суперсимметричных теориях поля основывается на двух составных частях: голоморфности и электрической-магнитной дуальности.

Голоморфность утверждает, что суперпотенциал W_{eff} голоморфно зависит от всех киральных полей, а также констант связи (т.е. зависит от киральных полей, но не от комплексно-сопряженных полей).

Электрическая-магнитная дуальность означает, что одна и та же физика может быть описана либо в *электрической* формулировке, либо в *магнитной*. Хорошо известный пример — формализм Цванцигера для описания электродинамики электрических и магнитных зарядов (монополей).

8.1. Мощь голоморфности

Принцип голоморфности, известный еще с 80-х годов, по-настоящему в полном объеме начали использовать во времена революции 90-х годов [17]. Покажем, как он работает, на примере модели Весса–Зумино. Суперпотенциал $W(\phi)$ имеет вид

$$W(\phi) = m\phi^2 + g\phi^3 \,. \tag{13}$$

Если массу m и заряд g рассматривать как внешние поля, то суперпотенциал $W(\phi)$ симметричен относительно двух U(1)-симметрий:

$$m \to \exp(\mathrm{i}\alpha)\, m\,, \qquad g \to \exp(\mathrm{i}\beta)\, g\,,$$

с зарядами

	$U(1)$-заряд	$U(1)_{\mathrm{R}}$-заряд
ϕ	1	1
θ	0	1
m	-2	0
g	-3	-1

Взаимодействие не нарушает симметрий, поэтому эффективное действие также должно удовлетворять этим симметриям. Есть только одна комбинация полей и констант, которая удовлетворяет таким требованиям:

$$W_{\mathrm{eff}} = m\phi^2 f\left[\frac{g\phi}{m}\right],$$

где f — произвольная функция.

Рассмотрим, однако, предел: константа связи $g \to 0$, но $g\phi/m$ — произвольное число.

В пределе $g \to 0$ эффективное действие совпадает с древесным:

$$W_{\mathrm{eff}} \underset{g\to 0}{\Rightarrow} W_{\mathrm{tree}}\,.$$

Отсюда сразу же получаем

$$f[t] = f_{\mathrm{tree}}(t) = 1 + t\,, \qquad t = \frac{g\phi}{m}$$

для всех значений t. Поэтому

$$W_{\mathrm{eff}} \equiv m\phi^2 + g\phi^3 = W_{\mathrm{tree}}\,, \tag{14}$$

т.е. суперпотенциал не перенормируется. Доказательство проведено вне рамок теории возмущений. Оно выглядит слегка упрощенным, но, похоже, не содержит никаких прорех.

8.2. $\mathcal{N} = 2$ SUSY-глюодинамика

Опишем "точное решение", полученное Зейбергом и Виттеном в 1994 г. в работе [18], ставшей началом революции 90-х годов.

Рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ SU(2)-суперглюодинамику. В терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей теория содержит киральный калибровочный супермультиплет $W_\alpha^a = (\lambda^a, A_\mu^a)$ и киральный мультиплет $\Phi^a = (\phi^a, \psi^a)$, где $a = 1, 2, 3$. Таким образом, есть три векторных поля, шесть спинорных полей и три скалярных комплексных поля.

Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^2\theta\, \tau W^2 + \frac{1}{g^2}\int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar\theta\, \Phi^+ e^V \Phi\,, \tag{15}$$

где

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi\mathrm{i}}{g^2}$$

определяет заряд и θ-член в лагранжиане взаимодействия глюонов.

Скалярное поле ϕ^a выпадает в конденсат (потенциал взаимодействия содержит плоские направления по $\phi^a\phi^a$):

$$\langle \phi^a \phi^a \rangle = u \neq 0\,,$$

и SU(2)-симметрия нарушается до U(1). Возникают безмассовые состояния: фотон A_μ^3, фотино (λ^3, ψ^3) и безмассовый скаляр ϕ^3. Кроме того, имеются массивные $\mathrm{W}^\pm$-бозоны, массивный дираковский спинор $\psi^\pm$ и массивное скалярное поле $\phi^\pm$. Это еще не конец истории: в теории есть массивные монополи 'т Хофта – Полякова, которые являются одним из компонентов соответствующего $\mathcal{N} = 2$ супермультиплета. Таким образом, кроме "пустого" монополя, есть монополь с заполненной нулевой фермионной модой и монополь с двумя заполненными фермионными модами.

При низких энергиях можно отинтегрировать степени свободы, отвечающие тяжелым W-бозонам, монополям и их суперпартнерам. Остаются безмассовый фотон, фотино и нейтральный бозон. На классическом уровне эти легкие степени свободы не взаимодействуют, теория кажется тривиальной и неинтересной. Однако учет квантовой механики приводит к взаимодействию. Точное решение Зайберга – Виттена относится как раз к этой "невзаимодействующей" системе.

Эффективное действие для легкого $\mathcal{N} = 2$ супермультиплета выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Im}\left\{\int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar\theta\, \Phi^+ \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta\, \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Phi^2}\, W^2\right\}. \tag{16}$$

Здесь функция $\mathcal{F}(\phi)$ голоморфна. Вид действия (16) целиком определяется $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией. "Заряд" в эффективном действии является эффективным "зарядом", т.е.

$$\tau(\phi) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{2\pi}\,\theta(\phi) + \frac{4\pi\mathrm{i}}{g^2(\phi)}\,.$$

На "классическом" уровне массы тяжелых частиц могут быть записаны в симметричном виде:

$$m = \sqrt{2}\,|aQ_{\mathrm{e}} + a_D Q_{\mathrm{m}}|\,, \tag{17}$$

где Q_{e} и Q_{m} — электрический и магнитный заряды, функции

$$a = \sqrt{u}\,, \qquad a_D = \frac{4\pi\mathrm{i}}{g^2}\, a = \tau a$$

являются голоморфными функциями переменной $u = \langle \phi^a \phi^a \rangle$.

При больших значениях переменной u эффективный заряд стремится к нулю и пертурбативные вычисления надежны:

$$\begin{aligned} u &= a^2\,, \\ a_D(u) &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\, a\left(\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 1\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Точка $u = \infty$ является сингулярной точкой функций (18) — точкой ветвления. При обходе точки $u = \infty$

функции a_D и a переходят друг в друга:

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \to M_\infty \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix}, \qquad M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица M_∞ называется матрицей монодромии. Вид матрицы M_∞ следует из явного вида (18) квазиклассических функций $a(u)$ и $a_D(u)$. Ясно, что точка ветвления не может быть одинокой: разрез, где-то начавшись, должен где-то кончиться. Это означает, что функции $a(u)$ и $a_D(u)$ должны иметь дополнительные сингулярности.

Можно привести простые аргументы в пользу того, что одна дополнительная сингулярность приводит к противоречию. (Мы не будем останавливаться на подробном доказательстве. В качестве намека скажем, что из определения функции $\tau(\phi)$ ясно, что функция $\operatorname{Im}\tau(\phi)$ всегда положительная и растет при больших ϕ. С другой стороны, $\operatorname{Im}\tau(\phi)$ — гармоническая функция и не может иметь минимума.) Пусть существуют две дополнительные сингулярности. Эффективное действие SU(2)-калибровочной теории Z_2-симметрично, т.е. теория симметрична при замене $u \to -u$. Поэтому точки сингулярности находятся в симметричных точках u_0 и $-u_0$.

Предположим, что сингулярности в S_{eff} связаны с появлением безмассовых состояний. В работе [18] считалось, что сингулярность u_0 отвечает безмассовому монополю с зарядами $(Q_{\text{e}}, Q_{\text{m}}) = (0, 1)$, т.е.

$$a_D(u_0) = 0\,, \qquad a(u_0) \neq 0\,.$$

Кажется, что этого мало, чтобы вычислить монодромию около точки u_0. Однако (и это очень смелый шаг) можно перейти от электрического описания оставшейся U(1)-теории к дуальному (магнитному): $\phi \to \phi_D$, $W \to W_D$. В этих переменных взаимодействие монополей выглядит как электродинамика КЭД с зарядом единица. КЭД является инфракрасно-свободной теорией, поэтому пертурбативные вычисления около $a_D = 0$ надежны. Матрица монодромии M_{u_0} находится аналогично M_∞.

Монодромию около точки $-u_0$ можно восстановить из того соображения, что обход вокруг точек ∞ и u_0 эквивалентен обходу вокруг точки $-u_0$ в обратном направлении, т.е.

$$M_\infty M_{u_0} M_{-u_0} = 1\,.$$

Таким образом, дуальность позволяет зафиксировать матрицы монодромии.

Из математики известна теорема Римана – Гильберта. Пусть при обходе z_0 функции $F_i(z)$ преобразуется как

$$F_i\big[(z - z_0)\exp(2\pi \mathrm{i})\big] = M_{ij}(z_0)\, F_j(z)\,.$$

Если $\{z_0\}$ и $\{M_{ij}(z_0)\}$ известны, то можно восстановить функции $F_j(z)$ одним и только одним образом. Монодромии в нашем случае определены, поэтому Гильберт и Риман гарантируют, что можно вычислить $m_W(u)$, $m_m(u)$, $a_D(u)$ в терминах u_0.

Задача представляется сложной. В работе [18] приведена прекрасная математика, позволяющая найти точное решение. Однако решение даже более общей задачи было известно с 30-х годов, когда в физике твердого тела решались задачи о движении частиц в периодических потенциалах. При сдвиге на период возникали матрицы монодромии для двух независимых решений уравнения Шрёдингера. И все (или многие) интересные и решаемые задачи были решены 70 лет назад.

Для справок приведем точное решение, отвечающее нашей задаче:

$$a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u} \mathrm{d}x\, \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Здесь $u_0 = 1$ (т.е. переменная u измеряется в единицах u_0).

Можно убедиться, что "точный" заряд $\tau(u) = \mathrm{d}a_D/\mathrm{d}a$ отличается от "точного" пертурбативного заряда, найденного в разделе 7, непертурбативными степенными членами. Явно проверено, что первые члены этого степенно́го разложения отвечают соответственно одно-, двух- и т.д. инстантонным вкладам в эффективный заряд [19]. По-видимому, это утверждение верно для всех членов степенного ряда.

Аналогичные решения были получены также для $\mathcal{N} = 2$ теории с произвольной калибровочной группой и для SU(N_{c})-калибровочной теории с материей [20].

8.3. Конденсация монополей

Интересно нарушить $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию до $\mathcal{N} = 1$. Для этого достаточно добавить к действию массовый член для материи

$$\Delta W = m \operatorname{Tr} \phi^2 = mu\,.$$

Если масса мала, то можно думать, что изменение эффективного действия можно учесть по теории возмущений.

В терминах дуального описания эффективную теорию около точки $u = u_0$ можно представить в виде

$$W_{\text{eff}} = \sqrt{2}\, a_D \tilde{M} M + mu(a_D)\,,$$

где M и $\tilde{M}$ — киральные поля для монополя и антимонополя. Первый член отвечает массовому члену монополя, второй — массовому члену материи. Условие экстремальности W_{eff} по переменной a_D, M и $\tilde{M}$ записывается как

$$\sqrt{2}\, M\tilde{M} + mu' = 0\,,$$

$$a_D M = a\tilde{M} = 0\,.$$

Решение системы уравнений имеет вид

$$\langle M \rangle = \langle \tilde{M} \rangle = \sqrt{-\frac{m}{\sqrt{2}}\, u'(0)} \neq 0\,.$$

Таким образом, мы получили хиггсовскую фазу магнитной U(1)-теории.

При комплексном значении u_0 поле монополей выпало в осадок. Вспомним, с чего мы начинали. При $u = 0$ на лагранжевом уровне мы имели безмассовые глюоны и глюино и массивное (с массой m) поле материи. В точном решении точка $u = 0$ ничем не выделена, а безмассовые заряженные состояния отсутствуют. Таким образом осуществляется конфайнмент в исходной теории. Исходная гипотеза о выпадении монополей в конденсат при конфайнменте в определенном смысле подтвердилась. При комплексном значении $u = u_0$ скалярная компонента кирального поля монополя имеет ненулевое вакуумное ожидание.

8.4. Недавний прогресс

В начале 2003 г. найдены точные решения для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной $\mathrm{SU}(N_c)$-калибровочной теории с материей в присоединенном представлении и произвольным взаимодействием [21], а также с материей в присоединенном и фундаментальном представлении [22]. Похоже, на этом же пути удается получить некоторые точные результаты для несуперсимметричных теорий [23].

9. Заключение

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что:
- в суперсимметричных теориях идея о связи конфайнмента с конденсацией монополей подтвердилась;
- в КХД происхождение конфайнмента до сих пор до конца не ясно;
- тем не менее прогресс в понимании замечателен;
- временной масштаб в развитии теории порядка 8–10 лет; это обнадеживает.

Благодарности. Я благодарен Л.Б. Окуню за предложение написать этот обзор и полезные замечания, а также Г.К. Селиванову за обсуждение последних работ по точно решаемым суперсимметричным теориям поля.

Работа частично поддержана грантом INTAS OPEN (2000-110).

Список литературы

1. 't Hooft G, in *High Energy Physics: Proc. of the EPS Intern. Conf., Palermo, Italy, 23–28 June 1975* (Intern. Physics Series, 6, Ed. A Zichichi) (Bologna: Compositori, 1976)
2. Mandelstam S *Phys. Rep.* **23** 245 (1976); *Phys. Rev. D* **19** 2391 (1979)
3. Gribov V N, private communications
4. Борняков В Г и др. *УФН* **174** 19 (2004)
5. Грибов В Н, Иоффе Б Л, Померанчук И Я *ЯФ* **6** 587 (1967)
6. Novikov V A et al. *Phys. Rev. Lett.* **38** 626 (1977); *Phys. Rep.* **41** 1 (1978)
7. Вайнштейн А И и др. *ЯФ* **28** 465 (1978)
8. Вайнштейн А И, Захаров В И, Шифман М А *Письма в ЖЭТФ* **27** 60 (1978)
9. Shifman M A, Vainshtein A I, Zakharov V I *Nucl. Phys. B* **147** 385 (1979)
10. Ioffe B L *Nucl. Phys. B* **188** 317 (1981); Иоффе Б Л, Смилга А В *Письма в ЖЭТФ* **37** 250 (1983)
11. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **174** 378 (1980); **249** 445 (1985)
12. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **191** 301 (1981)
13. Vainshtein A *Phys. Lett. B* **569** 187 (2003); hep-ph/0212231
14. Гольфанд Ю А, Лихтман Е П *Письма в ЖЭТФ* **13** 452 (1971)
15. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **229** 407 (1983)
16. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **229** 381 (1983)
17. Seiberg N *Int. J. Mod. Phys. A* **16** 4365 (2001); hep-th/9506077
18. Seiberg N, Witten E *Nucl. Phys. B* **426** 19 (1994)
19. Dorey N, Khoze V V, Mattis M P *Phys. Rev. D* **54** 2921, 7832 (1996)
20. Argyres P C, Plesser M R, Seiberg N *Nucl. Phys. B* **471** 159 (1996)
21. Cachazo F et al. *JHEP* **0212** 071 (2002)
22. Cachazo F, Seiberg N, Witten E *JHEP* **0304** 018 (2003); hep-th/0303207
23. Armoni A, Shifman M, Veneziano G *Nucl. Phys. B* **667** 170 (2003); hep-th/0302163

Nonperturbative QCD and supersymmetric QCD

V.A. Novikov
Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *123-83 93. Fax* (*7-095*) *127-08 33*
E-mail: *novikov@heron.itep.ru*

Nonperturbative QCD phenomena, in particular confinement, are reviewed, and as an example of their treatment, an exact solution in the framework of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Yang–Mills gauge theory is considered. Prospects for extending the duality idea to QCD are discussed.

PACS numbers: 12.38.Aw, 12.38.Lg, 12.60.Jv

Bibliography — 23 references

Received 24 March 2003