Сентябрь 2002 г. **Том 172, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Теория струн или теория поля?

А.В. Маршаков

Рассматривается теория струн на определенном рубеже ее развития, обсуждаются основные достижения последних лет, связанные прежде всего с попытками выхода за рамки теории возмущений как с точки зрения теории струн, так и с точки зрения квантовой теории поля. Подобный анализ помогает лучше осознать роль и место квантовой теории поля и теории струн в современной физической картине мира. Особо отмечается, что описывающей широкий круг экспериментальных явлений квантовой теории поля присущи непреодолимые внутренние проблемы, главной из которых является невозможность сформулировать на этом языке квантовую теорию гравитации. Это приводит, в частности, к тому, что квантовая теория поля не может быть фундаментальной физической теорией микромира, и именно данную задачу — создание такой теории — предназначена разрешить теория струн, современное состояние которой пока еще далеко от совершенства. Несмотря на то что теория струн существует по сей день в весьма условном виде, ее развитие уже привело к ряду серьезных достижений и существенному прогрессу в понимании квантовой теории поля. Этим достижениям и посвящен в основном данный обзор.

PACS numbers: **11.15.–q**, **11.25.–w**, **12.20.–m**

Содержание

А.В. Маршаков. Физический институт им П.Н. Лебедева, РАН,
119991 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (095) 135-83-39. Факс (095) 938-22-51
E-mail: mars@lpi.ru
Институт теоретической и экспериментальной физики,
117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-35-55. Факс (095) 127-08-23
E-mail: mars@gate.itep.ru

*Статья поступила 21 ноября 2001 г.,
после доработки 23 апреля 2002 г.*

1. Введение

Двадцатый век можно считать веком успехов физических наук. Совершенно новые физические идеи и представления об окружающем мире оказали сильнейшее воздействие как на человечество в целом, так и на отдельных его представителей, в том числе на власть имущих, будучи более чем убедительно проверены экспериментально повсеместным распространением радио и телевидения, полетами человека в космос и главным образом взрывами атомной и водородной бомб. Тем самым открытые изначально "на кончике пера" законы электромагнетизма, теория относительности и квантовая механика полностью доказали свою состоятельность.

Дальнейшее углубление в "тайны мироздания", а именно попытки понять, как устроен наш мир на совсем малых (субатомных и субъядерных) расстояниях, шло уже не столь гладко. Отсутствие или малодоступность экспериментальной базы для проверки какого бы то ни было утверждения при энергиях, превышающих 100 ГэВ,

привело к тому, что теоретическая физика элементарных частиц стала все более и более полагаться на "внутреннюю красоту" теории и развиваться, во многом подобно математике, исходя главным образом из внутренней логики. Результатом такого развития к концу двадцатого века стала нетипичная ранее для физики ситуация, когда поиск "внутренней гармонии" среди физиков-теоретиков заметно оторвался от нужд физиков-экспериментаторов, по крайней мере в области физики элементарных частиц.

Так называемая Стандартная модель (объединяющая теорию электрослабого взаимодействия на основе модели Вайнберга – Салама и квантовую хромодинамику) оказалась практически *абсолютно* удовлетворительной[1] с точки зрения описания всех известных экспериментов. По крайней мере уже тридцать лет теоретики заняты поисками "красивой фундаментальной" теории, которая сводилась бы к Стандартной модели на достаточно больших расстояниях — энергиях, меньших или порядка массы W-бозона (грубо говоря, тех же 100 ГэВ). Как бы ни была слаба аргументация "красоты", лежащей в основе теоретической физики, большинству заинтересованных людей, в том числе и автору данного обзора, Стандартная модель представляется совершенно неудовлетворительной лишь с точки зрения данного принципа.

Более того, уже в рамках Стандартной модели использовались идеи, такие как спонтанное нарушение калибровочной симметрии или эффект Хиггса, экспериментальное обоснование которых до сих пор не получено, но которые, тем не менее, были выбраны среди прочих возможностей исключительно благодаря простоте и изяществу. Так, в рамках Стандартной модели W-бозоны становятся массивными вследствие взаимодействия с выпадающим в конденсат скалярным полем, в полной аналогии с механизмом Гинзбурга – Ландау в физике твердого тела, хотя существование возбуждений этого скалярного поля до сих пор не подтверждено наблюдениями.

Таким образом, в данном обзоре речь пойдет о теории, существование которой непроверяемо экспериментально в опытах по физике элементарных частиц. В этом смысле предполагаемая гипотетическая теория по своим принципам ближе к теории гравитации, для которой со времен создания общей теории относительности (ОТО) внутренняя красота является одним из главных физических принципов. В теории гравитации, ответственной главным образом за физику *макро*мира, отрыв от эксперимента (или, точнее, недостаточность экспериментальной базы для фиксации параметров теории) всегда оставлял определенное поле для привлечения дополнительных "внутренних" соображений. Оказалось, что с течением времени подобная ситуация распространяется все дальше и дальше на описание физики *микро*мира.

Естественным требованием к такой фундаментальной теории было бы объяснение "всего", в том числе и гравитации, стоящей за рамками Стандартной модели, т.е. описание всех четырех взаимодействий — электромагнитного, сильного, слабого и гравитационного — исходя из неких единых принципов. В данном обзоре предпринята попытка сформулировать эти общие принципы и продемонстрировать, что они могут привести не только к прогрессу в понимании квантовой теории гравитации, но и к совершенно новому взгляду на известные проблемы в калибровочных теориях поля, лежащих в основе Стандартной модели. Безусловно, не существует никакой "теоремы единственности" в отношении фундаментальной физической теории, поэтому, особенно при отсутствии прямой экспериментальной "подпитки", ко всему, что будет сказано ниже, можно относиться, как к чистой фантазии. Тем не менее мы попытаемся продемонстрировать, что именно предлагаемый вариант такой фантазии основан на достаточно простых и ясных (хотя и не всегда четко сформулированных) физических принципах, привлекательность которых усиливается, если учесть, что все альтернативные попытки хоть как-то продвинуться даже в качественном осмыслении физики микромира потерпели пока полное фиаско.

Во многом по историческим причинам фундаментальная теория на малых расстояниях планковского масштаба ($\sqrt{\gamma_{\mathrm{N}}/\hbar c} \sim 10^{-33}$ см, где $\hbar$ и c — постоянная Планка и скорость света в вакууме[2], γ_{N} — ньютоновская постоянная гравитационного взаимодействия), на которых уже необходимо учитывать эффекты квантовой гравитации, т.е. на которых гравитация перестает быть слабой по сравнению с другими взаимодействиями, называется *теорией струн*[3]. Название теории, быть может, не совсем удачно, и чем далее, тем чаще возникают предложения называть ее по-другому (например, ***М-теория***[4] и т.п.). Ниже мы придерживаемся "традиционного" названия в основном потому, что, не будучи полным или точным, оно, тем не менее, в совершенстве "ухватывает" один из главных моментов этой теории — естественную "геометрическую" регуляризацию на малых расстояниях — с помощью введения протяженных объектов ненулевой (чаще всего планковской) длины. Введение струн в качестве таких протяженных объектов немедленно приводит к теории с безмассовыми калибровочными векторными бозонами и гравитонами (самосогласованность которой, впрочем, еще предстоит доказать).

Отдельно отметим, что часто используемое (особенно в популярной литературе) название "супер-

[1] Прецизионные проверки предсказаний Стандартной модели не обнаружили расхождений эксперимента с теорией, выходящих за рамки трех стандартных отклонений, что является совершенно удовлетворительным, поскольку, как напомнил автору Л.Б. Окунь, Ландау и Ферми рекомендовали всегда умножать погрешности эксперимента на π. Последние данные на этот счет можно найти в докладе М. Грюнвальда (M. Grünewald, Talk at LEP Physics Jamboree, CERN, July 10, 2001), доступном в электронном архиве http://www.cern/ch/LEPEWWG.

[2] В дальнейшем, если не сказано иного, эти постоянные формально полагаются равными единице, т.е. в релятивистской физике микромира скорость исчисляется в единицах скорости света c, а действие — в единицах постоянной Планка $\hbar$.

[3] По теории струн существует уже довольно обширная литература: несколько книг [1 – 3] и ряд обзоров, в том числе и в *УФН*, например [9, 10], и др. Однако эта область развивается столь стремительно, что переоценка даже основополагающих понятий происходит достаточно часто. К достаточно удачным, с точки зрения автора, можно отнести обзоры [14 – 21], хотя, безусловно, это далеко не полный список. Более подробный анализ литературы можно найти в приложении 8.2.

[4] Толкование выделенных ***этим шрифтом*** терминов, помимо основного текста, дается в приложении 8.1.

струны" представляется гораздо более неудачным, во-первых, потому, что буквально отвечает лишь узкому кругу струнных моделей, а во-вторых, из-за того, что смешивает две совершенно разные и независимые друг от друга физические идеи: совмещает собственно струнную концепцию с идеей ***суперсимметрии*** (симметрии между бозонами и фермионами). Как мы увидим в дальнейшем, роль такой симметрии особенно важна именно в квантовой теории поля, где суперсимметрия позволяет, в том числе, даже расширить горизонты применения Стандартной модели. В отличие от типично квантово-полевой роли суперсимметрии, направленной на сокращение ультрафиолетовых расходимостей, для теории струн чрезвычайно важно (и это уже заложено в самом названии), что фундаментальная теория на малых расстояниях *не является* локальной квантовой теорией поля.

Здесь следует остановиться особо. С одной стороны, теория струн никак не отрицает существование квантовой теории поля в качестве разумной эффективной теории при энергиях, гораздо меньших планковских (10^{19} ГэВ), которая естественным образом описывает физические процессы в режиме слабой связи. В области своей применимости релятивистская квантовая теория поля автоматически учитывает вклады античастиц и предлагает расчеты амплитуд и сечений рассеяния, блестяще подтверждающиеся экспериментом. Более того (и этому уделено значительное внимание ниже), при анализе эффектов без существенного вклада гравитации, когда энергии много меньше планковских, теория струн часто сводится к квантовой теории поля, а именно к теории калибровочных векторных полей. В этом смысле мы будем часто говорить о теории поля как об *эффективной* теории или следствии из теории струн на больших расстояниях. Грубо говоря, теория поля является низкоэнергетическим пределом более фундаментальной теории струн, аналогично тому, как в нерелятивистском пределе из теории поля возникает квантовая механика, переходящая, в свою очередь (при $\hbar \to 0$), в классическую.

С другой стороны, исторически переход от теории поля к теории струн является не чем иным, как сменой *парадигмы*, и в рамках новой струнной парадигмы теория поля лишается права претендовать на роль фундаментальной физической теории. Ниже мы попытаемся обсудить это, привлекая достаточно простые физические принципы, осознание которых приводит к мысли о полной абсурдности, скажем, строить теорию квантовой гравитации в рамках квантовой теории поля.

В этом месте необходимо немедленно и откровенно сказать, что положение внутри самой теории струн пока более чем далеко от совершенства. Претендуя на роль фундаментальной теории физики микромира и единой теории всех взаимодействий, теория струн до сих пор не имеет не то что законченной формулировки, а даже до конца разобранного "модельного примера", более или менее охватывающего все ее принципиальные черты, подобно простейшим моделям квантовой механики (гармонический осциллятор, атом водорода и т.п.) или квантовой теории поля (теория скалярного поля со взаимодействием $\lambda\phi^3$ или $\lambda\phi^4$, квантовая электродинамика). По сути дела лишь достаточно хаотично разбросанные "отдельные куски" теории струн доступны осмыслению и некоторой формализации на сегодняшний день. Тем не менее за последние годы в теории струн произошел (и по-прежнему происходит!) определенный прогресс, что, безусловно, выделяет ее на фоне большинства других, практически тупиковых, направлений.

Главная цель данного обзора — обсудить *физические* принципы, лежащие в основе теории струн, и попытаться продемонстрировать их привлекательность, используя некоторые, в том числе последние, достижения в данной области. Отметим сразу, что достижения эти носят условный характер и уж во всяком случае не объясняют (пока?!) наблюдаемых физических эффектов. Тем не менее нам представляется чрезвычайно важным даже тот факт, что только в рамках теории струн появилась возможность хотя бы *постановки* принципиально новых вопросов, самым известным из которых является вопрос о размерности пространства-времени, решаемый *динамически*, а не закладываемый в теорию "руками". Такой подход является совершенно новым по сравнению с традиционной точкой зрения квантовой теории поля, в которой пространство-время — один из незыблемых изначальных ингредиентов.

Динамическая природа пространства-времени является следствием *определения* теории струн в рамках теории возмущений с помощью поляковского континуального интеграла, в котором сумма по различным физическим конфигурациям системы формулируется как сумма по различным геометриям на двумерных мировых поверхностях движения струн. Возникающая таким образом "геометризация" струнной теории уже на пертурбативном уровне играет существеннейшую роль при попытках выйти за рамки теории возмущений, где наиболее яркие достижения связаны именно с идеями отождествления параметров физических теорий (масс, конденсатов, констант связи) с параметрами (в основном комплексных) многообразий, являющихся компактной "частью" динамически выбираемого теорией струн пространства-времени.

В заключение предварительного введения заметим, что сложившаяся вокруг теории струн ситуация, как уже было сказано, не типичная для физики, приводит к большому числу "социальных" проблем, необычайно интересных, но выходящих за рамки данного обзора. Например, теория струн часто и, с точки зрения автора, совершенно несправедливо объявляется "математикой" в отличие от традиционных областей, считающихся "по определению" физикой. Так, многие физики-теоретики, привыкшие к более традиционной парадигме квантовой теории поля, объявляют *все* струнные проблемы "математикой" только лишь на том основании, что возникли эти проблемы в контексте теории струн, в то время как *любые* проблемы формализма квантовой теории поля считают "физикой".

Безусловно, теория струн, как и любая другая интересная область теоретической физики, привела к возникновению новых математических задач и привлечению ранее незадействованного математического аппарата; более того, многие задачи теории струн "подтолкнут" развитие новых разделов математики. Однако нам представляется совершенно неправильным акцентировать внимание именно на данном аспекте, и ниже сделана попытка привлечь внимание читателя именно к простым и естественным *физическим* сторонам теории струн.

Другим "социальным" эффектом, который часто (и не вполне справедливо) ассоциируется только с теорией струн, является широкое и повсеместное внедрение принципов "маркетинга" в современную науку. Вызванная чисто "социальными" причинами постоянная "рыночная" реклама теории струн как науки, *уже* решившей все без исключения проблемы естествознания (при отсутствии каких бы то ни было строгих утверждений, хотя бы частично подтверждающих данную точку зрения), наносит жестокий вред желающим всерьез разобраться в данном интереснейшем направлении. Отчасти накладываясь на отсутствие типичной для более традиционных областей теоретической физики связи с экспериментом, широкая рекламная кампания теории струн нанесла ей гораздо больше вреда, чем пользы, особенно в среде достаточно консервативных физиков.

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что развитие теории струн в исторически существующих условиях было бы просто невозможно без ярких и смелых новых идей (например, идей А.М. Полякова [1]), которые лишь иногда и через много лет удавалось облечь в рамки более или менее строгих формулировок. Естественно, что на таком пути возникает достаточно много "мусора", а главной трудностью становится возможность захлебнуться в колоссальном потоке литературы, часто не несущей никакой полезной информации. Не претендуя никоим образом на объективность, особенно в данном вопросе, мы приводим в приложении 8.2 некоторые комментарии по поводу существующей на данную тему литературы.

О содержании обзора. Мы начнем с обсуждения в разделе 2 Стандартной модели калибровочных взаимодействий (электромагнитных, сильных и слабых) элементарных частиц и классической теории гравитации — общей теории относительности. Основная цель этого обсуждения — еще раз зафиксировать статус квантовой теории поля как совершенно удовлетворительной и экспериментально обоснованной модели наблюдаемых взаимодействий элементарных частиц, но сталкивающейся с серьезными трудностями при попадании в режим сильной связи, а главное, совершенно неудовлетворительной в качестве теории квантовой гравитации.

В разделе 3 мы попытаемся сформулировать основные принципы теории струн, исходя главным образом из геометрической формулировки струнной теории возмущений в терминах поляковского континуального интеграла. Важная мысль этого раздела заключается в том, что именно двумерная геометрия, лежащая в основе поляковской формулировки, ответственна за новый струнный подход к динамической природе пространства-времени и принципиальным образом отличает уже пертурбативную теорию струн от стандартной квантовой теории поля. Мы также обсудим суперсимметрию как источник появления фермионов и эффективные действия Фрадкина – Цейтлина, являющиеся наиболее удобным способом провести "мостик" между теорией струн и эффективными теориями поля.

Раздел 4 посвящен современным попыткам в теории струн выйти за рамки теории возмущений. Цель данного раздела — пояснить главные идеи, на которых основаны эти попытки: идею ***дуальности*** между теориями в сильной и слабой связи, а также с необходимостью возникающие в непертурбативной теории струн классические протяженные объекты. В качестве иллюстрации прогресса в изучении непертурбативных эффектов, ставшего результатом применения новых струнных идей, мы обсудим теорию Виттена – Зайберга, позволяющую, в частности, несколько продвинуться в понимании механизма ***конфайнмента***.

Раздел 5 посвящен целиком одной из интереснейших новых задач теории струн — попытке описания неабелевых калибровочных теорий в режиме сильной связи на языке гравитации (или теории замкнутых струн). Наконец, в разделе 6 мы остановимся на ряде других современных направлений, выросших из теории струн. Этот раздел рассчитан на наиболее продвинутых читателей (то же самое в большой степени относится к разделу 4.6). Части текста, содержащие технические подробности или сложные для понимания, выделены более мелким шрифтом.

2. Физика элементарных частиц. Калибровочные теории и гравитация

В течение последних десятилетий в теории элементарных частиц не произошло никаких существенных изменений. По-прежнему в центре внимания остаются две важнейшие фундаментальные проблемы: конфайнмент (или проблема невылетания кварков из адронов) и квантовая теория гравитации[5], в то время как все остальное находит практически полное объяснение в рамках Стандартной модели. Скорее всего, решение этих двух задач невозможно без прогресса в понимании свойств калибровочных теорий поля и общей теории относительности в области сильной связи, т.е. там, где оказываются неприменимыми стандартные теоретико-полевые методы, на которых основана модель электрослабых взаимодействий Вайнберга – Салама и квантовая хромодинамика (КХД) в области высоких энергий.

Стандартная модель в основных чертах представляет собой неабелеву калибровочную теорию с группой $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ (последний сомножитель отвечает цвету и сильному взаимодействию) и полями материи трех поколений [5] (см. также [6]). Расчеты производятся с использованием техники калибровочных полей [4] в области малых констант связи по теории возмущений, и их результаты[6] блестящим образом согласуются с экспериментом (см., например, [45]). С чисто теоретической (или, как уже говорилось, эстетической) точки зрения Стандартная модель "режет глаз" наличием в ней по сути дела "внешних" параметров (таких, скажем, как угол Вайнберга) и, кроме того, отсутствием полного описания спонтанного нарушения симметрии — эффекта Хиггса, ответственного за появление масс у неабелевых W- и Z-бозонов. Тем не менее Стандартная модель является абсолютно самосогласованной, в том числе перенормируемой (что было отмечено Нобелевской премией по физике [39]), квантовой теорией поля.

Что касается гравитации, то "наблюдаемая часть" по-прежнему практически сводится к нулю, в той мере, в какой можно повлиять на выбор той или иной квантовой теории гравитации. Насколько нам известно, на сегод-

[5] Точнее, это проблемы физики элементарных частиц в широком смысле, имеющем отношение к теории струн. В более узком смысле вообще можно сомневаться в существовании проблемы квантования гравитации.

[6] Кроме нейтринных осцилляций (см., например, обзор в *УФН* [37]).

няшний день нет по крайней мере прямого экспериментального подтверждения существования гравитонов и по-прежнему отсутствуют четкие и однозначные экспериментальные выводы по проблемам темной материи и космологической постоянной (см., например, [38]). Мнения экспертов сходятся разве лишь в том, что темная материя скорее всего существует, а космологическая постоянная все-таки не равна нулю. Несмотря на растущую точность экспериментальных методов в астрофизике, имеющихся данных безнадежно мало, для того чтобы хотя бы как-то очертить и ограничить круг допустимых моделей, не говоря уже о том, что сама по себе идея применимости многих физических теорий для построения модели Вселенной вызывает большие сомнения. Попытки описать Вселенную на языке *микро*мира, т.е. в рамках квантовой механики или квантовой теории поля, представляются совершенно физически безосновательными, если не абсурдными. Поэтому при обсуждении проблем квантовой гравитации нам придется довольствоваться чисто теоретическими и эстетическими критериями.

2.1. Калибровочные теории поля

Калибровочные теории (или теории безмассовых векторных полей) описывают все взаимодействия, кроме гравитационного. Теорию калибровочных полей можно сформулировать без привлечения струнных принципов, и в некоторой области энергий она является замкнутой физической теорией. Тем не менее взгляд на теорию калибровочных полей, как на "производную" от теории струн, ведет к ее более глубокому пониманию и уже привел к новым красивым результатам.

В калибровочных теориях взаимодействие материи осуществляется с помощью обмена безмассовыми калибровочными векторными бозонами. В случае электродинамики или абелевой теории калибровочной группой является группа U(1), т.е. существует единственное векторное поле $A_\mu(x)$ (фотоны). В неабелевой теории (или, что то же самое, калибровочной теории полей Янга–Миллса [4]) поля удобнее всего представлять матрицами из алгебры Ли соответствующей калибровочной группы $\mathbf{A}_\mu(x) \equiv \|A_\mu^{ij}\|$ (глюоны), например антиэрмитовыми бесследовыми матрицами размера $N \times N$ в случае калибровочной группы $\mathrm{SU}(N)$.

Минимальное взаимодействие вводится "удлинением" производной

$$\partial_\mu \to \mathbf{D}_\mu = \partial_\mu + \mathbf{A}_\mu \tag{2.1}$$

или

$$\mathrm{D}_\mu^{ij} = \partial_\mu \delta^{ij} + A_\mu^{ij}\,,$$

если поле взаимодействует с материей, преобразующейся по представлению калибровочной группы, элементы которого нумеруются индексом i. Калибровочно-инвариантный лагранжиан полей Янга–Миллса имеет вид

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{F}_{\mu\nu}^2\,, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu]\,. \tag{2.3}$$

В случае электродинамики поля — просто числа (а не матрицы), поэтому в формуле (2.3) исчезает коммутатор (приводящий к самодействию в (2.2)) и можно не писать след по матрицам Tr.

Для Стандартной модели в качестве калибровочной группы нужно взять $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ и добавить к (2.2) лагранжиан полей материи (электронов, кварков и т.п.) с "удлиненной" производной (2.1), после чего проводить квантовополевые вычисления, развивая теорию возмущений по константе связи g. Такая теория, вообще говоря, уже не является фундаментальной на уровне калибровочных теорий (как квантовополевых теорий возмущений), так как содержит явно абелев фактор U(1) с растущей константой на малых расстояниях: теория поля с контролируемым поведением на малых расстояниях обязана быть неабелевой. В дальнейшем мы ограничимся компактными (для целочисленности зарядов!) неабелевыми группами $\mathrm{SU}(N)$, считая все остальные калибровочные группы чистой экзотикой.

Причиной нефундаментальности абелевых теорий является знаменитый "нуль-заряд" (или "московский нуль" в электродинамике), что на квантовополевом жаргоне означает рост эффективного заряда на малых расстояниях. Физическая природа такого поведения заключается в экранировке заряда виртуальными электрон-позитронными парами материи, в то время как сами U(1)-поля не заряжены. Технически однопетлевые поправки к эффективному заряду приводят к следующей зависимости эффективного заряда от масштаба энергий μ:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\ln\mu} \equiv \beta(g) = b_0 g^3 + \ldots\,, \tag{2.4}$$

где коэффициент

$$b_0 \propto N_F - N_V \tag{2.5}$$

определяется *разностью* вкладов полей материи N_F и собственно калибровочных полей N_V, распространяющихся в петле на диаграмме, представленной на рис. 1. В электродинамике самодействие фотонов отсутствует ($N_V = 0$) и коэффициент b_0 положителен, т.е. заряд растет с увеличением μ. Это означает, что на *малых* расстояниях собственно электродинамика не определена, т.е. не может быть фундаментальной теорией. При этом электродинамика остается прекрасной эффективной теорией на *больших* расстояниях, где константа связи $g_{\mathrm{QED}} \equiv e$ мала[7].

Ситуация принципиально отличается для *неабелевых* калибровочных теорий, где существует *анти*экранировка зарядов *заряженными* (по цвету) калибровочными

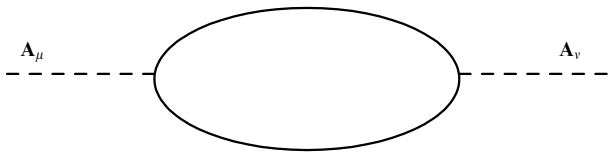

Рис. 1. Однопетлевая диаграмма, возникающая при вычислении поправок к эффективному заряду. В электродинамике из тождеств Уорда следует, что при вычислении эффективного заряда можно ограничиться данной диаграммой.

[7] Это верно в квантовой теории поля, но не в теории твердого тела, где вместо $e^2/mc \sim 1/137$ параметром разложения является $e^2/mv_F \sim 1$.

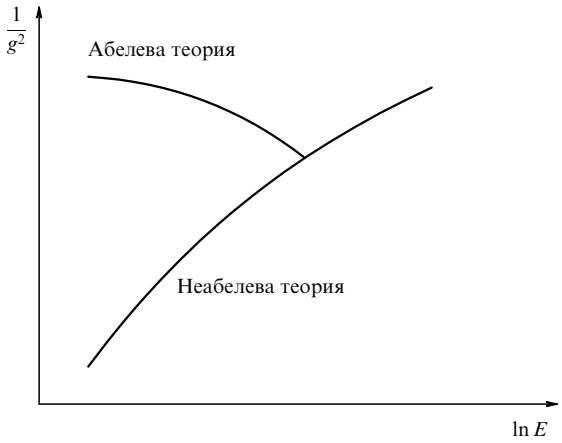

Рис. 2. Зависимости эффективных констант связи от энергии в абелевых и неабелевых калибровочных теориях. Верхняя кривая отвечает нуль-заряду, нижняя — асимптотической свободе.

полями и $N_V \neq 0$ из-за наличия самодействия глюонов. Это приводит к возможности существования асимптотической свободы [67], т.е. ослабления взаимодействия на малых расстояниях при $N_F < N_V$. Разницу между нуль-зарядной и асимптотически-свободной теориями поясняет рис. 2.

Естественный выход из такой ситуации — считать, что электродинамика является "частью" некоторой неабелевой теории, от которой она "отщепляется" на некотором масштабе нарушения неабелевой калибровочной группы. В этом случае неабелеву калибровочную теорию (особенно в суперсимметричном случае) можно считать "фундаментальной", по крайней мере в некоторой области энергий — существенно до того, как необходимо учитывать эффекты гравитации. С этой точки зрения *перенормируемость* калибровочных теорий означает простую вещь: лагранжиан (2.2) является достаточно удачным и описывает физику в некотором широком диапазоне энергий, если в качестве константы связи g подставлять соответствующее значение при данной энергии; общий вид лагранжиана сохраняется (в нем не возникают новые члены при переходе от одного значения энергии к другому).

2.2. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии

Обсудим теперь, как на некотором масштабе энергий калибровочная группа (частично) может превратиться в абелеву. Наиболее естественным образом это происходит, если в теории есть скаляры в присоединенном представлении калибровочной группы (скажем, как следствие суперсимметрии). Предположим, что скалярный потенциал устроен так, что в минимуме конденсаты или вакуумные средние скалярных полей отличны от нуля. Для поля в присоединенном представлении калибровочной группы $\mathrm{SU}(N)$ это означает, что вакуумное среднее $\boldsymbol{\phi}$ всегда можно выбрать в диагональном виде:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 & & & \\ & \phi_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \phi_N \end{pmatrix}_{\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\phi} = \sum \phi_j = 0}, \tag{2.6}$$

используя калибровочную инвариантность. При этом калибровочно-инвариантными являются величины типа $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\phi}^k$ или их "производящие функции"

$$P_N(\lambda) = \det(\lambda - \boldsymbol{\phi}) = \prod_{i=1}^{N} (\lambda - \phi_i)\,. \tag{2.7}$$

Полное число алгебраически независимых параметров $\{\phi_i\}$ равно рангу группы, в наиболее часто рассматриваемом случае $\mathrm{rank}\,\mathrm{SU}(N) = N - 1$. Принято говорить, что эти функции являются координатами на пространстве параметров или ***пространстве модулей*** калибровочной теории.

Благодаря эффекту Хиггса внедиагональная часть матрицы калибровочного поля $\mathbf{A}_\mu$ при $\boldsymbol{\phi} \neq 0$ становится массивной, так как взаимодействие

$$[\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_\mu]_{ij} = (\phi_i - \phi_j)\mathbf{A}_\mu^{ij} \tag{2.8}$$

превращается буквально в массовый член:

$$\sum (\phi_i - \phi_j)^2 (\mathbf{A}_\mu^{ij})^2 = \sum (m_{\mathrm{W}}^{ij})^2 (\mathbf{A}_\mu^{ij})^2\,, \tag{2.9}$$

в лагранжиане, в то время как диагональная часть, согласно (2.9), остается безмассовой, т.е. калибровочная группа $\mathrm{G} = \mathrm{SU}(N)$ нарушается механизмом Хиггса[8] до $\mathrm{U}(1)^{\mathrm{rank}\,\mathrm{G}} = \mathrm{U}(1)^{N-1}$.

Таким образом, в ситуации общего положения на масштабе порядка $\boldsymbol{\phi}$ (скалярное поле имеет размерность массы) неабелева калибровочная группа нарушается до абелевой, в простейшем случае группы SU(2) она приводит буквально к электродинамике. В дальнейшем даже в случае группы $\mathrm{U}(1)^{N-1}$ мы будем называть такую теорию (обобщенной) электродинамикой, а соответствующие заряды — электрическими.

2.3. Непертурбативные эффекты: инстантоны и монополи

В отличие от электродинамики неабелевы калибровочные теории существенно нелинейны, так как лагранжиан (2.2) содержит кубичные и квартичные по полям Янга–Миллса члены. Это означает, что уравнения движения нелинейны даже в отсутствие материи, а нелинейные уравнения, как правило, имеют огромное количество нетривиальных решений, связанных (в случае неабелевых калибровочных теорий) с нетривиальными топологическими свойствами калибровочных групп.

Влияют ли нетривиальные решения на физику элементарных частиц? Ответ на этот вопрос пока гипотетический, хотя из общих соображений, казалось бы, ясно, что их влияние может быть очень существенным в области сильной связи. Действительно, исходя из общих принципов квантовой теории, мы знаем, что основной вклад классической траектории в квантовую амплитуду (интеграл Фейнмана) есть не что иное, как $\exp(-S/\hbar)$, где S — классическое действие на данной конфигурации. Для теории неабелевых калибровочных полей действие, или проинтегрированный по пространству-времени лагранжиан (2.2), дает вклады типа $\exp(-\mathrm{const}/g^2)$, которые экспоненциально подавлены в области слабой связи. Однако из тех же соображений вполне возможно, что те же вклады окажутся гораздо более существенными в

[8] В ситуации общего положения, т.е. когда $\phi_i \neq \phi_j$ при $i \neq j$. Если же собственные значения (2.6) частично совпадают, то в нарушенной группе остается неабелев фактор $\mathrm{SU}(K)$ с $K < N$.

области сильной связи, т.е. там, где "запрятаны" самые принципиальные и пока непонятные эффекты. Поэтому классические решения, по-видимому, чрезвычайно важны в области сильной связи.

На сегодняшний день из классических решений неабелевых калибровочных теорий наиболее существенную роль играют *инстантоны*, или псевдочастицы [71, 72, 34]. Инстантоном называется "локализованная" в четырехмерном евклидовом пространстве-времени конфигурация полей, удовлетворяющая уравнениям (анти)самодуальности

$$\mathbf{F} = \pm{}^*\mathbf{F} \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_{\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\mathbf{F}_{\lambda\rho} \equiv \pm\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$.

Любое решение уравнений самодуальности (2.10) является решением уравнений движения полей Янга–Миллса $\mathbf{D}_\mu\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$ (обратное неверно!) в силу *тождеств* Бианки $\mathbf{D}_\mu\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\mathbf{D}_\nu\mathbf{F}_{\lambda\rho} \equiv 0$ (т.е. соотношений, выполняющихся для любых полей). Для инстантонов

$$S = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2g^2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{Tr}\,\mathbf{F}_{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu} = \frac{8\pi^2 n}{g^2}\,, \tag{2.11}$$

где n — топологический заряд, определяющийся тем, сколько раз трехмерная сфера большого радиуса в четырехмерном пространстве-времени наматывается на компактную калибровочную группу. Как будет видно из дальнейшего, в некоторых существенных примерах можно будет сказать, в известном смысле, что непертурбативные вклады *исчерпываются* инстантонными конфигурациями.

Простейшее (одноинстантонное [72]) решение уравнений самодуальности (2.10)

$$\mathbf{A}_\mu \propto \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\,\frac{x_\nu}{x^2+\rho^2}\,, \qquad \mathbf{F}_{\mu\nu} \propto \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}\,\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^2} \tag{2.12}$$

имеет вид некоторого "колокола" в четырехмерном пространстве с центром, выбранным в точке $x_0 = 0$. В формуле (2.12) $\boldsymbol{\eta}_{\mu\nu}$ — числовые матрицы 't Хоофта (см., например, [34]). Решение (2.12) отвечает топологическому инстантонному заряду $n = 1$.

Другим важным непертурбативным эффектом является *монополь* — частица с магнитным зарядом. В абелеву теорию монополи могут входить лишь как внешние источники, однако в неабелевых калибровочных теориях они естественно возникают как конфигурации дополнительных (скалярных или хиггсовских) полей [69]. Простейшая монопольная конфигурация возникает в результате редуцирования уравнения (2.10), если считать поля не зависящими от времени и $\mathbf{A}_0 = \boldsymbol{\Phi}$ дополнительным скаляром. Тогда уравнения самодуальности (2.10) превращаются в уравнения Богомольного:

$$\mathbf{D}_i\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\mathbf{F}_{jk} \tag{2.13}$$

$(i, j = 1, 2, 3)$.

Так же как в случае инстантонов, топологическая структура монополей нетривиальна: они не могут быть получены непрерывной деформацией конфигурации с нулевыми полями — "мешает" топологический заряд. Массы монополей аналогичны действиям инстантонов. Для так называемых БПС-монополей (монополей Богомольного–Прасада–Соммерфельда [73]), удовлетворяющих уравнениям (2.13), массы в точности равны

$$m_{\mathrm{mon}}^{ij} = \frac{4\pi}{g^2}\,m_{\mathrm{W}}^{ij} = \frac{4\pi}{g^2}\,(\phi_i - \phi_j)\,. \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что в области слабой связи монополи — это очень *тяжелые* частицы. Ситуация, однако, может кардинально измениться при переходе в область сильной связи, хотя формула (2.14) там буквально неверна, и монополи могут оказаться даже *легче* обычных (электрически заряженных) частиц. При этом конденсация легких монополей может привести к конфайнменту или удержанию электрических зарядов (по аналогии с эффектом Мейсснера в сверхпроводимости).

Таким образом, непертурбативные эффекты, связанные с существованием нетривиальных классических конфигураций, могут сыграть существенную роль при описании теории в области сильной связи. Одной из технических проблем является то, что эти эффекты обычно сильно "смазаны" из-за наличия поправок теории возмущений. Для того чтобы получить непертурбативную картину в более "чистом" виде, нужно обратиться к суперсимметричным теориям [65, 78, 68] (см. также [51, 52, 77], книги [7, 2] и обзоры [33, 41, 42, 44]).

2.4. Суперсимметричные калибровочные теории

Отличительной особенностью суперсимметричных теорий является одинаковое число бозонных и фермионных состояний с ненулевой энергией. Поэтому в петлевых диаграммах суперсимметричных квантовых теорий поля из-за разности знаков бозонных и фермионных вкладов происходит существенное сокращение. Это можно понять, например, глядя на формулу (2.5), если считать N_F вкладом фермионных, а N_V вкладом бозонных петель.

Добавив в соответствующие лагранжианы суперпартнеры векторных полей и полей материи, неабелевы калибровочные теории можно считать вполне удовлетворительными для описания теории взаимодействий (кроме гравитационного) в некоторой, достаточно большой области энергий. Перенормируемость по-прежнему означает не что иное, как то, что теория описывается (суперсимметричным) лагранжианом полей Янга–Миллса с добавленными к нему членами взаимодействия с материей в некоторой заданной области энергий. *Единственное*, что нужно добавить к такому лагранжиану, — это прескрипция, согласно которой следует менять значение константы связи $g = g(\mu)$ (где μ — масштаб), переходя от одного масштаба к другому. Именно за это отвечает уравнение ренормгруппы (2.4), которое в суперсимметричных теориях устроено гораздо проще из-за сокращения петлевых поправок в теории возмущений.

Одной из главных феноменологических проблем суперсимметричных калибровочных теорий[9] является наличие в спектре скалярных полей — неизбежных супер-

[9] Феноменология суперсимметричных квантовых теорий поля выходит далеко за рамки данного обзора (см., например, недавний обзор в *УФН* [41]). Это достаточно интересная (и модная) тема, единственный недостаток которой — отсутствие экспериментального подтверждения существования суперпартнеров известных частиц. С нашей точки зрения, гораздо существеннее, что суперсимметричные теории являются замечательной "теоретической лабораторией" для изучения непертурбативных свойств реалистичных калибровочных теорий.

партнеров фермионов материи и полей Янга – Миллса в случае расширенной суперсимметрии, когда каждое поле имеет более одного суперпартнера. В силу суперсимметрии возбуждения скалярных полей должны иметь те же массы, что и возбуждения фермионов (и векторных полей), что в корне противоречит наблюдаемому в реальном мире спектру. Это означает, что в нашем мире суперсимметрия нарушена, по крайней мере на некотором масштабе, динамическое определение которого является важнейшей задачей теории. Тем не менее, если верить в то, что эта задача будет в конце концов решена, выше этого масштаба энергий (т.е. на малых расстояниях) структура суперсимметричной теории поддается исследованию, поскольку она не так сильно "смазана" петлевыми поправками.

В отличие от ненулевых вакуумных значений других полей конденсаты скаляров $\langle \boldsymbol{\phi}_A \rangle \neq 0$ не нарушают пространственно-временну́ю симметрию. При этом в низкоэнергетической эффективной теории все параметры лагранжиана (массы, константы связи) становятся, вообще говоря, функциями этих конденсатов или вакуумных средних, т.е., как мы уже говорили, функциями на ***пространстве модулей*** суперсимметричных калибровочных теорий. В калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией (с числом генераторов $\mathcal{N} = 2$ и выше в терминах майорановских фермионов) для абелевых скалярных полей нельзя написать согласованную с суперсимметрией потенциальную энергию. В неабелевой теории единственная возможность написать потенциальный член (не нарушая расширенную суперсимметрию) — взять сумму коммутаторов матричных полей $\{\boldsymbol{\phi}_A\}$ вида $\sum_{A<B} \mathrm{Tr}\,[\boldsymbol{\phi}_A, \boldsymbol{\phi}_B]^2$. В теориях с такой потенциальной энергией на больших расстояниях выживают лишь легкие абелевы поля (в электродинамике; см. (2.9)) вместе с безмассовыми скалярами или *модулями* — полями, которые могут принимать в вакууме любое значение.

Таким образом, в калибровочных теориях с расширенной суперсимметрией имеется бесконечное число (параметрическое семейство) вакуумов, а задача теории — найти спектр и эффективные константы связи низкоэнергетической теории как функции вакуумных конденсатов. Важнейшим обстоятельством при этом является то, что суперсимметрия налагает дополнительные требования на пространство конденсатов: в частности, это пространство является комплексным (а иногда и, более того, кэлеровым, специальным кэлеровым или гиперкэлеровым), поэтому класс возможных функций существенно ограничен. Все подобные соображения применимы, естественно, только в том случае, когда суперсимметрия (или другая симметрия) является точной симметрией квантовой теории, т.е. не нарушается при квантовании.

В теориях с минимальной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией генерируется абелев суперпотенциал и *модули*, вообще говоря, становятся массивными, т.е. приобретают фиксированные значения в вакууме. В комплексных координатах на пространстве модулей суперпотенциал — это голоморфная функция $W(\phi_A)$ и вакуумы определяются условием $\mathrm{d}W = 0$, так как потенциал $V(\phi, \bar{\phi}) \propto \propto \sum_A |\partial W/\partial \phi_A|^2$. Геометрический смысл появления комплексных многообразий в теории поля абсолютно не ясен, и, как мы увидим ниже, довольно естественно считать его "артефактом" теории струн. Совершенно нетривиально, что комплексная геометрия позволяет иногда предсказать *точный* вид эффективных низкоэнергетических лагранжианов с учетом непертурбативных эффектов (см. раздел 4.5).

2.5. Общая теория относительности как эффективная теория

Появление инстантонов и других непертурбативных решений существенно расширило горизонт теории сильных взаимодействий и ясно продемонстрировало, что физика элементарных частиц не сводится к теории возмущений, рамки которой в КХД ограничены областью высоких энергий (режим асимптотической свободы), где хорошо работает стандартная формулировка теории калибровочных полей [4]. Тем не менее инстантонные вычисления оказались лишь следующим приближением в КХД, явно недостаточным для того, чтобы описать конфайнмент кварков и другие эффекты в области сильной связи.

Что касается квантования общей теории относительности, то даже суперсимметрия [68, 7] как механизм сокращения расходимостей не позволяет надеяться на появление согласованной теории квантовой гравитации в рамках квантовой теории поля (см., например, [44]). Несмотря на многочисленные попытки создания теории квантовой гравитации в рамках квантовой теории поля (например, как калибровочной теории поля с бесконечномерной группой калибровочной симметрии), такой подход представляется совершенно безосновательным по ряду достаточно простых причин. Мы попытаемся обсудить их уже в данном разделе и потом будем много раз возвращаться к этим вопросам, говоря о теории струн.

Прежде всего, заметим, что под квантовой теорией поля, если прямо не сказано противоположного, все время будет пониматься *локальная* квантовая теория поля, удовлетворяющая условию перенормируемости. Локальная квантовая теория поля (с лагранжианом, зависящим не более чем от вторых производных) обеспечивает хорошо определенную процедуру квантования *свободного* поля — бесконечной системы частиц и античастиц, отвечающей квадратичной по полям части лагранжиана. Взаимодействие в такой теории вводится старшими по степеням полей членами, и в приближении слабой связи релятивистская квантовая теория поля прекрасно описывает процессы рассеяния, автоматически учитывает вклады античастиц в физические процессы, что на сегодняшний день является ее главным достижением.

Гораздо более тонким аспектом является перенормируемость — зависимость констант связи от масштаба энергий. В перенормируемой квантовой теории поля взаимодействие можно описать *конечным* числом констант (часто единственной константой, как в калибровочных теориях; см. раздел 2.1), которые *слабо* зависят от масштаба. В реальности "слабая зависимость" означает логарифмическую зависимость безразмерных констант связи, опять же как в калибровочных теориях или теории $\lambda\phi^4$ в четырех измерениях. Перенормируемость при этом отвечает тому, что в некотором широком диапазоне энергий теория описывается одним и тем же лагранжианом: новые вершины взаимодействия не добавляются, а константы в имеющихся вершинах слабым образом зависят от этого масштаба.

В теориях с размерными константами связи и/или бесконечным набором вершин взаимодействия все это по сути дела теряет смысл. Размерность константы взаимодействия, точнее, "отрицательная" размерность по массе, как у ньютоновой константы гравитационного взаимодействия $\gamma_{\rm N} \sim 1/M^2$ в четырехмерии (в D-мерном пространстве-времени $\gamma_{\rm N}^{(D)} \sim M^{2-D}$), приводит к неограниченному росту поправок теории возмущений вида

$$1 + \gamma_{\rm N} \Lambda^{D-2} + \ldots \tag{2.15}$$

при снятии обрезания $\Lambda \to \infty$. Таким образом, на любом конечном масштабе теория начинает зависеть от того, что происходит на малых расстояниях. Это полностью противоречит идее перенормируемости, заключающейся в том, что, введя зависимость от масштаба в константы связи, о малых расстояниях можно забыть.

Такая концепция оказывается приемлемой для перенормируемых (суперсимметричных) калибровочных теорий, но совершенно неприменима к теории гравитации. Теория гравитации (с размерной константой и бесконечным числом вершин взаимодействия гравитонов $h_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}(x) - \delta_{\mu\nu}$) "помнит" о малых расстояниях и *не является* перенормируемой квантовой теорией поля. К такому же выводу приводит и анализ "решеточной" или дискретизованной гравитации, в которой (за исключением двумерного случая [62, 99–101], имеющего непосредственное отношение к теории струн) отсутствует непрерывный предел, в отличие, скажем, от решеточных калибровочных теорий.

Различие между теорией гравитации и квантовой теорией поля лежит на самом деле гораздо глубже. Квантовая теория поля вычисляет не "абсолютное" значение физической величины, а лишь ее "относительное" значение — разницу между значениями этой величины на заданном масштабе μ и в точке нормировки, т.е. на некотором фиксированном масштабе μ_0. При этом, конечно, в перенормируемых квантовых теориях поля (например, в калибровочных теориях) в точке нормировки достаточно зафиксировать лишь конечное (обычно малое) число величин, после чего теория поля способна предсказывать *любые* сечения рассеяния. Это, однако, не отменяет указанного принципиального свойства квантовой теории поля, особенно наглядно проявляющегося в физике твердого тела, где существует естественное "обрезание" (например, размер элементарной ячейки атомной решетки) и можно провести четкую грань между "макроскопическими" величинами, не зависящими от этого размера, и "микроскопическими".

Простейший пример — энергия любого состояния, которая определяется уже в свободной теории не абсолютно, а относительно, скажем, "энергии вакуума", вклад в которую наивно дает бесконечное число вакуумных энергий гармонических осцилляторов

$$E_{\rm vac} \propto \frac{\hbar}{2} \int {\rm d}\mathbf{p}\, \omega(\mathbf{p}) = \frac{\hbar}{2} \int {\rm d}\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,. \tag{2.16}$$

В теории поля без гравитации эта величина *не* наблюдаема, поэтому ее можно считать "точкой нормировки" энергий или началом отсчета, т.е. положить $E_{\rm vac} = 0$. Если же включить гравитацию, то согласно принципу эквивалентности энергия вакуума является источником гравитационного поля.

Квантовополевая формула (2.16) дает выражение, не сопоставимое с наблюдаемым значением космологической постоянной при любом обрезании (или, точнее, на масштабе нарушения суперсимметрии). Фундаментальная теория, описывающая гравитацию, должна уметь вычислять "абсолютные" значения, а значит, эта теория принципиально не может быть квантовой теорией поля. Вообще, вопрос о вакуумной энергии или космологической постоянной является принципиальнейшим нерешенным вопросом современной физики, и мы еще несколько раз будем возвращаться к нему в данном обзоре.

Из структуры поправок (2.15) видно, что на малых расстояниях $l^{-1} \sim M_{\rm Pl} = \gamma_{\rm N}^{1/(2-D)}$ гравитационное взаимодействие, вообще говоря, становится сильным. Проблемы сильного гравитационного взаимодействия и связанные с ними вопросы теории гравитации в сильных полях, например в черных дырах, еще менее изучены, чем проблемы теории калибровочных полей в области сильной связи. Одним из хорошо известных эффектов теории черных дыр является линейная связь между числом состояний или энтропией S и *площадью* горизонта (Area) черной дыры: $S = {\rm Area}/4\gamma_{\rm N}$ [66]. Это утверждение в корне противоречит ожиданиям квантовой теории поля, в которой число состояний всегда пропорционально объему (а не площади) и является косвенным аргументом в пользу того, что в сильных гравитационных полях фундаметальными становятся некие одномерные структуры; этот вопрос подробно разбирается в [29]. Совершенно не будучи определяющим, это — один из косвенных аргументов в пользу теории струн.

3. Основные принципы теории струн

Для построения согласованной картины квантовой гравитации необходимо фундаментальное изменение теории на планковских масштабах, в основе которого лежит переход от точечных к одномерным протяженным объектам — струнам. В теорию струн изначально заложена размерная константа, которая по историческим причинам (см. формулу (3.7)) обозначается как α' и имеет размерность *квадрата* длины. В "фундаментальной" теории струн, претендующей на описание квантовой гравитации, этот размерный параметр не может быть ничем иным, кроме планковской длины, т.е. $\sqrt{\alpha'} \sim 10^{-33}$ см. Но, вообще говоря, численное значение α' можно выбрать иным — исходя из поставленной задачи. Скажем, в теории струн, примененной к описанию сильных взаимодействий на больших расстояниях, параметр α' должен быть порядка размера адрона (10^{-13} см).

Отметим сразу, что α' — *единственная* константа, изначально закладываемая в теорию струн "руками" и имеющая ясный смысл *масштаба*, на котором становятся существенными струнные эффекты. Других констант в теории струн нет, даже безразмерная константа струнного взаимодействия $g_{\rm str}$, как мы увидим ниже, является не "настоящей" константой, а связана с вакуумным конденсатом фонового поля так называемого дилатона, т.е. на самом деле является динамическим параметром в теории.

Теория струн существенным образом отличается от квантовой теории поля. Мы будем многократно возвращаться к обсуждению этого вопроса, а сейчас отметим

лишь основные моменты. В теории поля и теории струн:

по-разному осуществляется "счет в петлях", т.е. промежуточные состояния, распространяющиеся в петлях, суммируются, вообще говоря, с различным весом;

существенно различаются размерная редукция и, вообще, теория в пространстве-времени с компактными измерениями;

совершенно по-разному появляется пространство-время; для теории струн характерна "динамическая" природа пространства-времени, в том числе существование, например, "зеркальных пар", или многообразий, *не различаемых* теорией струн;

по-разному устроены принципы локальности и причинности.

Как было впервые замечено Шерком и Шварцем [53], теория струн естественным образом приводит к объединению калибровочных полей и гравитации в единое целое, так как в спектре струн автоматически возникают *безмассовые* векторные поля и безмассовые поля спина 2.

3.1. Калибровочные поля и гравитоны

Обсуждение основ теории струн мы начнем со старого наблюдения, что теория одномерных протяженных объектов естественным образом содержит векторные поля и гравитоны. Наиболее простой (хотя и не самый строгий) способ увидеть это — рассмотреть струнное поле или функционал от струнного контура $\Phi\big[X_\mu(\sigma)\big]$ и его разложение по струнным гармоникам (с коэффициентами Фурье α_n^μ)

$$X_\mu(\sigma) = x_\mu + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\, \alpha_{-n}^\mu \exp\left(\mathrm{i}n\sigma\right), \tag{3.1}$$

которое, очевидно, выглядит следующим образом:

$$\Phi\big[X_\mu(\sigma)\big] = \phi(x) + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu + \ldots \tag{3.2}$$

При квантовании $[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n\delta_{n+m,0}\delta^{\mu\nu}$ коэффициенты Фурье превращаются в операторы рождения и уничтожения струнных возбуждений, а формулу (3.2) лучше всего представлять себе как действие *оператора* $\Phi\big[X_\mu(\sigma)\big]$ на фоковский вакуум $|0\rangle$ в пространстве состояний открытой струны. Тогда первый член в (3.2) означает, что собственно вакууму отвечает волновая функция скалярного поля $\phi(x)$, а следующему прямо за ним состоянию $\alpha_{-1}^\mu|0\rangle$ — векторное поле $A_\mu(x)$; в разложении (3.2) можно учитывать лишь коэффициенты разложения (3.1) или гармоники струны α_n^μ с $n<0$ (операторы рождения), так как $\alpha_n^\mu|0\rangle = 0$ при $n>0$.

Квантовая механика струны и требование инвариантности относительно замен "внутренних" координат на мировой поверхности немедленно приводят к условию безмассовости векторных полей $A_\mu(x)$. Наиболее простое объяснение заключается в том, что две замены координат на мировом листе "съедают" две степени свободы, так что физическими степенями свободы являются лишь *поперечные* возбуждения, например α_{-1}^i $(i = 1, \ldots, D-2)$, если речь идет о векторном поле. Таким образом, вектор имеет $D-2$ физические компоненты (где D — размерность пространства-времени). Это автоматически означает, что векторное поле безмассовое или калибровочное (у массивного векторного бозона $D-1$ физическая компонента). Более строго это можно показать, глядя

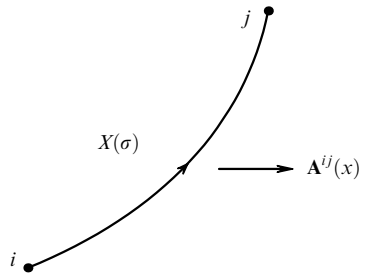

Рис. 3. Безмассовое неабелево векторное поле как открытая струна с кварками на концах.

на оператор массы или энергии возбуждений струны

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^i \alpha_{-n}^i - 1\right), \tag{3.3}$$

из вида которого следует, что спектр открытой струны содержит именно безмассовое векторное поле, но при этом начинается с тахиона $\phi(x)$, требующего дополнительных забот. Одним из наиболее эффективных способов преодолеть эту трудность является суперсимметрия.

Для того чтобы векторное поле $A_\mu(x)$ сделать неабелевым, концам струны нужно приписать дополнительные индексы [76], например фундаментального "кварк-антикваркового" представления. При этом поле станет матрицей $\|\mathbf{A}^{ij}\|$ в *присоединенном* представлении соответствующей калибровочной группы (рис. 3). Долгое время эта процедура проделывалась "руками" (амплитудам приписывались факторы Чана – Патона), пока, наконец, не стало ясно, что неабелева теория возникает более естественно, если допустить существование в теории так называемых ***D-бран*** (см. раздел 4.4). Наличие именно безмассовых векторных полей приводит к появлению калибровочных теорий в полевом пределе теории струн $\alpha' \to 0$, когда массы (3.3) остальных струнных гармоник $M^2 \sim N/\alpha'$ (где N — собственное значение оператора $\sum \alpha_n^i \alpha_{-n}^i$ числа "частиц", т.е. струнных гармоник в формуле (3.3)) становятся очень большими и их возбуждения в низкоэнергетической теории или на масштабах, много больших $\sqrt{\alpha'}$, можно не учитывать.

В суперсимметричной теории струн безмассовый сектор содержит векторные супермультиплеты, в которых остальные состояния достраиваются по суперсимметрии. В низкоэнергетическом пределе это приводит к суперсимметричной теории полей Янга – Миллса как эффективной теории безмассовых мод над возможным ***вакуумом теории струн***. Согласно современным общим представлениям квантовые теории поля (в частности, получаемые таким способом суперсимметричные калибровочные теории) можно рассматривать как эффективное описание физики в окрестности различных вакуумов теории струн. Эти вакуумы могут быть связаны друг с другом преобразованиями ***дуальности*** — *дискретными* преобразованиями, переводящими друг в друга различные вакуумы теории струн, а следовательно, и различные квантовые теории поля.

Аналогично формуле (3.2) устроено и разложение по модам в замкнутой струне, но, поскольку взаимодействие (например, с фоновыми полями) в замкнутом секторе осуществляется на всей поверхности мирового листа, нужно рассмотреть два набора гармоник, отве-

чающих независимо распространяющимся по поверхности мирового листа левым и правым волнам — решениям уравнений движения свободной струны $\alpha_n^\mu \exp\left[\mathrm{i}n(\tau+\sigma)\right]$ и $\tilde{\alpha}_n^\mu \exp\left[\mathrm{i}n(\tau-\sigma)\right]$. При этом спектр начнется опять же с тахиона (другого, с квадратом массы, по модулю вдвое большим, чем квадрат массы тахиона открытого спектра), а безмассовые поля будут отвечать состояниям $\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0\rangle$ или, точнее, их линейным комбинациям.

Разбив тензор второго ранга на неприводимые представления по группе Лоренца, легко видеть, что соответствующими полями являются, во-первых,

$$\left(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)\right)|0\rangle\, B_{\mu\nu}(x)\,, \tag{3.4}$$

т.е. антисимметричное тензорное поле $B_{\mu\nu}$, и, во-вторых,

$$\delta_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0\rangle \varphi(x)\,, \tag{3.5}$$

т.е. безмассовый скаляр, который обычно называется *дилатоном*. Именно вакуумное среднее дилатона есть не что иное, как струнная константа связи. Наконец, остальные компоненты образуют безмассовый и бесследовый симметричный тензор

$$\left(\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu - \frac{1}{D}\,\delta_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\lambda \tilde{\alpha}_{-1}^\lambda\right)|0\rangle G_{\mu\nu}(x)\,, \tag{3.6}$$

или *гравитон*.

Все приведенные в этом разделе рассуждения пока основаны на простейшей квантовой механике свободной струны. Включив взаимодействие (рис. 4), можно довольно быстро убедиться в двух следующих важнейших свойствах теории.

• Древесные амплитуды рассеяния безмассовых состояний открытых струн в пределе $\alpha' \to 0$ переходят в амплитуды рассеяния векторных калибровочных бозонов. Аналогичным образом амплитуды рассеяния состояний (3.6) замкнутого спектра переходят в амплитуды рассеяния гравитонов [53].

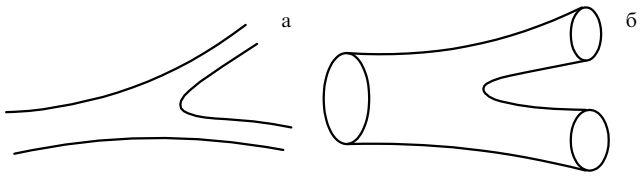

Рис. 4. Вершины взаимодействия открытых (а) и замкнутых (б) струн.

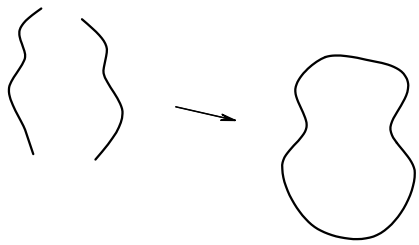

Рис. 5. Взаимодействие открытых струн приводит к появлению замкнутых струн.

• Взаимодействие двух открытых струн приводит к появлению замкнутых струн (рис. 5). Вместе с предыдущим замечанием это означает, что теории калибровочных полей, построенные в рамках теории струн, с необходимостью приводят к появлению гравитации.

3.2. Массивные поля и ультрафиолетовое обрезание

Обратимся теперь к массивным полям струнного спектра. Их массы M (см. формулу (3.3)) измеряются в единицах (обратной) струнной длины или массы Планка $\sqrt{n/\alpha'}$, где n — номер соответствующей струнной гармоники, или уровня возбуждения. Легко понять, что этот уровень линейным образом связан с (максимальным возможным) спином возбуждения J. Точная формула связи записывается в виде так называемой реджевской траектории — линейной функции[10]

$$J = \alpha(M^2) \equiv \alpha_0 + \alpha' M^2\,, \tag{3.7}$$

и из (3.3) следует, что для открытой струны $\alpha_0 = 1$. Связь спина и массы (3.7) была известна уже очень давно в теории сильных взаимодействий, после работ Венециано [49], Намбу и Гото [50] она стала предтечей теории струн. Отметим сразу, что в теории струн все возбуждения с большими спинами имеют массы порядка планковских, поэтому их наличие в теории никак не противоречит их отсутствию в видимом спектре, в отличие от этого, по-видимому, "неизлечимого порока" квантовых теорий поля с высшими спинами.

В пределе $\alpha' \to 0$ теория струн воспроизводит теорию точечных частиц. Из всей "башни" полей в этом пределе выживают лишь безмассовые (в предположении, что удалось решить проблему с тахионами тем или иным способом; подробнее мы обсудим тахионы в разделах 3.5 и 6.3). Размер струны можно оценить, например, вычислив коррелятор

$$\langle 0|\int \mathrm{d}\sigma\left(X(\sigma)-x\right)^2|0\rangle = \alpha' \sum_{n>0}\frac{1}{n^2}\,\langle 0|\alpha_n\alpha_{-n}|0\rangle \propto$$
$$\propto \alpha' \sum_{n>0}\frac{1}{n} \propto \alpha' \ln n_{\max} = \alpha' \ln\left(\sqrt{\alpha'}\,E_{\max}\right), \tag{3.8}$$

где $n_{\max}$ и $E_{\max}$ — "уровень" и энергия максимальной возбужденной струнной гармоники соответственно. Из формулы (3.8) видно, что размер струны порядка $\sqrt{\alpha'}$ (он растет, как очень медленно меняющаяся функция энергии), что оправдывает интерпретацию единственного (размерного) параметра в теории струн α' как квадрата струнной длины.

Наконец, заметим, что число квантовых состояний в струнном спектре очень быстро растет с ростом энергии возбуждений. При больших энергиях спектральная плот-

[10] Подчеркнем еще раз, что размерный параметр α' характеризует масштаб, на котором становятся существенными струнные эффекты. Поэтому значение α' различно для струн, возникающих при эффективном описании сильного взаимодействия на больших расстояниях, и "фундаментальных" струн, отвечающих квантовой гравитации. Пользуясь этим обозначением, первоначально введенным именно в контексте физики адронов, мы, тем не менее, если явно не сказано иного, будем считать параметр α' равным квадрату планковской длины.

ность ведет себя, как[11]

$$\rho(M) \propto \exp\left(2\pi\sqrt{\alpha'}\,M\right), \tag{3.9}$$

что приводит к совершенно необычным (и отличным от квантовой теории поля) свойствам теории струн на малых расстояниях, или при больших энергиях, — на планковском масштабе.

• Один из способов увидеть это уже в теории свободных невзаимодействующих струн — посмотреть на термодинамику струнных состояний. Если пренебречь взаимодействием, то свободная энергия имеет вид

$$F(\beta) \sim \int \mathrm{d}E\,\rho(E)\exp(-\beta E)\,. \tag{3.10}$$

Для плотности состояний струны (3.9) интеграл (3.10) сходится лишь при $\beta > \beta_{\mathrm{H}} = 2\pi\sqrt{\alpha'}$, или при температурах ниже температуры Хагедорна[12] $T_{\mathrm{H}} = 1/\beta_{\mathrm{H}} = 1/2\pi\sqrt{\alpha'}$. Это означает, в частности, что при температуре Хагедорна возможен фазовый переход [91]. Простые вычисления показывают, что при высоких температурах число (калибровочно-инвариантных) состояний в теории струн гораздо меньше, чем в квантовой теории поля: для "нормированной" свободной энергии в теории струн независимо от размерности D пространства-времени

$$\frac{F}{VT} \underset{T\to\infty}{\propto} T$$

вместо

$$\frac{F}{VT} \underset{T\to\infty}{\propto} T^{D-1}$$

в теории поля. Не будучи до конца исследованным, этот вопрос указывает на качественное сходство высокоэнергетических свойств теории струн с соответствующими (гипотетическими) свойствами теории гравитации.

• Другое проявление того же самого эффекта — нарушение "микролокальности" в теории струн, связанное с ростом спектральной плотности по закону (3.9). Если вычислить функцию Грина или пропагатор струны между "точечными" начальным и конечным состояниями (рис. 6) и исследовать сингулярности пропагатора, то легко увидеть, что они появляются, как в *нелокализуемой* теории, в некотором гиперболоиде, "залезающем" на расстояния порядка $\sqrt{\alpha'}$ в пространственноподобную область [92] (рис. 7).

• При больших энергиях амплитуды рассеяния в теории струн заметно отличаются от соответствующих амплитуд в квантовой теории поля более мягким поведением, что видно уже на примере амплитуды Венециано (см., например, [2]). За счет суммирования по вкладам бесконечного числа состояний в промежуточных каналах в амплитудах теории струн возникает "режущий" фактор при больших энергиях.

[11] Численный коэффициент при $\sqrt{\alpha'}M$ в формуле (3.9), вообще говоря, зависит от типа струнной модели. Буквально в формуле (3.9) этот коэффициент определен, как в теории замкнутых струн, где он отличается наибольшей универсальностью. Один из наиболее простых среди известных автору способов получить его для любой струнной модели — посмотреть на сингулярности струнных пропагаторов [97].

[12] Температура Хагедорна совпадает с хокинговской температурой черной дыры, гравитационный радиус которой равен длине струны $M\gamma_{\mathrm{N}} \sim \sqrt{\alpha'}$.

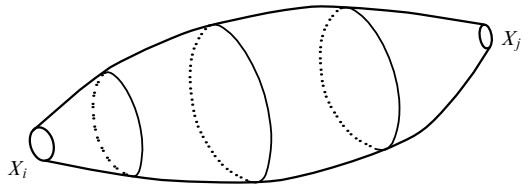

Рис. 6. Пропагатор замкнутой струны с фиксированными граничными контурами. Если их выбрать точечными, то такой пропагатор является функцией двух переменных $G(X_f, X_i)$ и его свойства можно сравнить со свойствами аналогичного объекта в квантовой теории поля.

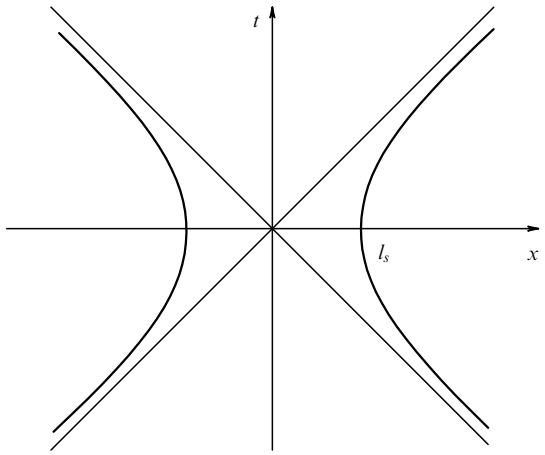

Рис. 7. Сингулярности пропагатора в теории струн. В отличие от локальной теории поля они расположены внутри гиперболоида, "залезающего" на расстояния $l_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}$ в пространственноподобную область.

Заметим, наконец, что противоположный полевому предел $\alpha' \to \infty$ (так называемые "нуль-струны") является чрезвычайно сингулярным. Этот предел представляет собой довольно сложную техническую задачу и скорее всего физически совершенно бессмыслен, так как отвечает теории при энергиях много выше планковских, т.е. в области, где ни теория поля, ни даже теория струн буквально неприменимы, и взятие такого предела в теории струн аналогично попытке использовать теорию поля за масштабом ультрафиолетового обрезания.

3.3. Струнная теория возмущений — сумма по двумерным геометриям

Пертурбативная структура теории струн определяется разложением *по петлям* (рис. 8)

$$\mathcal{F} = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{2g-2} F_g\,, \tag{3.11}$$

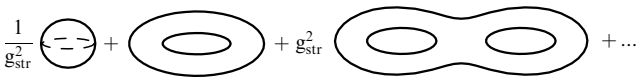

Рис. 8. Струнные "диаграммы Фейнмана", соответствующие первым трем членам ряда теории возмущений (3.11) для замкнутых струн. Древесный вклад (порядка $1/\mathrm{g}_{\mathrm{str}}^2$ в "струнной" нормировке (3.11)) отвечает сфере, однопетлевой вклад — тору ("бублику"), двухпетлевой — "кренделю", и т.д.

или по *родам* мировых листов — двумерных римановых поверхностей. Параметр разложения в (3.11) g_{str} — струнная константа связи. Заметим сразу, что разложение (3.11) написано для свободной энергии или *логарифма* статистической суммы (в отличие от квантовой теории поля), так как включает суммирование только по "связным диаграммам". Буквально разложение по петлям на рис. 8 справедливо для теории, в которой присутствуют только замкнутые струны, например для теории замкнутых бозонных струн или так называемых ***суперструн*** типа II [13], которые в основном и обсуждаются в данном обзоре. В теориях, где, кроме замкнутых, имеются также открытые струны, следует также добавить мировые листы с краем.

Отметим в связи с этим, что нормировка в разложении (3.11) и на рис. 8 выбрана так, что вклад каждого рода пропорционален степени струнной константы связи g_{str}, которая с точностью до знака равна *эйлеровой характеристике* соответствующей мировой поверхности. Именно поэтому разложение по родам начинается с g_{str}^{-2} и идет для замкнутых струн по *четным* степеням струнной константы связи. В теории открытых струн для поверхностей с краем будут возникать также нечетные степени g_{str}, означающие, в частности, что струнная константа в секторе замкнутых струн пропорциональна квадрату струнной константы в открытом секторе. Этот факт важен в дальнейшем, при обсуждении непертурбативной теории.

Вклад каждого рода вычисляется с помощью поляковского континуального интеграла [55] по координатам струны и двумерным геометриям или метрикам на мировом листе [14]

$$F_g = \int \mathrm{D}h_{ab}\,\mathrm{D}\mathbf{X}\exp\left(-\int_{\Sigma_g}\partial\mathbf{X}\,\bar{\partial}\mathbf{X}\right), \tag{3.12}$$

где $\mathbf{X}$ — координаты струны, которые одновременно, с точки зрения теории на мировом листе, являются полями двумерной свободной теории поля, а h_{ab} — метрики на римановой поверхности Σ_g рода g. Суммирование по двумерным геометриям в формуле (3.12) изначально сформулировано Поляковым как интегрирование по метрикам. Если же учесть инвариантность относительно замен координат на мировых листах, то реально суммирование проводится по *классам эквивалентности* метрик (относительно замен координат или репараметризаций), и именно эти классы эквивалентности отвечают различным физическим ситуациям.

На первый взгляд, действие $\int_{\Sigma_g}\partial\mathbf{X}\,\bar{\partial}\mathbf{X}$ в формуле (3.12) вообще не зависит от двумерной метрики h_{ab}: из трех ее компонент две могут быть сразу "убиты" двумя заменами координат. Например, метрику h_{ab} можно привести к конформному виду $h_{ab} = \delta_{ab}\exp\varphi$, т.е. определить единственной функцией φ на мировом листе струны. Легко убедиться в том, что, скажем, свободное действие в (3.12) попросту не зависит от *конформного фактора* φ, а поэтому, казалось бы, интеграл по метрикам в (3.12) тривиален. Однако это не так. Причина заключается в том, что двумерная теория (3.12) — простая квантовая механика, но с *бесконечным* числом степеней свободы, так что интеграл в (3.12) должен быть регуляризован.

Если при этом потребовать, чтобы регуляризованная теория не зависела от выбора координат на мировом листе струны (а это требование совершенно необходимо физически — осмысленная физическая теория не имеет права зависеть от выбора координат на ненаблюдаемом мировом листе планковского размера), то регуляризацию (например, обрезание) следует вводить *ковариантно*. Это означает, что *квантовая* теория (3.12), вообще говоря, зависит от метрики h_{ab} (по крайней мере от ее конформного класса). Такое явление называется ***аномалией*** (см., например, обзор в *УФН* [36] и библиографию в нем), и в данном случае мы имеем дело с двумерной конформной или гравитационной аномалией. Вычислив эту аномалию [55], Поляков продемонстрировал, что двумерная геометрия накладывает существенные ограничения на свойства пространства-времени, в котором живет теория струн.

Суть ограничений заключается в том, что вклад в аномалию "физических степеней свободы", живущих на мировом листе, должен компенсировать вклад в аномалию самой двумерной геометрии (или супергеометрии); отсюда возникают хорошо известные, "богом данные" ***критические размерности*** $D = 26$ (или $D = 10$). Эти ограничения не столь сильны, как казалось на заре теории струн, но все же в определенном смысле теория струн "сама" выбирает себе пространство-время. Пространство-время в теории струн должно быть достаточно многомерным, хотя частично эти измерения могут оказаться "малыми", т.е. ответственными за "внутренние" степени свободы (в духе моделей Калуцы–Клейна [64]).

Вычисление аномалии [55] показывает, что в квантовой теории конформный фактор φ "оживает" и приобретает смысл некоторой дополнительной (выделенной) координаты пространства-времени. Аномалия добавляет кинетический член для поля φ к действию (3.12), так что (в плоском пространстве-времени) полное действие принимает вид

$$\int_{\Sigma}(\partial\mathbf{X}\,\bar{\partial}\mathbf{X} + \partial\varphi\,\bar{\partial}\varphi + \ldots), \tag{3.13}$$

где в некоторой естественной нормировке поле φ следует считать мнимым, т.е. (3.13) наиболее естественно интерпретируется именно как свободное действие в пространстве Минковского. Интерпретация времени как "масштабного фактора", возникающая в теории струн из двумерной геометрии, вполне "созвучна" аналогичной интерпретации в общем контексте гравитации и космологии.

Вернемся теперь к свойствам поляковского интеграла по двумерным геометриям. В случае точечных частиц этот интеграл сводится к конечномерному интегралу по параметрам Фейнмана, имеющим смысл "собственных" длин траекторий частиц. Таким образом, диаграммы Фейнмана (скажем, в теории ϕ^3) возникают прямо на уровне первичного квантования. Основная физическая

[13] В отсутствие D-бран (см. разделы 4.3 и 4.4).

[14] Из-за того, что *по определению* теория струн содержит интеграл по двумерным метрикам, ее часто отождествляют с двумерной квантовой гравитацией. Параллели между теорией струн и квантовой гравитацией в двух измерениях чрезвычайно полезны для изучения обеих теорий, однако при этом не следует забывать о принципиально разной пространственно-временнóй интерпретации, согласно которой теория струн (в отличие от двумерной квантовой гравитации) является многомерной и наблюдаемые в теории струн определены в многомерном пространстве-времени.

проблема, следующая из интеграла по фейнмановским параметрам (а значит, и из интеграла по одномерным геометриям), — появление ультрафиолетовых сингулярностей из-за вклада траекторий бесконечно малой длины. В теории струн ультрафиолетовые сингулярности регуляризуются с помощью перехода от мировых линий с пересечениями в точках к гладким мировым листам (а это сразу приводит к тому, что взаимодействие струн может быть только кубичным).

Более тонкий эффект заключается в том, что двумерная геометрия *регуляризует* вклады малых расстояний, так как вклад "траекторий малой длины" геометрически эквивалентен вкладу "траекторий большой длины". Согласно основному принципу квантовой физики суммирование производится только по независимым конфигурациям; отсюда немедленно следует, что во избежание "двойного счета" конфигурации с малыми собственными длинами учитывать *не следует*, если учтены все эквивалентные им конфигурации в инфракрасной области. Результатом такого рассуждения является сильнейший вывод о том, что *по определению* в теории струн нет ультрафиолетовых проблем квантовой теории поля, точнее, ультрафиолетовые расходимости отсутствуют, если нет инфракрасных[15]. В основе этого вывода лежит анализ конечномерной части интеграла по двумерным геометриям — по пространству модулей комплексных структур ***римановых поверхностей***. (Интегрированию по пространству модулей комплексных структур в теории струн посвящена бóльшая часть обзора в *УФН* [9].)

По теореме Белавина – Книжника [61] интеграл по метрикам (3.12) сводится к интегралу по пространству модулей комплексных структур римановых поверхностей

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} \mathrm{d}\mu(y)\, |f(y)|^2 , \tag{3.14}$$

где $\mathcal{M}_g$ — (конечномерное) пространство модулей комплексных структур римановой поверхности Σ_g, а конкретный вид меры интегрирования зависит от выбора струнной модели (для бозонной струны это мера Мамфорда [61]). Именно модулярная инвариантность подынтегрального выражения в (3.14) приводит к тому, что вклады "траекторий малой длины" и "траекторий большой длины" физически эквивалентны. Формулировка (3.12), (3.14) в принципе позволяет использовать соображения симметрии для получения непертурбативной информации, хотя по своему определению она является пертурбативным разложением в окрестности некоторого вакуума и интеграл (3.12) вычисляет лишь g-петлевую поправку в разложении струнной теории возмущений.

3.4. Динамическая природа пространства-времени и двумерные конформные теории

Вернемся теперь к тому, что вклад "ожившей" координаты двумерной метрики позволяет сократить конформную аномалию. Условие сокращения аномалии содержательно (в том смысле, что выполняется не всегда и не везде) приводит к *динамическим ограничениям* на свойства физического пространства-времени, основными из которых являются следующие.

- В плоском фоновом пространстве-времени теория струн существует только в *выделенных* или ***критических размерностях***. Простейшая бозонная струна (3.12), (3.13) требует, чтобы полное число измерений $D = 26$ (одно из них — время), а теория фермионных или суперсимметричных струн (двумерная супергеометрия) фиксирует критическую размерность $D = 10$.
- В нетривиальных фоновых полях (скажем, когда метрика отлична от плоской) для фоновых полей должны выполняться классические уравнения движения, в том числе уравнения Эйнштейна

$$R_{MN}(G) - \frac{1}{2}\, G_{MN}\, R(G) - T_{MN} = \mathcal{O}(\alpha') \tag{3.15}$$

с точностью до струнных поправок. В формуле (3.15) мы ввели метрику пространства-времени $G_{MN} = G_{MN}(X)$ с тензором Риччи $R_{MN}(G)$ и тензор энергии-импульса T_{MN} других фоновых полей. Кроме того, при наличии нетривиальных фоновых полей видоизменяется условие сокращения аномалии: в этом случае критическая размерность ($D = 26$ или $D = 10$) "плывет", т.е. изменяется из-за вклада в аномалию поправок по α' — членов, начинающихся с $\alpha' R(G)$.

Вообще говоря, пространство-время не обязано быть пространством Минковского или евклидовым плоским пространством[16], скажем, $\mathbf{R}^4$. Оно может иметь нетривиальную метрику (удовлетворяющую, в силу двумерных симметрий, уравнениям Эйнштейна [60]) или даже быть нетривиальным компактным многообразием (точнее, иметь компактную составляющую), что, как уже отмечалось, отвечает происхождению внутренних (калибровочных) степеней свободы в духе моделей Калуцы – Клейна. При этом поляковский интеграл (3.12) следует понимать в "обобщенном" смысле, когда вместо свободной бесконечномерной квантовой механики (или двумерной теории поля (3.12) с полями X, имеющими смысл координат в плоском пространстве-времени) следует рассматривать некоторую общую сигма-модель

$$\int_\Sigma \left(G_{MN}(X)\, \partial X^M\, \bar{\partial} X^N + \mathcal{R}^{(2)} \Phi(X) + \ldots \right) , \tag{3.16}$$

где $\mathcal{R}^{(2)} = \mathcal{R}^{(2)}(h)$ — кривизна двумерной метрики, а $G_{MN}(X)$ и $\Phi(X)$ — нетривиальные фоновые поля метрики пространства-времени и дилатона.

Принципиально новый момент в теории струн заключается в том, что она в некотором смысле *сама* "подстраивает" под себя пространство-время, в котором живет. Точнее, она накладывает существенные ограничения на характеристики внешнего (по отношению к мировому листу) пространства-времени, в частности заставляет фоновые поля подчиняться уравнениям движения. Отметим также следующую из сравнения формул (3.16) и (3.11), а также теоремы Гаусса – Бонне

$$\int_\Sigma \mathcal{R}^{(2)}(h) = 2 - 2g$$

[15] Во многих струнных моделях это не так из-за присутствия тахионов.

[16] Вопросы сигнатуры пространства-времени остаются пока за рамками теории струн, и мы не будем касаться их в данном обзоре. Заметим только, что везде неявно предполагается возможность гладкого аналитического продолжения теории в пространство Минковского или в евклидово пространство. В данном обзоре не делается разницы между этими двумя формулировками.

(где $g = g(\Sigma)$ — род римановой поверхности Σ) связь между "нулевой модой" Φ_0 дилатонного поля $\Phi(X)$ (точнее, его вакуумного среднего) и струнной константой связи $g_{\rm str} = \langle \exp \Phi_0 \rangle$.

Более точно, рассматривая теорию струн во внешних фоновых полях, включающих нетривиальную метрику пространства-времени (такие теории по историческим причинам часто называются двумерными сигма-моделями), необходимо все время следить за сохранением условия конформной инвариантности (остаточной инвариантности относительно замен координат на мировом листе струны, при этом двумерная метрика h_{ab} выбирается в конформном виде; см. (3.12), (3.13), (3.16)).

Другими словами, нетривиальные фоновые поля в теории струн должны с необходимостью отвечать двумерным конформным сигма-моделям или, говоря проще, двумерным ***конформным теориям*** [56]. Разница между этими двумя понятиями заключается в том, что большинство известных двумерных конформных теорий имеет лишь приблизительное описание в терминах сигма-моделей. Например, известная явно нетривиальная сигма-модель может отвечать, как правило, лишь "затравочным" значениям фоновых полей, в то время как точные фоновые поля, гипотетически описывающие точную квантовую конформную теорию, неизвестны. При этом сама конформная теория по-прежнему может быть сформулирована аксиоматически [56] или, скажем, на языке свободных полей [82, 83, 98], отвечающих лишь простейшему дилатонному фону[17].

Двумерные конформные теории поля [56] — это теории, инвариантные относительно *бесконечномерной* (только в двумерии!) группы конформной симметрии, т.е. голоморфных замен координат на мировом листе, не выводящих метрику из вида $h_{ab} = \delta_{ab} \exp \varphi$. Генераторы таких преобразований удовлетворяют соотношениям ***алгебры Вирасоро***

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] = (n-m)\mathcal{L}_{n+m} + \frac{c}{12}\,\delta_{n+m,0} \tag{3.17}$$

и в классическом случае (при $c = 0$) могут быть представлены в виде $\mathcal{L}_n = -z^{n+1}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z$, т.е. образуют базис голоморфных векторных полей на мировом листе Σ, точки которого параметризованы комплексными координатами $(z, \bar{z})$.

Предполагая, что конформная симметрия является точной симметрией квантовой теории (а это опять же естественное требование независимости наблюдаемой физики от выбора координат на мировом листе планковского размера), можно сразу получить бесконечное число условий (тождеств Уорда) на корреляторы двумерной теории [56]. Это позволяет, в принципе, вычислить любой двумерный коррелятор, являющийся "строительным блоком" для струнной амплитуды.

Оказывается, то же самое утверждение формулируется иначе: несмотря на то что двумерные конформные теории, отвечающие нетривиальным многообразиям в пространстве-времени, не являются свободными теориями (3.13) в буквальном смысле, для любой двумерной конформной теории поля существует так называемое представление свободными полями или *бозонизация* [82, 83, 98]. Это означает, что даже в любом нетривиальном пространстве-времени, согласованном с условием двумерной конформной инвариантности, пертурбативно теория струн *принципиально определена* и интегралы (3.12) и (3.14) могут быть вычислены.

Бозонизация эффективно сводит вычисления в нетривиальных конформных теориях к вычислениям (достаточно сложных корреляционных функций) в теориях с квадратичным действием

$$S_{\rm CFT}(\varphi) = \int_\Sigma (\partial\varphi\,\bar{\partial}\varphi + \alpha_0 \mathcal{R}^{(2)}\varphi)\,, \tag{3.18}$$

где константа α_0 (для случая многих полей набор или вектор констант) связана с центральным зарядом теории соотношением $c_{\rm CFT} = 1 - 12\alpha_0^2$. Именно таким образом возникают нецелые центральные заряды нетривиальных теорий из свободных теорий, в которых центральные заряды просто равны числу полей: $c = D$. Полезна также следующая из сравнения с формулой (3.16) интерпретация действия (3.18) как действия струны во внешнем *линейном* дилатонном поле $\Phi(\varphi) = \alpha_0\varphi$. Мы увидим в дальнейшем, что такой внешний фон является выделенным в теории струн и с других точек зрения.

Кроме того, для конформных теорий общего вида особо следует отметить, что одна и та же конформная теория может отвечать струнам, вообще говоря, на *разных* многообразиях $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$. Такие многообразия называются зеркальными [23, 24]. Простейшим примером последних является свободная теория поля, принимающего значения на окружности: теории на окружностях $\mathcal{X}_1 = S_R$ с радиусом R и $\mathcal{X}_2 = S_{\alpha'/R}$ с радиусом α'/R эквивалентны (см. раздел 4.2).

Отметим еще раз, что амплитуды в теории струн строятся из корреляционных функций двумерной конформной теории поля. Более точно, амплитудам рассеяния, скажем, безмассовых возбуждений над некоторым вакуумом отвечают корреляционные функции определенных операторов в двумерной конформной теории, соответствующей данному вакууму. Эти операторы фиксируются набором квантовых чисел и условием конформной инвариантности — следствием все той же независимости от выбора координат на мировом листе струны. Замечательно, что условие двумерной конформной инвариантности сразу же приводит ко всем физическим требованиям на операторы, отвечающие физическим частицам.

Поясним это на примере оператора испускания или поглощения фотона (в плоском пространстве-времени)

$$\epsilon\,\partial X \exp(\mathrm{i}pX) \tag{3.19}$$

с импульсом p и поляризацией ϵ. Требование конформной инвариантности означает, что "физический" оператор должен иметь единичную размерность; лишь в этом случае результат интегрирования по границе мирового листа в случае открытых струн (или по всей поверхности мирового листа в случае замкнутых струн) не будет зависеть от выбора координат. Для оператора (3.19) это означает (вследствие единичной размерности предэкспоненты), что $p^2 = 0$ или, другими словами, что (*аномальная* в смысле двумерной конформной теории поля) размерность экспоненты в (3.19) равна нулю. Таким образом, из условия *двумерной конформной инвариантности* сразу же следует безмассовость фотона; это по существу повторяет несколько более

[17] Исключение составляют двумерные сигма-модели на групповых многообразиях и отвечающие им конформные теории [57]. Но даже в этом случае гораздо проще и естественнее строить конформную теорию, просто *потребовав*, что конформная симметрия является точной квантовой симметрией, согласованной с алгеброй токов, всегда имеющейся в теории на групповом многообразии [58].

строгим образом наше рассуждение из начала раздела 3.1.

Чуть более тонкий анализ условия конформной инвариантности немедленно приводит к требованию поперечности $\epsilon p = 0$ физического фотона, или *калибровочной* инвариантности. Действительно, разлагая вектор поляризации на поперечную и продольную части: $\epsilon_M = \epsilon_M^{\perp} + \epsilon_M^{\parallel}$, так что $\epsilon^{\perp} p = 0$ и $\epsilon_M^{\parallel} \propto p_M$, легко заметить, что

$$\epsilon^{\parallel} \partial X \exp(\mathrm{i}pX) \propto p\, \partial X \exp(\mathrm{i}pX) \propto \partial\big(\exp(\mathrm{i}pX)\big) = \\ = \mathcal{L}_{-1} \exp(\mathrm{i}pX)\,, \tag{3.20}$$

т.е. вклад продольной части является полной производной и пропадает после интегрирования по границе мирового листа. Другими словами, используя последнее равенство в (3.20), можно сказать, что операторы или состояния, отвечающие физическим частицам, определены на языке двумерных конформных теорий с точностью до "калибровочных" состояний вида $\mathcal{L}_{-1}|\Psi\rangle$, имеющих нулевую норму. Таким образом, требование "отсутствия духов" в двумерной теории приводит немедленно к калибровочной инвариантности в физическом спектре теории струн.

3.5. Суперсимметрия и фермионы

Остановимся кратко на дополнительных полях, живущих на мировом листе, и связанных с ними внутренних степенях свободы. Одним из важнейших свойств теории струн является то, что, введя на мировом листе ***суперсимметрию***, можно сразу же получить пространственно-временны́е фермионы[18].

Уже в вырожденном примере струны (в случае релятивистской частицы) достаточно ввести суперсимметрию на мировой линии [79], чтобы получить пространственно-временны́е фермионы. Действие на мировой линии можно определить, потребовав инвариантность относительно преобразований (одномерной!) суперсимметрии с грассмановым параметром ϵ:

$$\delta X = \epsilon \Psi\,, \qquad \delta \Psi = -\epsilon\left(\dot{X} + \frac{1}{2}\,\chi\Psi\right) e^{-1}\,, \\ \delta\chi = -2\dot{\epsilon}\,, \qquad \delta e = -\epsilon\chi\,. \tag{3.21}$$

Соответствующее инвариантное действие

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left[\frac{1}{e}\,\dot{X}^2 + \Psi\dot{\Psi} + \frac{\chi}{e}\,\Psi\dot{X} + m^2\left(e + \frac{1}{4}\,\chi d_t^{-1}\chi\right)\right] \tag{3.22}$$

включает, помимо координат X_M и одномерной *метрики* e, грассмановы "гравитино" χ и фермионные переменные Ψ_M с кинетическим членом первого порядка, так что эти переменные совпадают с собственными импульсами: $\Psi_M = \delta S/\delta\dot{\Psi}_M$. После квантования получаем соотношения $[\Psi_M, \Psi_N]_+ = \delta_{MN}$, т.е. переменные Ψ_M превращаются в гамма-матрицы Дирака, а волновая функция несет теперь *пространственно-временно́й* спинорный индекс, так как является вектором определенного представления алгебры Клиффорда. Соответствующее представление в виде (одномерного аналога) поляковского континуального интеграла с действием (3.22) позволяет вычислять функции Грина в теории дираковского фермиона.

Заметим, что суперсимметрия (3.21) на мировой линии частицы (а также ее прямое обобщение — суперсимметрия на мировой поверхности струны) практически тождественна хорошо известной суперсимметрии в квантовой механике. Простейшим примером последней является, скажем, частица в магнитном поле, которую можно представить как квантовомеханическую систему с гамильтонианом $H = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})^2$ (матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}$ — простейший пример матриц Дирака). При этом роль супергенератора играет оператор Дирака $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}$, что в точности отвечает интерпретации операторов суперпреобразований как "квадратных корней" из операторов энергии или импульса. Существенной чертой суперсимметрии в квантовой механике (в том числе и (3.21)) является то, что связанное с ней "фермионное число" не имеет буквальной интерпретации с точки зрения физического пространства-времени.

Действительно, когда роль гамильтониана играет квадрат оператора Дирака, "фермионное число" есть не что иное, как направление спина. Поэтому с точки зрения физического пространства суперсимметричные "бозоны" и "фермионы" отвечают просто разным направлениям спина "пространственно-временно́го фермиона", волновая функция которого является решением уравнения Дирака. Как мы увидим ниже, суперсимметрия на мировой поверхности струны очень напоминает суперсимметрию в квантовой механике, за исключением тонкостей с граничными условиями, происходящих из-за наличия дополнительной координаты на мировом листе. Нетривиально, что при этом "вспомогательная" суперсимметрия квантовой механики приводит к "настоящей" пространственно-временно́й суперсимметрии струнного спектра.

Таким образом, дело обстоит гораздо интереснее в случае фермионной струны — первично квантованной теории с действием на мировом листе

$$\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\Sigma}\Big(\partial X\bar{\partial}X + \Psi\,\bar{\partial}\Psi + \bar{\Psi}\,\partial\bar{\Psi} + \chi\Psi\,\bar{\partial}X + \\ + \bar{\chi}\bar{\Psi}\,\partial X + \frac{1}{2}\,\bar{\chi}\chi\bar{\Psi}\Psi\Big)\,, \tag{3.23}$$

инвариантным относительно преобразований двумерной супергравитации [80]. Первые три члена в выражении (3.23) (при $\chi = \bar{\chi} = 0$) отвечают действию, инвариантному относительно *глобальной* двумерной суперсимметрии на мировом листе [77]. В зависимости от граничных условий (периодичности, антипериодичности или их аналогов в открытом случае) фермионные поля Ψ содержат или не содержат "нулевую моду" — постоянную компоненту $\Psi_M^{(0)}$, которая подобно рассмотренному выше примеру фермионной частицы может превратиться в матрицы Дирака после квантования $[\Psi_M^{(0)}, \Psi_N^{(0)}]_+ = \delta_{MN}$.

Таким образом, в зависимости от выбора граничных условий в фермионной струне возникают два сектора. Волновые функции одного из них несут индекс представления алгебры Клиффорда и отвечают пространственно-

[18] Здесь, безусловно, следует сделать несколько дополнительных замечаний. В буквальном смысле это свойство можно обнаружить уже на уровне точечных частиц, и, более того, в некотором смысле (без использования понятия суперсимметрии) оно было известно задолго до возникновения теории струн. Тем не менее представляется чрезвычайно важным именно то, что в теории струн или на двумерных мировых листах это свойство возникает естественным образом и без "патологий", присущих одномерному случаю.

временны́м фермионам, в то время как волновые функции другого сектора не имеют таких индексов и отвечают пространственно-временны́м бозонам. Соответствующая двумерная конформная теория [86, 89] позволяет вычислять корреляционные функции, отвечающие любым амплитудам рассеяния в фермионной струне.

После всего сказанного естественно задать вопрос: как соотносятся друг с другом состояния в спектре фермионной струны, отвечающие пространственно-временны́м бозонам и пространственно-временны́м фермионам? На первый взгляд, эти два сектора — бозонный и фермионный — довольно сильно отличаются друг от друга. Например, бозонный сектор (или сектор Неве–Шварца [51]) содержит тахион, а в фермионном секторе (или в секторе Рамона [52]) тахион отсутствует. Тем не менее существует естественная, так называемая *ГСО-проекция* (т.е. процедура, оставляющая в спектре лишь часть состояний из обоих секторов [54]), в результате которой из секторов Неве–Шварца и Рамона можно оставить одинаковое число состояний и полный спектр (после проецирования) становится суперсимметричным относительно преобразований суперсимметрии в пространстве-времени!

Более того, на уровне однопетлевой статистической суммы ГСО-проекция возникает в результате суммирования по всем возможным граничным условиям на фермионные поля [87]. Все это означает, что суперсимметрия на мировом листе фермионной струны естественным образом приводит к суперсимметрии в (десятимерном) пространстве-времени. Полученную теорию — "редуцированную" фермионную струну с десятимерной суперсимметрией, следуя Дж. Шварцу, часто называют ***суперструной***.

В открытых струнах ГСО-проекция выделяет в секторе Неве–Шварца подсектор с *нечетным* "фермионным числом" (имеются в виду фермионы на мировом листе). Например, безмассовый вектор $\Psi^{\mu}_{-1}|0\rangle_{\rm NS}$ остается в спектре открытой суперструны, в то время как наивный "вакуум" или тахион Неве–Шварца $|0\rangle_{\rm NS}$ запрещен ГСО-проекцией. В секторе Рамона ГСО-проекция оставляет лишь пространственно-временны́е фермионы с определенной киральностью — собственным значением оператора $(1\pm\text{"}\Gamma_5\text{"})/2$, действующим на майорановские спиноры; в десятимерии $\text{"}\Gamma_5\text{"}\propto\prod_{M=1}^{10}\Gamma_M$. Число именно таких фермионных состояний (на каждом массовом уровне) равно числу состояний в секторе Неве–Шварца с нечетным "фермионным числом" с точки зрения двумерной теории на мировом листе. Таким образом, в теории замкнутых струн можно получить две различные теории суперструн: с пространственно-временны́ми фермионами различной и одинаковой киральности. Первая (некиральная) теория называется теорией типа IIA, а вторая (с фермионами какой-то одной фиксированной киральности) — теорией типа IIB.

Оказывается, что суперструны можно сформулировать, не прибегая к двумерным фермионам Неве–Шварца–Рамона на мировом листе. Существует альтернативное описание Грина–Шварца [81], в котором используются дополнительные (грассмановы) поля $\theta_\alpha(\sigma,\tau)$ — спиноры в десятимерном пространстве-времени в отличие от десятимерных векторов $\Psi_\mu(\sigma,\tau)$. Это описание явно инвариантно относительно преобразований десятимерной суперсимметрии. При этом, однако, переменные $\theta_\alpha(\sigma,\tau)$ являются скалярами относительно двумерных замен координат и двумерная суперсимметрия не является более (явной) симметрией теории суперструн Грина–Шварца.

Исследование аномалий, начатое в работе [59], привело к следующим безаномальным суперструнным моделям: теории типа IIA и IIB (замкнутые теории некиральных и киральных струн с $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией в десятимерии), теория типа I (включающая открытые струны) и теории гетеротических струн [84] (струнные модели, в которых левая или голоморфная часть отвечает двадцатишестимерной бозонной струне с дополнительной компактификацией, а правая или антиголоморфная часть — десятимерной фермионной струне) с калибровочными группами SO(32) и $E_8\times E_8$.

К сожалению, десятимерная суперструна, претендующая на роль наиболее "успешной" из существующих струнных моделей, строго определена, вообще говоря, лишь на древесном и однопетлевом уровнях. Начиная с двухпетлевых струнных поправок (диаграммы типа "крендель" на рис. 8) в амплитуды рассеяния, все выражения в пертурбативной теории суперструн по сути дела *не определены*. Причиной этого являются проблемы с супергеометрией или интегрированием по "суперпартнерам" модулей комплексной структуры.

В отличие от бозонного случая (3.14), где мера интегрирования по пространству модулей фактически фиксируется теоремой Белавина–Книжника, определение меры интегрирования по супермодулям (или, точнее, нечетным модулям суперкомплексной структуры) является нерешенной задачей [90, 22]. Пространство модулей комплексных структур римановых поверхностей некомпактно, поэтому интегрирование по нему требует специальной заботы и доопределения. В бозонном случае, где интегралы по пространству модулей расходятся, результат интегрирования в (3.14) определен, вообще говоря, с точностью до "граничных членов" — вкладов вырожденных римановых поверхностей, или поверхностей меньшего рода (с меньшим числом "ручек"; см. рис. 8).

В случае суперструны возникают гораздо более существенные проблемы из-за того, что само понятие "границы пространства модулей" *не определено*, грассманов интеграл по нечетным переменным "не знает", что такое "граничный вклад". Именно это является фундаментальной причиной того, что мера интегрирования в фермионной струне плохо определена и зависит от "выбора калибровки" или вида "нулевых мод" полей χ в действии (3.23). Для двухпетлевых вкладов эти проблемы могут быть решены "эмпирически" (см. [90, 22]), но, вообще говоря, суперструнная теория возмущений не является в математическом смысле определенной процедурой. Более того, данные проблемы не являются "чистыми" проблемами формализма, те же самые трудности возникают и в менее геометрическом формализме Грина–Шварца [93].

3.6. Эффективные действия фоновых полей

Аналогично производящим функционалам для частиц во внешних полях можно ввести взаимодействие струн с фоновыми полями. Интегрирование по струнным степеням свободы приведет к некоторым эффективным функционалам, зависящим уже только от локальных полей в пространстве-времени. Такие функционалы называются эффективными действиями Фрадкина–Цейтлина [60] и представляют собой наиболее естественный способ получения эффективных теорий поля из теории струн.

Данный подход представляется чрезвычайно ясным и понятным с идеологической точки зрения. Действи-

тельно, при наблюдаемых энергиях массивные струнные моды не возбуждаются и в наш низкоэнергетический мир "вылетают" лишь безмассовые локальные поля. Взаимодействие струн с локальными полями легко записывать с помощью симметрийных требований, например добавляя экспоненту от члена взаимодействия с калибровочным полем[19]:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}t \left(\dot{X}_M(t)\, A_M\big(X(t)\big) + \frac{1}{2}\, e(t)\, F_{MN}\big(X(t)\big)\, \Psi_M(t)\, \Psi_N(t) \right) \tag{3.24}$$

(упорядоченную P-экспоненту в неабелевом случае). В данном случае процедура та же самая, что и для релятивистской частицы. Единственное, что следует помнить, — это то, что интегрирование в формуле (3.24) производится по границе мирового листа $\partial\Sigma$ (в случае частицы интегрирование ведется по всей мировой линии). Это означает только то, что с векторными полями взаимодействуют открытые струны. В секторе замкнутых струн ситуация аналогичная: взаимодействие задается членами типа (3.16), где интегрирование производится уже по всей поверхности мирового листа.

В квадратичном приближении эффективные струнные действия *должны* совпадать с квадратичными членами в лагранжианах соответствующих теорий поля для фоновых полей. Однако буквальный вывод этого соответствия невозможен из-за равенства нулю двухточечных корреляторов на мировых листах простейшей топологии, что является прямым следствием двумерной геометрии. Косвенным аргументом в пользу такого совпадения является условие самосогласованности теории: условие двумерной конформной инвариантности требует, чтобы фоновые поля удовлетворяли уравнениям движения, которые требуют соответствующих квадратичных членов в эффективных лагранжианах. Старшие по фоновым полям и производным члены в эффективном действии прямо следуют из вычисления струнных амплитуд.

Одним из интереснейших (и немногих вычисляемых) примеров нелокальных эффективных действий, возникающих для струн во внешних калибровочных полях, является действие Дирака – Борна – Инфельда (в любом четномерном пространстве-времени)

$$S_{\mathrm{DBI}} = \int \mathrm{d}^D x \left[\det_{MN} \left(G_{MN} + 2\pi\alpha' F_{MN} \right) \right]^{1/2} . \tag{3.25}$$

Оно появляется непосредственно из вычисления эффективного струнного действия для внешнего электромагнитного поля, взаимодействующего с мировыми листами открытых струн простейшей топологии диска [85].

Довольно нетривиальным фактом является то, что все поправки по α', или петлевые поправки с точки зрения двумерной теории поля (с точки зрения теории струн, напомним, вычисления на мировых листах с топологией диска учитывают лишь "древесные" вклады), суммируются в компактную формулу (3.25), применимую буквально при больших полях: $F_{MN} \sim \alpha'^{-1}$ (порядка натяжения струны). Действие (3.25) имеет суперсимметричные и даже неабелевы аналоги, которые представляют определенный интерес для исследования эффективных действий в непертурбативной теории струн.

В секторе замкнутых струн возникает эффективное действие эйнштейновской гравитации

$$\int \mathrm{d}^D x \sqrt{G} \exp\left(-2\Phi\right) \left(R(G) + \frac{1}{2}\, (\nabla\Phi)^2 + \ldots \right) , \tag{3.26}$$

$$G \equiv \det_{MN} G_{MN} ,$$

с той только разницей, что масштаб "струнной" метрики отличается от масштаба "эйнштейновской" метрики на вакуумное значение поля дилатона Φ. Это приводит, в частности, к тому, что "настоящая" константа Ньютона, или масса Планка, в десятимерной теории связана с длиной струны равенством

$$\gamma_{\mathrm{N}}^{(10)} = \left(M_{\mathrm{Pl}}^{(10)}\right)^{-8} = \mathrm{g}_{\mathrm{str}}^2 \alpha'^4 , \qquad \mathrm{g}_{\mathrm{str}} = \langle \exp \Phi \rangle , \tag{3.27}$$

которое чрезвычайно существенно используется в дальнейшем при обсуждении непертурбативной теории струн.

4. Струны без струн. Непертурбативная теория

4.1. М-теория

Перейдем, наконец, к некоторым достижениям теории струн последнего десятилетия, связанным в основном с выходом за рамки теории возмущений. Как уже отмечалось (при обсуждении квантовой теории поля), при этом тут же "земля уходит из-под ног", так как мы вступаем в область, где и по сей день не существует никакого надежного формализма, а все выводы приходится делать на основе некоторых полукачественных соображений[20]. Тем не менее эти попытки могут быть более или менее удачными, и существующая до сих пор надежда, что, быть может, именно в теории струн они окажутся наиболее удачными, связана с наличием некоторых "глубинных" скрытых симметрий в теории струн, которые могут "ожить" на непертурбативном уровне.

Отметим сразу же, что в отличие от широко распространенного мнения о математическом характере проблем теории струн (которое не так далеко от истины, если ограничиться струнной теорией возмущений) проблемы непертурбативной теории струн имеют гораздо более фундаментальный физический характер. Повторим, что главнейшая из этих проблем заключается в том, что непертурбативной теории струн (как, впрочем, и непертурбативной теории поля) не существует, по крайней мере в адекватном для физической теории виде, т.е. в виде какого бы то ни было формализма. То, что на сегодняшний день принято называть непертурбативной теорией струн или ***М-теорией***, есть попросту некоторый набор "филологических" постулатов, напоминающий,

[19] Заметим, что оператор (3.19) буквально отвечает первому члену в формуле (3.24), если в качестве калибровочного поля взять решение уравнений движения в виде плоской волны $A_M(X) \propto \epsilon_M \exp(\mathrm{i}pX)$.

[20] Исключение составляют разве что "дискретизованные" версии квантовой теории поля, например так называемые теории "на решетке", обсуждение которых выходит за рамки данного обзора. Заметим только, что прогресс в понимании непертурбативных эффектов в решеточных теориях достаточно сильно "экранируется" дополнительными проблемами соответствия решеточной теории ее непрерывному пределу.

скажем, хорошо известную из школьного курса органической химии "теорию Бутлерова".

Сформулированная в той или иной мере на сегодняшний день центральная гипотеза предполагает существование единой непертурбативной теории струн или М-теории [111, 112] (см. также обзоры [19–21]), имеющей целый ряд вакуумов, понимаемых в смысле пертурбативной теории струн. Иными словами, теория возмущений в окрестности различных вакуумов отвечает рассмотренным выше (различным!) двумерным конформным теориям, взаимодействующим за счет аномалии с двумерной гравитацией. То, что пертурбативные разложения описывают разные фазы одной и той же теории, "закодировано" в так называемых свойствах дуальности — плохо определенной и часто только интуитивно понимаемой "похожести" некоторых объектов из различных фаз М-теории друг на друга.

В предельном случае это означает, что существуют преобразования дуальности, связывающие различные величины в квантовых теориях поля, как правило, в совершенно разных режимах. Например, частицеподобные состояния в одной теории переходят в солитоноподобные в другой, и наоборот. Именно поэтому такая дуальность практически непроверяема стандартными методами квантовой теории поля (за исключением разве что двумерных теорий, например известной дуальности между моделями "синус-Гордона" и Тирринга), что позволяет взглянуть на известные проблемы совершенно с другой стороны и иногда приводит к удивительным новым результатам.

Гипотетические свойства М-теории делают ее в чем-то похожей на теорию поля, в которой наряду с элементарными частицами (простейшими возбуждениями свободного квантованного поля) имеются частицеподобные нетривиальные коллективные возбуждения типа солитонов, монополей и т.п. Однако в отличие от традиционной квантовой теории поля в зависимости от значений параметров или модулей М-теории (например, вакуумных значений скалярных полей) одни и те же наблюдаемые объекты (скажем, электрически и магнитно заряженные частицы) могут описываться, равно как элементарные и/или солитоноподобные частицы, в рамках *различных* теоретико-полевых лагранжианов.

Говоря об М-теории, мы по-прежнему будем пользоваться терминологией "теория струн", несмотря на то что, казалось бы, в непертурбативной теории сама концепция фундаментальных одномерных протяженных объектов принимает гораздо более "скрытый" характер. В рассуждениях М-теории участвует огромное число гиперповерхностей произвольной размерности (или, точнее, произвольной коразмерности). С наивной точки зрения одномерные протяженные объекты вообще ничем не выделены, и струны являются лишь частным случаем так называемых p-бран (где число p — размерность браны). Например, частице отвечает $p = 0$, струне — $p = 1$, мембране, от которой и происходит термин *брана*, — $p = 2$ и т.д.

Однако особая роль струн обусловлена тем, что по-прежнему только они могут претендовать на роль фундаментальных объектов. По сути дела это повторяет аргументы раздела 3.1, с той только разницей, что теперь можно говорить лишь об определенных областях пространства модулей непертурбативной теории. В разных областях могут существовать (и существуют) различные теории фундаментальных струн; при этом фундаментальные струны одной из пертурбативных теорий являются, вообще говоря, тяжелыми "составными объектами" другой пертурбативной теории. Кроме того, только струны естественно заряжены по векторным полям, что приводит к возможной неабелевости, тогда как калибровочная инвариантность теории векторных полей (и гравитации) обеспечивает принципиальную возможность существования *легких* струн (точнее, легких возбуждений струн) при отсутствии легких мембран и т.п.

Сам термин ***дуальность*** (по крайней мере в том смысле, в котором он используется ниже) имеет во многом струнную природу и связан с часто встречающимися уже в пертурбативной теории струн свойствами геометрии комплексных многообразий. В пертурбативной теории струн эти свойства относятся к "ненаблюдаемой" геометрии мировых листов, но, что достаточно неожиданно, чрезвычайно похожие геометрические свойства имеют комплексные многообразия, являющиеся вспомогательной нетривиальной частью многомерного пространства-времени.

Двойственность структур на мировых листах и в пространстве-времени является удивительным и пока еще малоизученным свойством теории струн. Одно из непосредственных проявлений этой двойственности — связь между суперсимметрией на мировом листе и суперсимметрией в пространстве-времени, которая обсуждалась в разделе 3.5. Простейшим примером дуальности между безаномальными теориями суперструн является так называемая Т-дуальность между теориями IIA и IIB — прямое следствие дуальности $R \leftrightarrow \alpha'/R$, которая достаточно подробно рассматривается в разделе 4.2. Остальные преобразования дуальности, как правило, связывают друг с другом теории, из которых хотя бы одна находится в области сильной связи. Поэтому их непосредственная проверка совершенно нетривиальна.

Попробуем теперь перечислить основные *постулаты* М-теории.

М-теория и одиннадцатимерная супергравитация. Низкоэнергетическим пределом М-теории является супергравитация в пространстве-времени размерности[21] $D = 11$ [74]. Это максимальная возможная супергравитация и поэтому, пожалуй, единственная выделенная и красивая теория из всех моделей супергравитации, бозонный сектор которой включает только метрику G_{MN} и антисимметричное тензорное поле (3-форму) C_{MNK}. Единственным (размерным) параметром в такой теории является одиннадцатимерная масса Планка $M_{\mathrm{Pl}} \equiv M_{\mathrm{Pl}}^{(11)}$. При размерной редукции одиннадцатимерной супергравитации возникает десятимерная супергравитация типа IIA — полевой предел теории струн типа IIA. Эта процедура приводит к следующему соот-

[21] Выделенность размерности $D = 11$ возникает (при определенной "натянутости" аргументов) непосредственно из геометрической интерпретации Стандартной модели с группой $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$ (см., например, [1], с. 275). Если считать, что группа Стандартной модели естественно действует на некотором многообразии компактификации, то естественная размерность такого многообразия определяется как сумма единицы для U(1)-фактора, двойки для SU(2)-фактора ($\dim \mathbf{S}^2 = \dim(\mathbf{CP}^1) = 2$), четверки для SU(3)-фактора ($\dim(\mathbf{CP}^2) = 4$, предполагается, что группа действует на комплексном многообразии) и четырех наблюдаемых измерений. Таким образом, размерность $D = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$.

ношению между квадратом длины струны (или обратным струнным натяжением) α', радиусом компактного измерения R и одиннадцатимерной массой Планка $M_{\rm Pl}$:

$$\alpha' R M_{\rm Pl}^3 = 1\,. \tag{4.1}$$

Соотношение между десятимерной и одиннадцатимерной планковскими массами

$$M_{\rm Pl}^9 R = (M_{\rm Pl}^{(10)})^8 = \frac{1}{{\rm g}_{\rm str}^2 \alpha'^4} \tag{4.2}$$

получается непосредственно из редукции эйнштейновского действия супергравитации (первое равенство в формуле (4.2)). Связь между десятимерной планковской массой и струнной константой связи (второе равенство в формуле (4.2)) является следствием различия струнного и гравитационного масштаба метрик, отличающихся на $\langle \exp(-2\Phi)\rangle = 1/{\rm g}_{\rm str}^2$, где Φ — поле дилатона (см. (3.26), (3.27)). Все это вместе приводит к равенству

$$R = {\rm g}_{\rm str}\sqrt{\alpha'}\,, \tag{4.3}$$

из которого видно, что с ростом струнной константы связи ${\rm g}_{\rm str}$ радиус скрытого компактного измерения R *растет*, а это означает возможность интерпретации М-теории как теории струн в сильной связи.

М-теория как теория струн IIA в сильной связи. М-теория *не* является теорией фундаментальных струн (в смысле раздела 3.3) хотя бы потому, что не существует безаномальных пертурбативных теорий струн с размерностью пространства-времени $D = 11$. Тем не менее изложенные выше аргументы позволяют смотреть на М-теорию как на теорию струн типа IIA в сильной связи, в которой "оживает" дополнительное (компактное) измерение, размер которого связан со струнной константой связи формулой (4.3).

Струны и протяженные объекты в М-теории. Анализ протяженных объектов, являющихся решениями уравнений движения в М-теории (реально — в одиннадцатимерной супергравитации), и их размерной редукции в размерность $D = 10$ приводит к достаточно естественным параллелям между бранами в М-теории и бранами в теории струн. Так, гипотетическая мембрана М-теории при наматывании на компактное измерение и размерной редукции превращается в струну. Еще об одном таком соответствии будет идти речь в разделе 4.4 при обсуждении точных непертурбативных результатов в суперсимметричных калибровочных теориях, в геометрической формулировке которых нетривиальную роль играет 5-брана М-теории.

Так же как и десятимерная пертурбативная теория струн, одиннадцатимерная М-теория в реальном четырехмерном мире может проявляться лишь в "компактифицированном" виде. Одно из различий между пертурбативной и непертурбативной теориями струн в данном контексте заключается в том, что существование протяженных объектов приводит при компактификации к появлению новых нетривиальных эффектов. Замечательное свойство суперсимметрии — ее связь с комплексной геометрией (нетривиальной части) пространства-времени. Это находит свое отражение в том, что нетривиальным комплексным многообразиям струнных компактификаций отвечают суперсимметричные эффективные квантовые теории поля. Параметры таких эффективных теорий (константы связи, вакуумные конденсаты, массы и т.п.) являются параметрами или *модулями* комплексных многообразий соответствующей струнной компактификации (например, многообразий Калаби – Яо [2]). Преобразования дуальности в этом случае можно отождествить с действием соответствующей модулярной группы.

Чтобы получить макроскопически четырехмерную суперсимметричную калибровочную теорию, следует каким-то способом редуцироваться в четыре измерения. В теории струн существует стандартный путь, восходящий к идее Калуцы – Клейна: полное пространство-время представляется как прямое произведение четырехмерного евклидова пространства и некоторого компактного многообразия K. "Внутреннее" пространство K определяет "цветовые" свойства теории, число четырехмерных суперзарядов и т.п. Суперсимметрия требует, чтобы компактное многообразие K было трехмерным комплексным многообразием в десятимерной картине или произведением трехмерного комплексного многообразия на окружность с одиннадцатимерной точки зрения.

Более того, оказывается, что в некоторых случаях нетривиальная часть трехмерного комплексного (или шестимерного вещественного) многообразия может быть представлена одномерной комплексной кривой или (двумерной вещественной) ***римановой поверхностью*** Σ. Исходя из одиннадцатимерной М-теории, следует выбрать конкретную схему компактификации в четыре измерения так, чтобы полученная теория имела заданную четырехмерную суперсимметрию, требуемую калибровочную группу (в большинстве реальных случаев ${\rm SU}(N)$) и набор мультиплетов материи. Согласно [118] существует сценарий компактификации, в котором комплексная геометрия может быть сформулирована в терминах римановых поверхностей. Именно этот сценарий приводит к эффективным теориям Виттена – Зайберга [75].

Именно комплексно-аналитическая структура выделяет класс теорий, для которых можно сформулировать точные непертурбативные результаты, используя технику *голоморфных* (или мероморфных) функций. Идея работы с голоморфными функциями восходит к применению комплексного анализа в теории инстантонов и теореме Белавина – Книжника [61, 9] в пертурбативной теории струн (см. раздел 3.3). В наиболее простом классе рассматриваемых задач модули физических теорий можно отождествить с модулями именно *одномерных* комплексных многообразий: (пространственно-временны́х!) комплексных кривых или римановых поверхностей Σ, которые *a priori* не имеют никакого отношения к мировым листам в теории струн. Тем не менее это совершенно не мешает при работе с ними использовать тот же самый технический арсенал, что и в пертурбативной теории (см. раздел 3). Аналогичной картины следует ожидать для теорий, где пространства модулей отождествляются с пространствами модулей комплексных многообразий старшей размерности (двумерные комплексные многообразия $K3$, трехмерные многообразия Калаби – Яо и т.д.; см. подробности в [2]). Более того, в единой картине теории струн пространственно-временны́е комплексные кривые следует считать вырожденными случаями многообразий струнной компактификации, когда многообразие Калаби – Яо эффективно "вырождается" в одномерную комплексную кривую Σ [114]. Нетривиальная топологическая структура кривой Σ является существенно непертурбативной информацией, в теории возмущения эта кривая проявляется лишь "локально" как масштабный параметр. Это означает, в частности, что именно струнные эффекты играют существенную роль в структуре точных

непертурбативных решений калибровочной теории поля, а топологические степени свободы, определяющие построение эффективной теории, связаны напрямую с намотками струн на нетривиальные циклы многообразий струнной компактификации.

4.2. Струны в компактных измерениях

Наиболее ярко различие между теорией струн и квантовой теорией поля проявляется в случае топологически нетривиального пространства-времени, простейшим примером которого является пространство-время с компактными направлениями или просто "ящик" с периодическими условиями на концах. Структура таких "компактифицированных" струнных моделей позволяет предположить, что существует совершенно нетривиальная симметрия (дуальность), связывающая между собой различные модели теории струн, в частности, таким образом, что пертурбативный режим в одной из них позволяет делать разумные предположения о непертурбативных эффектах в другой. Иными словами, преобразования дуальности позволяют рассматривать разные струнные модели как пертурбативные разложения (3.12) вокруг различных вакуумов одной и той же теории. Недостатком (на сегодняшний день) этой концепции является лишь отсутствие каких бы то ни было строгих в математическом смысле утверждений.

Основным примером дуальности является симметрия в теории *замкнутых* струн в пространстве-времени с компактными измерениями (в простейшем случае с единственной координатой, принимающей значение на "окружности" $\phi \sim \phi + 2\pi R n$, где $n \in \mathbf{Z}$ — любое целое число). Спектр такой теории и однопетлевая статистическая сумма инвариантны относительно дискретного преобразования $R \leftrightarrow \alpha'/R$ [94]. Эта инвариантность является следствием того, что наряду со стандартным дискретным спектром частиц на окружности с квантованным импульсом $p \propto n/R$, $n \in \mathbf{Z}$ (имеющимся, естественно, в обычной квантовой теории поля с компактными измерениями), существует другой тип чисто струнных возбуждений: струна может намотаться на окружность, и энергия такой намотки равна mR/α', $m \in \mathbf{Z}$.

В пределе "декомпактификации" $R \to \infty$ первая часть спектра станет непрерывной (опять же, как и в обычной квантовой теории поля), в то время как струнные возбуждения становятся бесконечно тяжелыми и их вклад в статистическую сумму будет пренебрежимо малым. Однако полный спектр

$$M^2_{n,m} = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 \qquad \forall\, n, m\,, \tag{4.4}$$

очевидно, *инвариантен* относительно замены $R \leftrightarrow \alpha'/R$. Наличие второго члена или спектра струнных намоток в формуле (4.4) иногда интерпретируют как струнную модификацию принципа неопределенности. Действительно, выражение (4.4) наводит на мысль, что принцип неопределенности в виде $\Delta X \sim 1/E$ справедлив буквально вплоть до масштабов порядка $\sqrt{\alpha'}$, после чего эту формулу следует заменить на что-то типа $\Delta X \sim \sim 1/E + \alpha' E$.

Достаточно легко увидеть, что преобразование дуальности $R \to \alpha'/R$ оставляет инвариантными голоморфные величины (скажем, ток $\partial\phi_L(z) \to \partial\phi_L(z)$), но меняет знак у антиголоморфных ($\bar\partial\phi_R(\bar z) \to -\bar\partial\phi_R(\bar z)$). Это означает, например, что операторы поглощения и испускания "частиц" типа

$$V_p \propto \exp\left(\mathrm{i}p\phi(z,\bar z)\right) = \exp\left(\mathrm{i}p\phi_L(z) + \mathrm{i}p\phi_R(\bar z)\right) \tag{4.5}$$

переходят в *нелокальные* (с точки зрения поля $\phi(z,\bar z) = = \phi_L(z) + \phi_R(\bar z)$) операторы "вихрей" на мировом листе

$$\exp\left(\mathrm{i}p\phi_L(z) - \mathrm{i}p\phi_R(\bar z)\right), \tag{4.6}$$

и наоборот.

То же самое верно и для действия преобразования дуальности $R \to \alpha'/R$ на голоморфные или антиголоморфные (на уравнениях движения) фермионы мирового листа: $\Psi_L(z) \to \Psi_L(z)$, но в то же время $\Psi_R(\bar z) \to -\Psi_R(\bar z)$. Это немедленно приводит к нетривиальным следствиям для суперструн типа II в десятимерном пространстве $\mathbf{R}^9 \times \mathbf{S}^1$ с одним компактифицированным измерением, так как про девять некомпактных координат можно пока забыть и сосредоточиться на том, что происходит в такой теории при преобразовании $R \to \alpha'/R$.

В бозонном секторе намотки компактной координаты по-прежнему меняются с калуца-клейновскими модами, а вот компоненты двумерных фермионных полей Ψ по компактному направлению, отвечающие левому и правому секторам, ведут себя по-разному: одна меняет знак, в то время как другая сохраняет. Отсюда следует, что матрица "Γ_5", а значит, и оператор киральной проекции меняют знак лишь в одном из секторов! Таким образом, некиральная теория типа IIA при преобразовании $R \to \alpha'/R$ переходит в киральную теорию типа IIB, и наоборот. Преобразование $R \to \alpha'/R$ в многомерном пространстве с одним компактным направлением, меняющее теории типа IIA и IIB местами, обычно называется T-дуальностью. Это единственная по-настоящему проверяемая дуальность в теории струн, так как она может сопоставлять друг другу две струнные модели, находящиеся в режиме слабой связи. Аналогично, T-дуальность связывает между собой гетеротические струны с калибровочными группами SO(32) и $\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$.

Если рассмотреть эффективное действие для теории струн, скажем, в $(D+1)$-мерии и редуцировать его в D-мерие, то размер компактного измерения появится как множитель перед эффективным (D-мерным) действием, который можно переинтерпретировать как константу связи. Это дает возможность превратить дуальность $R \leftrightarrow \alpha'/R$ в соотношение между эффективными теориями, одна из которых находится в режиме сильной связи, а другая — в режиме слабой. Результатом этого рассуждения является *предположение* о том, что некоторая квантовая теория поля на данном многообразии и/или в режиме слабой связи эквивалентна[22] другой теории поля, вообще говоря, на другом многообразии и/или в режиме сильной связи. Удивительно, что, применяя аргументы такого сорта к определенным суперсимметричным калибровочным теориям, иногда удается сделать явные предсказания о точном спектре и виде эффективного действия.

[22] В указанном выше смысле. Обычно эквивалентность подразумевает совпадение (частично) спектра и *некоторых* корреляционных функций в дуальных теориях.

В заключение данного раздела остановимся еще раз на так называемой "зеркальной симметрии" в теории струн [23–26]. Мы не будем обсуждать математическую сторону этого вопроса, связанную с тем, что теория струн гипотетически помогает установить определенную связь между комплексными и кэлеровыми структурами некоторых многообразий. Для нас сейчас важно лишь то, что в теории струн принципиально существует возможность "неразличимости" пространства-времени, в том смысле, что по данной струнной модели пространство-время может не определяться однозначно. Простейший пример такого явления разобран выше: струнные модели на окружностях с радиусами R и α'/R не различаются, по крайней мере на уровне спектра[23]. Если от окружностей перейти к торам, то легко видеть, что отмеченная симметрия спектра сохраняется. При этом теория типа A на двумерном торе $\mathbf{T} = \mathbf{S}^1_{R_1} \times \mathbf{S}^1_{R_2}$ будет эквивалентна теории типа B на торе $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^1_{R_1} \times \mathbf{S}^1_{1/R_2}$, и наоборот. Заметим теперь, что площадь тора $\mathrm{Area}\,(\mathbf{T}) = R_1 R_2$ и модуль комплексной структуры $\tau(\mathbf{T}) = \mathrm{i}R_1/R_2$ являются (с точностью до мнимой единицы), наоборот, модулем $\tau(\tilde{\mathbf{T}})$ и площадью $\mathrm{Area}\,(\tilde{\mathbf{T}})$ соответственно "зеркального тора" $\tilde{\mathbf{T}}$. Таким образом, мы приходим к утверждению об эквивалентности теорий A и B на зеркальных многообразиях — многообразиях, у которых модули кэлеровых и комплексных структур в некотором смысле меняются местами.

Физическая природа зеркальной симметрии достаточно прозрачна, хотя, на первый взгляд, и парадоксальна. Замена импульса на энергию намотки струны, грубо говоря, означает замену импульса на координату, поэтому зеркальная симметрия является в каком-то смысле симметрией между координатами и импульсами. Безусловно, наш мир не обладает такой симметрией, так как всегда можно выделить именно пространство координат или конфигурационное пространство, а фазовое пространство является его кокасательным расслоением.

Как же быть с зеркальной симметрией в теории струн? Разрешение этого кажущегося противоречия заключается в том, что такая симметрия возможна лишь на масштабах порядка $\sqrt{\alpha'}$ хотя бы из соображений размерности $p \leftrightarrow x/\alpha'$. Поэтому зеркальные многообразия, отождествляемые теорией струн, принципиально ненаблюдаемы в "макромире"! Более того, на таких расстояниях фазовое пространство вовсе не обязано быть кокасательным расслоением. Скажем, квантовая механика спина, сформулированная в адекватных терминах (см., например, [95, 96]), отвечает фазовому пространству — сфере, которая отнюдь не является кокасательным расслоением. Другой, в чем-то еще более простой пример из квантовой механики — частица в магнитном поле, для которой существует "естественное превращение" на расстояниях порядка магнитной длины $l \sim \sqrt{\hbar c/eB}$ конфигурационной плоскости, перпендикулярной магнитному полю, в "фазовую плоскость".

4.3. Размерная редукция в теории струн и D-браны

Формула (4.4) приводит к достаточно нетривиальным выводам о размерной редукции в теории струн. В теории поля (или в теории точечных частиц) вторым членом в правой части (4.4), пропорциональным $(\alpha')^{-2}$, можно пренебречь, и у нас остается обычный калуца-клейновский спектр. Для компактифицированной квантовой теории поля это означает, что при переходе от D- к $(D-1)$-мерной теории через компактификацию одного из измерений на окружность радиуса R (с дальнейшим $R \to 0$) D-мерное поле удобно представить в виде ряда (а не интеграла) Фурье относительно компактной координаты x_0:

$$\phi(x, x_0) = \sum_n \exp\left(\mathrm{i}\pi n\,\frac{x_0}{R}\right)\phi_n(x)\,. \tag{4.7}$$

После подстановки этого выражения в действии

$$\int \mathrm{d}^{D-1}x\,\mathrm{d}x_0 \sum_{M=1}^{D} (\partial_M \phi)^2 = \\ = \int \mathrm{d}^{D-1}x \sum_n \left(\sum_{\mu=1}^{D-1} \partial_\mu \phi_n\, \partial_\mu \phi_{-n} + \frac{n^2}{R^2}\,\phi_n \phi_{-n}\right) \tag{4.8}$$

возникает сумма по $(D-1)$-мерным полям $\phi_n(x)$ с массами, в точности отвечающими первому члену в формуле (4.4). При $R \to 0$ все поля с $n \neq 0$ становятся бесконечно тяжелыми, и на масштабах, много больших R, о них можно забыть, так что в результате компактификации и размерной редукции из D-мерной теории поля возникает $(D-1)$-мерная.

Этот, прямо скажем, весьма естественный вывод не меняется и для теории открытых струн, в которой отсутствуют нетривиальные состояния, имеющие вид нестягиваемых намоток, отвечающих второму члену в формуле (4.4). Но в теории замкнутых струн вывод будет совершенно иным. В пределе $R \to 0$ калуца-клейновские моды с массами n/R по-прежнему останутся бесконечно тяжелыми, т.е. несущественными для спектра, однако массы всех состояний, соответствующих намоткам, наоборот, стремятся к нулю! Это означает, что при подобной редукции из D- в $(D-1)$-мерие, как и в теории поля, "пропадает" калуца-клейновская "башня полей", отвечающая на единицу большей размерности, но при той же процедуре точно такая же башня "восстанавливается" за счет легких при $R \to 0$ намоток струны на компактное измерение. Таким образом, "башня полей", эквивалентная дополнительному измерению, по-прежнему присутствует в спектре, т.е. никакой редукции в $(D-1)$-мерие не происходит и теория остается D-мерной!

Посмотрим теперь на ту же самую процедуру редукции в теории, в которой существуют как замкнутые, так и открытые струны. Вывод окажется достаточно парадоксальным: при $R \to 0$ замкнутые струны будут по-прежнему распространяться в D-мерном пространстве-времени, в то время как теория открытых струн станет $(D-1)$-мерной. Другими словами, если требовать самосогласованности и "гладкости" теории струн относительно изменения параметра или модуля R — размера компактифицированного измерения, то необходимо допускать существование совершенно новых нетривиальных вакуумов, где есть определенные гиперповерхности (в разобранном выше примере единичной коразмерности), на которых и только на которых могут начинаться и оканчиваться открытые струны. (Нетрудно, однако, убедиться в том, что, компактифицируя несколько измерений, коразмерность этих гиперповерхностей можно сделать произвольной.) В современной терминологии такие гиперповерхности называются Дирихле-бранами или **D-*бранами***, а "все" пространство между бранами принято называть ***балком*** (bulk).

[23] Напомним еще раз, что при отождествлении различных струнных моделей с помощью преобразований дуальности следует всегда четко оговаривать, что именно отождествляется при этом в буквальном смысле. Обычно речь идет о спектре и *некоторых* корреляционных функциях.

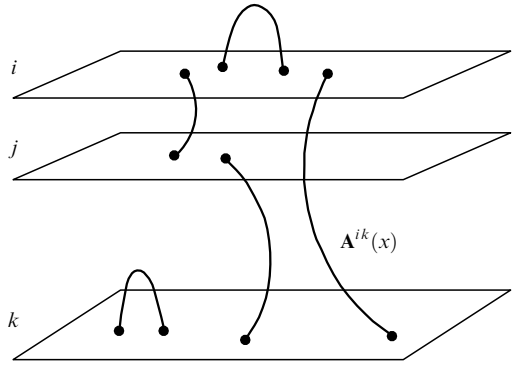

Рис. 9. D-браны. Взаимодействие осуществляется струнами, "прикрепленными" концами к различным D-бранам или разным частям одной и той же D-браны. В случае нескольких D-бран естественно возникают именно неабелевы векторные поля в спектре струны, так как векторные поля естественно приобретают дополнительные индексы, нумерующие браны, к которым "приклеены" соответствующие струны.

Перечислим основные свойства D-бран, существенные при изучении непертурбативной теории струн.

• Поскольку векторные поля возникают в открытом секторе теории струн (см. раздел 3.1), в теории (или, точнее, в вакууме) с D-бранами векторные поля *локализованы* на гиперповерхностях D-бран. Тем самым D-браны предлагают некоторый новый, чисто струнный механизм локализации векторных полей, отсутствующий в квантовой теории поля. Отметим также, что теорию с открытыми струнами во всем D-мерном пространстве можно интерпретировать как вакуум с D-браной (или несколькими бранами в случае введения факторов Чана – Патона) размерности $p = D - 1$ (рис. 9); см. раздел 4.4.

• В теории с пространственно-временно́й суперсимметрией D-браны являются БПС-состояниями, инвариантными относительно действия половины генераторов суперпреобразований. Этот факт связан с тем, что в секторе открытых струн генераторов пространственно-временно́й суперсимметрии в два раза меньше, чем в секторе замкнутых струн, так как поля на границе мирового листа связаны граничными условиями. БПС-природа D-бран непосредственно связана также с тем фактом, что они заряжены по антисимметричным тензорным полям рамон-рамоновского сектора. А именно, Dp-брана заряжена по $(p+1)$-форме, так что интеграл по мировому объему Dp-браны $\int C^{(p+1)}$, или соответствующий заряд, возникает как центральное расширение алгебры суперсимметрии, нарушающее, впрочем, полную D-мерную лоренц-ковариантность, как и наличие самой гиперповерхности D-браны.

• Натяжение D-браны обратно пропорционально *первой* степени струнной константы связи. Один из аргументов в пользу этого — взаимодействие D-браны с *открытыми струнами*, для которых теория возмущения содержит разложение по $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}$, а не $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}^2$ (см. раздел 3.3). Это отличает D-браны от так называемых солитонных бран, взаимодействующих только с замкнутыми струнами. Соответствующее эффективное действие фоновых полей (см. раздел 3.6) можно схематично представить в виде

$$\int \mathrm{d}^D x \sqrt{G}\left[\exp\left(-2\Phi\right)\left(R(G) - H^2\right) - \left(\mathrm{d}C\right)^2\right], \qquad (4.9)$$

где Φ — дилатон, $\left\langle \exp(-2\Phi)\right\rangle = \mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{-2}$, $R(G)$ — кривизна D-мерной метрики, $G \equiv \det_{MN} G_{MN}$, $H = \mathrm{d}B$ — напряженность антисимметричного тензорного поля, связанного с солитонными бранами, $\mathrm{d}C$ — напряженности рамон-рамоновских $(p+1)$-форм. Именно различная зависимость от дилатона членов $(\mathrm{d}B)^2$ и $(\mathrm{d}C)^2$ в формуле (4.9) приводит к тому, что "толщина" солитонной браны *не* зависит от $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}$ (при постоянном дилатоне уравнения, следующие из вариации членов $\sqrt{G}\left(R(G) - H^2\right)$ в (4.9), и их решения не зависят от $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}$), а натяжение браны (или ее масса) пропорционально $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{-2}$. В то же время "толщина" D-браны (решения уравнений, следующих из вариации членов $\sqrt{G}\left(\exp\left(-2\Phi\right)R(G) - \left(\mathrm{d}C\right)^2\right)$ в (4.9)) пропорциональна $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}$, а натяжение пропорционально $\mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{-1}$. Это означает, что действительно в режиме слабой связи D-брану можно рассматривать как тонкую гиперповерхность, к которой "приклеены" концы открытых струн.

Отметим, что из-за отсутствия "нормальной" непертурбативной теории указанные выше свойства устанавливаются лишь с помощью совокупности большей частью качественных аргументов (см., например, [3, 17]). В дальнейшем мы попытаемся использовать их минимально, лишь в той мере, в какой использование картины D-бран приводит к более или менее ясным физическим следствиям.

4.4. D-браны и неабелевы калибровочные поля

Попытаемся теперь разобраться более детально в том, как возникают (четырехмерные) суперсимметричные калибровочные теории в контексте теории струн. За отправную точку можно взять любую суперсимметричную теорию струн без аномалий. Существует несколько теорий, определенных изначально как *пертурбативные* разложения в терминах поляковского континуального интеграла. Общим свойством этих теорий является то, что они живут в $D = 10$ измерениях и обладают по крайней мере $\mathcal{N} = 1$ десятимерной пространственно-временно́й суперсимметрией (см. конец раздела 3.5).

Одной из важнейших составляющих связи между струнами и (неабелевыми) калибровочными теориями являются упомянутые выше D-бранные конфигурации в непертурбативной теории струн [63, 115]. D-браны — это классические ("тяжелые") объекты, которые можно представить некоторыми гиперповерхностями в пространстве-времени и основной чертой которых является способность взаимодействовать испусканием и поглощением открытых струн (см. рис. 9) даже в теориях, где запрещены открытые струны в балке или во всем пространстве. (Для простоты в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением именно таких теорий, называемых теориями типа II; см. раздел 3.5.) Как мы уже пытались объяснить в разделе 4.3, такие гиперповерхности естественно возникают в компактифицированной теории струн, если считать, что она ведет себя "гладко" относительно изменения параметров компактного многообразия.

Глядя на рис. 9, можно увидеть, что конфигурация N параллельных D-бран приводит естественным образом к эффективной $\mathrm{SU}(N)$-калибровочной теории (точнее, к теории с калибровочной группой $\mathrm{U}(N) = \mathrm{SU}(N) \otimes \mathrm{U}(1)$ и несущественным для полей в присоединенном представлении U(1)-фактором), где, более того, калибровочная группа нарушена до абелевой $\mathrm{U}(1)^{N-1}$. Действи-

тельно, рассмотрим N параллельных D-бран, тогда (ориентированная) открытая струна, натянутая между i-й и j-й бранами $(i, j = 1, \ldots, N)$, содержит в спектре векторное поле $\mathbf{A}^{ij}$. Масса такого векторного поля пропорциональна длине соответствующей струны, так как энергия (или масса) струны пропорциональна ее длине, т.е. расстоянию между i-й и j-й бранами.

Таким образом, безмассовые поля (или поля из ненарушенной калибровочной группы $\mathrm{U}(1)^{N-1}$) отвечают лишь струнам с концами на одной и той же бране, а поля $\mathbf{A}^{ij}$ при $i \neq j$ приобретают "хиггсовы" массы (2.9), пропорциональные вакуумным конденсатам скалярных полей (точнее, разностям вакуумных конденсатов для соответствующих компонент), где вакуумные значения определяются "поперечными" координатами D-бран $\phi \propto \sqrt{\mathbf{x}_\perp^2}/\alpha'$. Если открытые струны сами по себе естественно приводят к появлению безмассовых векторных калибровочных полей, то открытые струны в вакууме с D-бранами столь же естественно отвечают теориям с (вообще говоря, нарушенной) неабелевой калибровочной симметрией[24].

Следующий шаг — опять же, глядя на рис. 9, увидеть, как из десятимерной теории струн в данной конфигурации возникает калибровочная теория в пространстве с гораздо меньшим числом измерений (в идеале четырехмерная). Действительно, легко понять, что калибровочная теория "высаживается" на мировой объем D-браны, т.е. реальное число векторных индексов равно размерности мирового объема D-браны. Гиперповерхность D-браны нарушает полную десятимерную лоренц-инвариантность, поэтому лишь компоненты десятимерного векторного поля, отвечающие направлениям "вдоль" мирового объема D-браны, образуют "полноценный" вектор. Остальные же компоненты (с точки зрения ненарушенной пространственно-временно́й симметрии на мировом объеме браны) превращаются в скаляры, совершенно аналогично тому, что происходит с теорией векторного поля при редукции числа пространственно-временны́х измерений (см., например, [44]).

Мировой объем Дирихле-p-браны[25] имеет размерность $p+1$ (включая время!), т.е. простейший способ получить четырехмерную калибровочную теорию — рассмотреть параллельные D3-браны. Этот сценарий вполне возможен и приводит к $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории в пространстве-времени с четырьмя измерениями. Чтобы получить менее тривиальные теории с $\mathcal{N} = 2$ (или даже с $\mathcal{N} = 1$), лучше

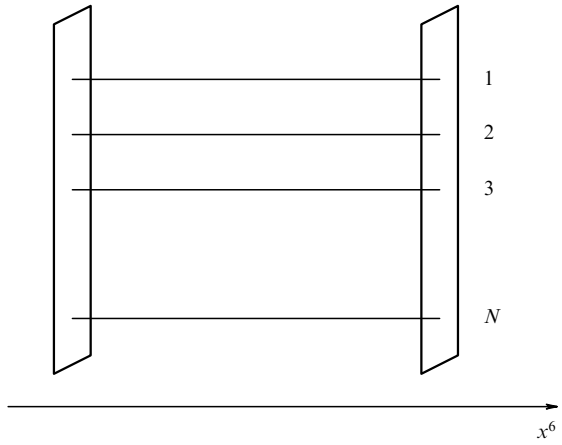

Рис. 10. 4-браны, ограниченные 5-бранами до конечного размера (в горизонтальном x^6-направлении), макроскопически приводят к четырехмерной теории.

воспользоваться другими возможностями, например так называемой "лестничной" конфигурацией Диаконеску – Ханани – Виттена [116, 118], когда N параллельных D4-бран протянуты между двумя вертикальными стенками (рис. 10). Наивно пятимерная теория на D4-бране макроскопически (в секторе легких полей) становится четырехмерной, как и любая теория Калуцы – Клейна "в ящике" или на окружности. Безусловно, существует множество других конструкций, основанных на дискретных симметриях (так называемых ориентифолдах и т.п.), но мы не будем отвлекаться на "бранную зоологию" (см., например, [30 – 32]) и обсудим лишь достаточно простой "лестничный" пример, тем более что именно этот простой пример отвечает одному из самых сильных утверждений в непертурбативных суперсимметричных калибровочных теориях.

В роли вертикальных стенок лучше всего взять 5-браны [118]. Тогда размерные соображения приводят к логарифмическому поведению макроскопической константы связи $1/g^2 \sim \ln \mu$ (ср. с формулой (2.4)). В первом приближении это обеспечивается тем, что соответствующая "компактная" координата, превращающаяся при редукции в коэффициент перед действием (2.2), является логарифмической функцией "поперечных" направлений, поскольку удовлетворяет *двумерному* уравнению Лапласа, где эффективное двумерие — положение "концов" D4-бран на 5-бранах. Вообще, тот факт, что логарифм (комплексного аргумента) представляет собой функцию Грина двумерного оператора Лапласа, является "краеугольным камнем" D-бранных конструкций суперсимметричных калибровочных теорий.

Представление 4- и 5-бранами в десятимерии верно буквально лишь в *квази*классическом приближении. В частности, это приближение сингулярно в точках, где 4-браны пересекаются с 5-бранами. Эти сингулярности красиво "разрешены" в работе [118], где предложено "поднять" всю конфигурацию в пространство-время одиннадцатимерной M-теории и считать D4-браны единой 5-браной M-теории, компактифицированной на окружность одиннадцатого измерения с координатой x^{10}. При этом "лестница" на рис. 10 превращается в поверхность "шведской стенки" и, если забыть о "макроскопических" направлениях $x^0, \ldots, x^3$, устроена,

[24] Напомним, что до осознания этого факта неабелевость калибровочных теорий строилась "руками" — с помощью "приклеивания" кварков на концы открытых струн (см. рис. 3) или введения неабелевых факторов Чана – Патона [76] непосредственно в струнные амплитуды.

[25] Во избежание путаницы остановимся еще раз на терминологии. Термин D-брана является сокращением "Дирихле-брана" (D — от фамилии Dirichlet) и не имеет никакого отношения к размерности гиперповерхности, которую традиционно обозначают буквой p. Иногда даже встречается обозначение Dp-брана (Дирихле-брана размерности p), мировой объем которой имеет размерность $p+1$. Повторим еще раз, что $p = 2$ отвечает мембране (откуда, собственно, образован термин "брана"), встречаются также D1-браны (D-струны), D0-браны (D-частицы) и даже D(-1)-браны (D-инстантоны), не говоря уже о бранах размерностей $2 < p \leqslant D-1$, где в последнем неравенстве D обозначает размерность пространства-времени (см. приложение 8.1).

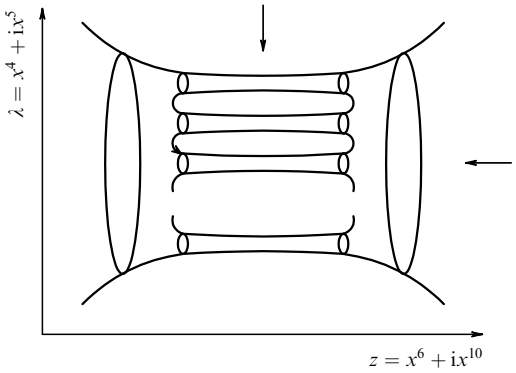

Рис. 11. Конфигурация бран, представляющая результат "разрешения" картинки на рис. 10: "лестница" превращается в "шведскую стенку" — гиперэллиптическую риманову поверхность, являющуюся одновременно N-кратным накрытием горизонтального цилиндра.

как (некомпактная) риманова поверхность с весьма специальными свойствами (рис. 11).

Другими словами, в результате "разрешения сингулярностей" возникает единая гладкая 5-брана, которая (если отбросить четыре плоских направления x^0, x^1, x^2, x^3) устроена, как N цилиндров $R \times S^1$, расположенных в пространстве-времени вдоль, скажем, координат x^6, x^{10} (которые можно "запараметризовать" комплексной координатой $z = x^6 + \mathrm{i}x^{10}$). Цилиндры "раздвинуты" в "ортогональном" пространстве $V^\perp = (x^4, x^5, x^7, x^8)$, но склеены вместе вертикальными стенками (см. рис. 11), эффективное двумерное подпространство $V^\perp$ можно описывать комплексной координатой $\lambda = = x^4 + \mathrm{i}x^5$.

Попробуем установить связь между бранными конфигурациями и комплексными многообразиями. Наиболее простой способ описать нетривиальные комплексные многообразия — аналитический, т.е. некоторыми уравнениями (в полиномах) в многомерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$. Продемонстрируем теперь, как картинки на рис. 9 и 11 можно переписать в терминах уравнений на комплексные переменные.

Вводя на цилиндре координату $w = \exp z$, мы видим, что система непересекающихся бран (см. рис. 9) описывается не зависящим от z уравнением

$$P_N(\lambda) = \prod_{i=1}^{N} (\lambda - \phi_i) = 0\,, \tag{4.10}$$

а их "связанное" состояние (см. рис. 11) — комплексной кривой Σ, т.е. одним уравнением на две комплексные переменные:

$$w + \frac{\Lambda^{2N}}{w} = P_N(\lambda)\,. \tag{4.11}$$

В пределе слабой связи $\Lambda \to 0$ (или $1/g^2 \sim \ln \Lambda \to \infty$) мы возвращаемся к системе бран (4.10). Уравнение (4.11) представляет собой аналитическую формулировку рис. 11, а именно 5-браны топологии $R^3 \times \Sigma$ вложены *голоморфно* в подпространство $R^5 \times S^1$ (например, с координатами $x^1, \ldots, x^6, x^{10}$) полного пространства-времени.

Несколько более явный способ получить те же самые уравнения связан с теорией интегрируемых систем [121]. При этом используется тот факт, что в вакуумном состоянии скалярные поля удовлетворяют БПС-условию — уравнению первого порядка (ср. с (2.13))

$$\mathrm{D}_M \Phi \equiv \partial_M \Phi + [A_M, \Phi] = 0\,, \qquad F_{MN} = 0\,, \tag{4.12}$$

принимающему буквально вид (4.12), когда только одно из полей $\Phi^{(4)}, \ldots, \Phi^{(8)}$ не равно нулю. В противном случае уравнение (4.12) содержит также вклады от взаимодействия скаляров. Это как раз случай, изображенный на рис. 11, где подразумевается, что некоторое скалярное поле, скажем, $\Phi \equiv \Phi^{(4)} + \mathrm{i}\Phi^{(5)}$, имеет ненулевое, зависящее от z вакуумное среднее.

Чтобы объяснить или "вывести" рис. 11, необходимо продемонстрировать, что уравнение (4.12) имеет *нетривиальное* решение $\Phi(z) \neq \mathrm{const}$, причиной которого являются нетривиальные граничные условия, наложенные на Φ при $z \to \pm\infty$. Этот способ подробно разобран в работах [121] и результативно приводит к так называемым *представлениям Лакса* для уравнений нетривиальных комплексных многообразий — в данном случае комплексных кривых. При этом соответствующее уравнение (4.12) превращается, например, в

$$\bar\partial \Phi^{ij} + (q_i - q_j)\Phi^{ij} = m(1 - \delta^{ij})\,\delta(z - z_0) \tag{4.13}$$

с решением

$$\Phi^{ij}(z) = p_i \delta^{ij} + m(1 - \delta^{ij})\,\frac{\theta_*\big(z - z_0 + \pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\tau\,(q_i - q_j)\big)\theta_*'(0)}{\theta_*(z - z_0)\,\theta_* \pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\tau\,(q_i - q_j)} \times \\ \times \exp\big((q_i - q_j)(z - \bar z)\big)\,, \tag{4.14}$$

где $\theta_*(z)$ — нечетная тэта-функция Якоби. Уравнение $\det\big(\lambda - \Phi(z)\big) = 0$, буквально отвечающее теории с $\mathcal{N} = 4$ (нарушенной) суперсимметрией, в пределе $m \to \infty$ и $\tau \to +\mathrm{i}\infty$ при $m^N \exp(\mathrm{i}\pi\tau) = \Lambda^N$ превращается в уравнение (4.11); подробности и ссылки на литературу можно найти в [8, 27].

Таким образом, можно получить аналитическое представление для комплексной кривой (4.11) "из первопринципов". Следующий шаг — вывод эффективного действия низкоэнергетической четырехмерной теории. Согласно [118] эту задачу можно решить, исходя из эффективного действия на мировом объеме 5-браны или теории самодуальной 2-формы $C = \{C_{MN}\}$, $\mathrm{d}C = {}^*\mathrm{d}C$. Это означает, что вместо открытых струн, как на рис. 9, взаимодействие эффективно осуществляется "открытыми" мембранами. Теория 2-форм существенно абелева, и даже если ввести матрицы C^{ij}_{MN} в присоединенном представлении $\mathrm{SU}(N)$, отвечающие мембранам, натянутым между i-м и j-м цилиндрами, в теории не может возникнуть неабелево взаимодействие, так как это нарушило бы калибровочную инвариантность. В такой теории могут появиться лишь члены "неминимального" вида — типа $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}C)^4$, которые зависят от напряженности C, содержат больше производных (старших степеней импульсов) и не существенны в низкоэнергетических эффективных действиях.

Абелева природа теории 2-форм означает, что описание оператора Лакса (вакуумной матрицы скалярных полей супермультиплета, описывающих поперечные флуктуации 5-браны) и вывод вида кривой в картине IIA — нелегкая задача. Благодаря квадратичности эффективного действия на (плоской) 5-бране

$$\int \mathrm{d}^6 x\,|\mathrm{d}C|^2 + \text{суперсимметричные члены} \tag{4.15}$$

в таком представлении не возникают поправки к виду эффективного четырехмерного действия, если уже задана кривая Σ. Достаточно рассмотреть размерную редукцию выражения

(4.15) из шести в четыре измерения [118], подразумевающую, что для 2-формы C существует разложение

$$C_{\mu z} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(A_\mu^i(x)\, \mathrm{d}\omega_i(z) + \tilde{A}_\mu^i(x)\, \mathrm{d}\bar{\omega}_i(\bar{z}) \right), \tag{4.16}$$

где $\mathrm{d}\omega_i$ — канонические голоморфные 1-дифференциалы на кривой Σ, $\mathrm{d}\bar{\omega}_i$ — комплексно-сопряженные дифференциалы, а поля $A_\mu^i(x)$ и $\tilde{A}_\mu^i(x)$ зависят только от четырех координат: $x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$.

Выбирая на римановой поверхности Σ метрику так, что ${}^*\mathrm{d}\omega_i = -\mathrm{d}\omega_i$, ${}^*\mathrm{d}\bar{\omega}_i = +\mathrm{d}\bar{\omega}_i$, условие самодуальности формы C можно свести к тому, чтобы 1-формы A и $\tilde{A}$ в (4.16) отвечали антисамодуальной и самодуальной компонентам четырехмерного калибровочного поля с напряженностью $F = \{F_{\mu\nu}\}$:

$$\mathrm{d}A^i = F^i - {}^*F^i\,, \qquad \mathrm{d}\tilde{A}^i = F^i + {}^*F^i\,. \tag{4.17}$$

Остается подставить это в (4.15), чтобы получить T_{ij} — матрицу периодов поверхности Σ (зависящую от вакуумных средних поперечных скалярных полей, поскольку мы уже определили вложение кривой Σ в пространство (x^4, x^5, x^6, x^{10})).

В результате для четырехмерного эффективного действия получаем

$$\int \mathrm{d}^4x\, (\operatorname{Im} T_{ij})\, F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^j + \text{суперсимметричные члены}, \tag{4.18}$$

где эффективные константы связи выражаются через (мнимую часть) матрицы периодов

$$\operatorname{Im} T_{ij} = \int_\Sigma \mathrm{d}\omega_i \wedge \mathrm{d}\bar{\omega}_j$$

вспомогательной римановой поверхности (4.11). Действие (4.18) совпадает с результатом теории Виттена – Зайберга [75] с точностью до топологического тэта-члена, который можно восстановить более аккуратным обращением с действием самодуальной 2-формы.

4.5. Теория Виттена – Зайберга

Теорией Виттена – Зайберга [75] мы называем конструкцию точных непертурбативных эффективных действий для низкоэнергетических $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий. Точные непертурбативные формулы [75] содержат информацию о спектре БПС-возбуждений ("W-бозонов" и монополей; см. раздел 2.3) и вильсоновском эффективном действии безмассовых полей (см., например, [43, 88]).

Как уже отмечалось в разделе 2.4, суперсимметрия приводит к сильным ограничениям на вид эффективного действия. В случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий в четырехмерном пространстве-времени *не перенормируется* "классический" суперпотенциал W (что позволяет делать точные утверждения о вакуумах теории — критических точках суперпотенциала $\mathrm{d}W = 0$), в то время как кинетические члены могут быть записаны с помощью кэлеровой метрики (или кэлерова потенциала). Для расширенной суперсимметрии ограничений еще больше: симметрия запрещает абелевы потенциальные члены (т.е. вместо набора "вакуумных точек" имеется непрерывное параметрическое семейство *модулей* вакуумов), а эффективное действие, например, для векторных супермультиплетов описывается с помощью одной голоморфной функции нескольких комплексных переменных [108, 75] — ***препотенциала*** (или, другими словами, геометрия пространства модулей эффективной теории является *специальной* кэлеровой).

Обратимся к теории Виттена – Зайберга для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга – Миллса без материи[26]. Скалярный потенциал в $\mathcal{N} = 2$ теории "неабелев": $V(\boldsymbol{\phi}) = \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}^\dagger]^2$. Его минимумы после факторизации по калибровочной группе отвечают диагональным ($[\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}^\dagger] = 0$), а в теории с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)$ — бесследовым матрицам (2.6). В результате спонтанного нарушения калибровочной группы (в точке общего положения) возникает эффективная $\mathcal{N} = 2$ абелева калибровочная теория с эффективным лагранжианом $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}(\Phi_i)$; последний можно записать, скажем, в терминах суперполей Φ_i, вакуумные значения которых $\langle \Phi_i \rangle = \phi_i$ совпадают с диагональными элементами (2.6). Поэтому функция комплексных переменных

$$\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\phi})\Big|_{\sum \phi_i = 0}$$

(в качестве переменных a_i в теории возмущений можно выбрать, например, $a_i = \phi_i - \phi_N$, $i = 1, \ldots, N-1$) определяет эффективное вильсоновское действие безмассовых полей с помощью подстановки

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} \propto \operatorname{Im} \int \mathrm{d}^4\vartheta\, \mathcal{F}(\phi_i \to \Phi_i) = \\ = \left(\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i\, \partial a_j} \right) F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^j + \text{суперсимметричные члены}. \tag{4.19}$$

Заметим сразу, что эффективное действие (4.19) полностью совпадает с (4.18), если отождествить матричные элементы матрицы периодов со вторыми производными препотенциала: $T_{ij} = \partial^2 \mathcal{F} / \partial a_i\, \partial a_j$.

В теории возмущений формулу (4.19) можно проверить явными вычислениями квантовых петлевых поправок, которые в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории полностью исчерпываются вкладом однопетлевых диаграмм (см. рис. 1). Интегрирование по импульсам в петле приводит к соотношению

$$T_{\text{1-loop}} \propto \sum_{\text{masses}} \ln \frac{(\text{mass})^2}{\Lambda^2}\,, \tag{4.20}$$

где сумма берется по массам распространяющихся в петле полей, $\Lambda \equiv \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ — масштабный параметр теории. Наиболее простым способом этот результат можно записать в виде формулы Коулмена – Вайнберга для препотенциала:

$$\mathcal{F}_{\text{1-loop}} = \frac{1}{4} \sum_{\text{masses}} (\text{mass})^2 \ln \frac{(\text{mass})^2}{\Lambda^2}\,. \tag{4.21}$$

В "чистой" теории калибровочных полей Янга – Миллса единственным источником масс в (4.21) является эффект

[26] Под материей в суперсимметричных калибровочных теориях подразумеваются лишь мультиплеты фермионных и скалярных полей в фундаментальных представлениях калибровочной группы — аналоги кварков обычной несуперсимметричной КХД. В теориях с расширенной суперсимметрией имеются также фермионы и скаляры в присоединенном представлении — суперпартнеры векторных полей.

Хиггса (2.9), поэтому окончательный пертурбативный результат (4.21) принимает вид

$$\mathcal{F}_{\text{pert}} = \mathcal{F}_{\text{1-loop}} = \frac{1}{4}\,\text{Tr}\left(\boldsymbol{\phi}^2 \ln \frac{\boldsymbol{\phi}^2}{\Lambda^2}\right). \tag{4.22}$$

То же самое вычисление можно выполнить и в общем случае: результатом будет (альтернированная) сумма членов вида (4.22), отвечающих каждому мультиплету. След в каждом члене должен вычисляться в соответствующем представлении: $\text{Tr} \equiv \text{Tr}_R$ (знак "+" для векторного и знак "−" для гипермультиплета). Что касается массивных возбуждений, то оказывается, что спектр БПС-состояний

$$M \propto |\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_D| \tag{4.23}$$

связан с препотенциалом $\mathcal{F}$ формулой [75]

$$\mathbf{a}_D = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{a}}\,. \tag{4.24}$$

Целочисленные векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ в формуле (4.23) отвечают соответственно "электрическим" и "магнитным" зарядам относительно "выживающей" калибровочной группы $\text{U}(1)^{N-1}$.

Сложнее обстоит дело с инстантонными вкладами. Хорошо известна общая структура эффективного действия, согласно которой препотенциал имеет асимптотическое разложение при больших вакуумных средних ($\langle\Phi\rangle \gg \Lambda$)

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{pert}} + \mathcal{F}_{\text{inst}} = \frac{1}{4}\sum_{\{I\}} a^2_{\{I\}} \ln\frac{a^2_{\{I\}}}{\Lambda^2} + \\ + \sum_{\{I\}} a^2_{\{I\}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\{I\},k}\left(\frac{\Lambda}{a_{\{I\}}}\right)^{2Nk} \tag{4.25}$$

с некоторыми коэффициентами $\mathcal{F}_{\{I\},k}$, где I — мультииндекс, отвечающий различным компонентам вектора $\mathbf{a}$. Члены с фиксированным значением k в правой части (4.25) отвечают сектору с инстантонным числом k в $\text{SU}(N)$-теории Янга–Миллса. Например, в теории с группой SU(2) интеграл по размерам инстантонов имеет вид $\int \mathrm{d}\rho\,\rho^{-5}$ и для k инстантонов приводит к масштабному фактору Λ^{4k}.

Однако *все* коэффициенты $\mathcal{F}_{\{I\},k}$ принципиально *невозможно* вычислить стандартными квантовополевыми методами. Каждый из них может быть записан в виде некоторого интеграла по (каждый раз, вообще говоря, разному) пространству модулей инстантонов, поэтому "относительная нормировка" просто никак не определена. Другое дело, что подобные нормировки можно пытаться выбрать некоторым "естественным" образом, и все произведенные вычисления k-инстантонных вкладов (в основном в теории с калибровочной группой SU(2)) подтверждают гипотезу Виттена–Зайберга.

Согласно гипотезе Виттена–Зайберга [75] БПС-массы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_D$ выражаются через периоды мероморфного дифференциала $\mathrm{d}S$ на вспомогательной римановой поверхности Σ и зависят от вакуумных значений скалярных полей как от определенных координат на пространстве модулей комплексных структур римановой поверхности Σ. В частности, в этих координатах роль матрицы

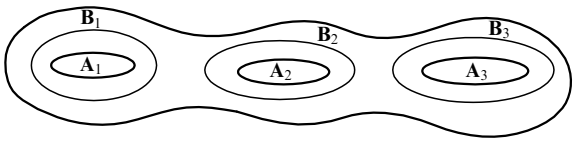

Рис. 12. Компактная риманова поверхность рода $g = 3$ с нанесенным базисом **A**- и **B**-циклов и "формой пересечений" $\mathbf{A}_i \circ \mathbf{B}_j = \delta_{ij}$. Аналогичная картинка возникает на рис. 11 в случае, если "добавить руками" обе бесконечно удаленные точки $\lambda = \infty$.

эффективных зарядов $T_{ij}(\mathbf{a}) = \partial^2\mathcal{F}/\partial a_i\,\partial a_j$ играет *матрица периодов* римановой поверхности Σ. Например, в случае чистой калибровочной теории с группой $\text{SU}(N)$ вспомогательная риманова поверхность имеет в точности вид (4.11) [109], где коэффициенты полинома $P_N(\lambda)$ выражаются через вакуумные средние скалярных полей (2.7). При этом точные квантовые значения БПС-масс связаны с вакуумными средними с помощью *периодов* по так называемым **A**-циклам для W-бозонов (рис. 12)

$$\mathbf{a} = \oint_{\mathbf{A}} \mathrm{d}S \tag{4.26}$$

и **B**-циклам для монополей

$$\mathbf{a}^D = \oint_{\mathbf{B}} \mathrm{d}S \tag{4.27}$$

мероморфного дифференциала

$$\mathrm{d}S = \lambda\,\frac{\mathrm{d}w}{w}\,. \tag{4.28}$$

Свойства этого дифференциала обеспечивают (см. подробности, например, в [8, 27]) представление матрицы периодов римановой поверхности (4.11) в виде производных

$$T_{ij} = \frac{\partial a_i^D}{\partial a_j} = \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial a_i\,\partial a_j}\,. \tag{4.29}$$

Формулу (4.11) можно пытаться понять (но не вывести!) следующим способом. В теории возмущений массы "частиц" (W-бозонов и их суперпартнеров) пропорциональны разностям *корней* "производящего" полинома ϕ_i в (2.7). Поэтому их можно "вычленить" из полинома (2.7) с помощью формулы вычетов

$$m_{ij} \propto \oint_{C_{ij}} \lambda\,\mathrm{d}\ln P_N(\lambda)\,, \tag{4.30}$$

которая для контура C_{ij} в виде "восьмерки", огибающей точки $\lambda = \phi_i$ и $\lambda = \phi_j$ (рис. 13), приводит прямо к (2.9). Контурный интеграл (4.30) можно рассматривать как интеграл на *вырожденной* римановой поверхности, т.е. ("удвоенной") λ-плоскости с N отмеченными точками — корнями полинома (2.7). Тогда смысл формул (4.11) заключается в том, что единственным непертурбативным эффектом в терминах римановой поверхности является "разрешение" сингулярностей наиболее простым возможным способом — заменой отмеченных точек при $\lambda = \phi_i$ на "ручки":

$$w + \frac{\Lambda^{2N}}{w} \propto \lambda - \phi_i\,,$$

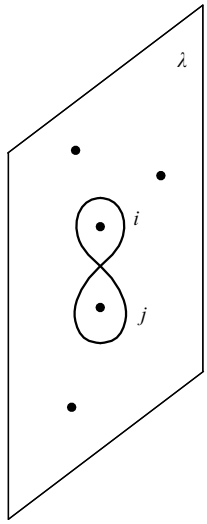

Рис. 13. Контур в виде "восьмерки", огибающей точки $\lambda = \phi_i$ и $\lambda = \phi_j$ в λ-плоскости, является "прототипом" **A**-цикла на кривой Виттена–Зайберга.

переходя таким образом от λ-плоскости с отмеченными точками к гладкой римановой поверхности (см. рис. 11).

Вырожденная риманова поверхность ("два экземпляра" λ-плоскости с N отмеченными точками) представлена в верхней части рис. 14. Как уже говорилось, вырожденный предел отвечает слабой связи в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории, поэтому его можно получить прямо из однопетлевой теории

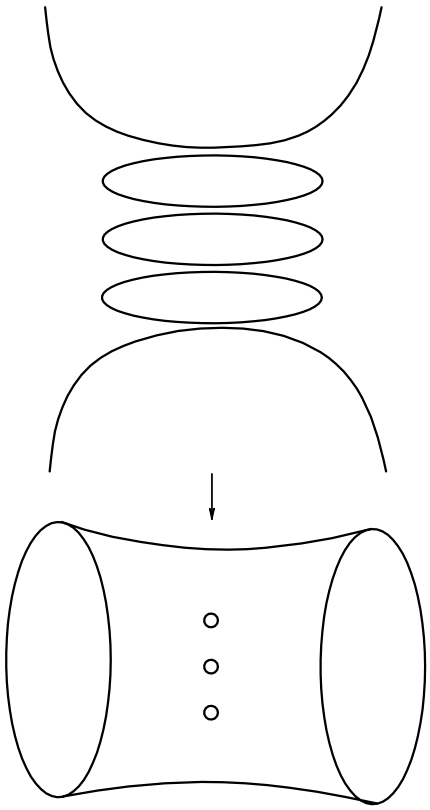

Рис. 14. Два вырожденных предела гладкой кривой, изображенной на рис. 11.

возмущений. Гораздо больший интерес представляет противоположный предел, отвечающий нижней вырожденной римановой поверхности на рис. 14. Этот предел "устойчив" при нарушении суперсимметрии до $\mathcal{N} = 1$ (соответствующие значения модулей вырожденной кривой лежат в минимуме $\mathcal{N} = 1$ потенциала). Именно в нижнем пределе обращаются в нуль периоды (4.27), а значит, и соответствующие им массы магнитных монополей. (**B**-циклы отвечают маленьким кружкам на рис. 14, а дифференциал (4.28) в соответствующих точках несингулярен.)

Эффективный $\mathcal{N} = 1$ суперпотенциал приобретает вид

$$\mathcal{W} = \tilde{Q}\, a^D(u)\, Q + \mu u\,, \tag{4.31}$$

где $u = \langle \mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\phi}^2 \rangle$, Q и $\tilde{Q}$ — вакуумные средние монополей, μ — масштаб нарушения $\mathcal{N} = 2$ до $\mathcal{N} = 1$, а функция $a^D(u)$ определена интегралом (4.27). Отсюда следует, что в минимуме $\langle \tilde{Q} Q \rangle \sim \mu$, что приводит к конденсации монополей в $\mathcal{N} = 1$ теории и хорошо известному в сверхпроводимости дуальному эффекту — вытеснению электрического поля, т.е. к (абелеву) конфайнменту. Таким образом, суперсимметричная теория Виттена–Зайберга допускает точное непертурбативное решение и является интереснейшей лабораторией по изучению свойств реальной КХД [46, 47].

4.6. Точные непертурбативные результаты и интегрируемые системы

Тот факт, что теория струн обладает необычайно высокой симметрией, по сути дела впервые позволил поставить вопрос о вычислении точных корреляционных функций в совершенно нетривиальных теориях, более того, не относящихся к квантовым интегрируемым моделям, по крайней мере в каноническом смысле этого слова. Основная идея получения точных ответов из симметрийных соображений — вывести соотношения, которым удовлетворяют корреляционные функции. Если симметрия высокая, то соотношений может быть достаточно для того, чтобы извлечь из них точное решение. Именно в теории струн (точнее, в ее простейших моделях) оказалось возможным получить таким способом полную (в том числе непертурбативную) информацию о корреляционных функциях.

Сначала определенный прогресс был достигнут в теориях "без материи" или теориях двумерной гравитации с "минимальной" ($c \leqslant 1$) материей. (Напомним, что центральный заряд c "считает" число степеней свободы.) Оказалось, что такие теории эффективно описываются в виде матричных моделей двумерной гравитации, т.е. *конечномерных* матричных интегралов вида

$$Z = \int \mathrm{D}M \exp\left(-V(M)\right), \tag{4.32}$$

где $\mathrm{D}M \propto \prod_{i,j} \mathrm{d}M_{ij}$ обозначает простейшую меру интегрирования по конечным матрицам.

Разложение по петлям или топологиям матричных графов [70] интеграла (4.32) воспроизводит (дискретизованную версию) разложения по петлям (3.11) $c \leqslant 1$ струнных моделей, а двойной скейлинговый предел формулы (4.32) [62] позволяет прямо отождествить $\mathcal{F} \propto \ln Z$ с производящей функцией

струнных корреляторов

$$\langle \mathcal{O}_{i_1} \dots \mathcal{O}_{i_n} \rangle = \frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial T_{i_1} \dots \partial T_{i_n}} \tag{4.33}$$

и/или эффективным действием. Информация о функции $\mathcal{F}$, как оказалось, может быть закодирована в нелинейных интегрируемых уравнениях.

Производящая функция зависит от переменных двух типов. Первый тип переменных — источники для физических операторов

$$\mathcal{F}(\mathrm{g}_{\mathrm{str}}, \mathbf{T}) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{2g-2} \mathcal{F}_g(\mathbf{T}) = \\ = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{g}_{\mathrm{str}}^{2g-2} \int \mathrm{D}h_{ab}\, \mathrm{D}\mathbf{X} \exp\left(-S_{\mathrm{CFT}}(\mathbf{X}, h_{ab}) + \sum T_k \mathcal{O}_k\right), \tag{4.34}$$

производные по которым (4.33) определяют корреляционные функции в теории. Выражение (4.34) зависит от выбора базиса $\mathcal{O}_k$ или T_k, и только в некотором специальном базисе (не обязательно удобном, с точки зрения формулировки теории на мировом листе) может быть элегантно описано на языке нелинейных дифференциальных уравнений или соотношений типа унитарности для корреляторов.

Вообще говоря, такие соотношения хорошо известны в традиционной квантовой теории поля (тождества Уорда, уравнения Швингера – Дайсона и т.п.). Однако в теории струн ситуация отличается тем, что эти соотношения можно написать в виде *замкнутой* системы *интегрируемых* дифференциальных уравнений, полностью определяющих производящую функцию (4.34). Как функцию параметров $\mathbf{T}$ производящую функцию (4.33), (4.34) можно определить лишь в виде формального ряда, коэффициенты которого отождествляются с корреляционными функциями, а сам ряд имеет, вообще говоря, нулевой радиус сходимости. Этот факт отражает хорошо известные свойства рядов теории возмущений в теории струн и квантовой теории поля и, кроме того, согласован с явными формулами для точных непертурбативных решений, которые, если существуют, имеют обычно интегральную форму и иногда могут быть сведены к матричным интегралам (4.32). Однако отдельные члены ряда (4.34), например $\mathcal{F}(\mathbf{T}) \equiv \mathcal{F}_0(\mathbf{T})$, вполне можно описать в терминах хорошо определенных функций.

Другими параметрами, от которых зависит статистическая сумма или производящая функция, являются физические или пространственно-временны́е модули теории. Пространство параметров (обычно конечномерное, в рассматриваемых случаях комплексное) часто интерпретируется как пространство модулей комплексных многообразий. Повторим, что возникающие в этом контексте комплексные кривые или римановы поверхности имеют "пространственно-временну́ю" природу (например, происходят из струнной компактификации) и никак не связаны с мировыми листами в теории струн!

Как функция модулей производящая функция является обычной (например, мероморфной) функцией многих комплексных переменных, и ее часто можно вычислить более или менее явным образом. Самим модулям можно придать смысл низкоэнергетических значений фоновых полей (хиггсовские средние скаляры, модули физической метрики — комплексные и кэлеровы структуры, и т.п.), и производящая функция $\mathcal{F}$ имеет смысл эффективного действия. Существующая связь между геометрией комплексных многообразий и интегрируемыми системами позволяет идентифицировать функции $\mathcal{F}$ с решениями систем нелинейных интегрируемых уравнений.

В общем случае зависимости от производящих параметров и модулей, естественно, различны[27], и интерес представляют обе задачи независимо. Например, для теории Виттена – Зайберга существует пока полноценный ответ лишь на первый вопрос[28], и чрезвычайно существенным фактом является то, что вильсоновское эффективное действие в безмассовом секторе можно выразить через *функцию* нескольких комплексных переменных в (4.19). Таким образом, именно знание функции комплексных переменных $\mathcal{F}$ как функции модулей и ее всевозможных производных (например, разложения по источникам $\mathbf{T}$) дает наиболее полную непертурбативную информацию о теории.

Эффективную теорию можно сформулировать в терминах (классической) интегрируемой системы. Эта формулировка универсальна в том смысле, что она не зависит от очень многих свойств "затравочной" теории, например от размерности пространства-времени: двумерные, четырехмерные и даже пятимерные теории выглядят практически одинаково с этой точки зрения. Более того, полученные эффективные теории во многом напоминают *топологические* теории поля и обладают рядом свойств, присущих двумерным топологическим теориям, хотя затравочные теории являются заведомо многомерными, а главное, в этих эффективных теориях распространяются безмассовые частицы.

Приведем основные типы интегрируемых дифференциальных уравнений непертурбативной теории струн.

"Условия Вирасоро" (более точно, условия вирасоровского типа [103 – 105]) — очередное проявление не до конца понятой "двойственности" между мировыми листами и пространством-временем. "Условия Вирасоро", возникающие в матричных моделях двумерной гравитации и топологических теориях, имеют общий вид:

$$\mathcal{L}_n \exp \mathcal{F} = 0\,, \tag{4.35}$$

где $\mathcal{L}_n$ — дифференциальные операторы по параметрам $\{T_n\}$, образующие ***алгебру Вирасоро*** (3.17). Отметим особо, что уравнения этого типа возникают уже в некоторой эффективной теории струн в пространстве-времени. В отличие от вирасоровских генераторов репараметризаций на мировом листе операторы $\mathcal{L}_n$ в данном контексте имеют исключительно пространственно-временну́ю интерпретацию.

Решения условий (4.35), как правило, выражаются через тау-функции иерархий интегрируемых уравнений и в некоторых случаях могут быть представлены в виде матричных интегралов. (По поводу появления условий Вирасоро в матричных моделях, а также связи матричных моделей с интегрируемыми системами см., например, обзор в *УФН* [11].) Для производящих функций, представленных как матричные интегралы (4.32), ***условия Вирасоро*** — следствие петлевых уравнений или тождеств Уорда $\langle \delta V \rangle = 0$ (усреднение понимается в смысле статистической суммы (3.32)), являющихся по сути дела простейшим аналогом тождеств Уорда в калибровочной теории поля.

Уравнения ассоциативности — нетривиальная переопределенная система нелинейных дифференциальных уравнений на производящую функцию $\mathcal{F}$, в которую входят ее третьи

[27] В топологической 2D-гравитации и некоторых топологических струнных моделях (A_p-серии) зависимости от модулей t и источников T практически совпадают ($(t+T)$-формула [106]).

[28] По поводу зависимости от производящих параметров и аналога $(t+T)$-формулы в теории Виттена – Зайберга см. [122].

производные [102]. Собрав третьи производные в матрицы

$$\|\boldsymbol{\mathcal{F}}_i\|_{jk} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial T_i \, \partial T_j \, \partial T_k} \,,$$

уравнения ассоциативности можно записать в довольно компактном виде [113]:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_i \boldsymbol{\mathcal{F}}_j^{-1} \boldsymbol{\mathcal{F}}_k = \boldsymbol{\mathcal{F}}_k \boldsymbol{\mathcal{F}}_j^{-1} \boldsymbol{\mathcal{F}}_i \quad \forall \; i, j, k \,. \tag{4.36}$$

Первоначально уравнения ассоциативности были обнаружены в топологических струнных моделях, однако позднее выяснилось, что они возникают в гораздо более широком классе эффективных теорий, например в теории Виттена – Зайберга.

"Квазиклассические" интегрируемые иерархии возникают, как правило, при попытках найти точно сферические вклады $\mathcal{F}(\mathbf{T}) \equiv \mathcal{F}_0(\mathbf{T})$, когда они сводятся к бездисперсным аналогам иерархий типа Кадомцева – Петвиашвили или цепочки Тоды. В более широком смысле уравнениями квазиклассических иерархий можно описать, например, эффективные действия в теории Виттена – Зайберга: препотенциал $\mathcal{F}$ является логарифмом тау-функции некоторого нетривиального решения квазиклассической иерархии. Известные решения квазиклассических иерархий связаны обычно с геометрией комплексных многообразий. Одним из следствий такой связи является "локализация" или существование формул вычетов вида

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial T_i \, \partial T_j \, \partial T_k} = \operatorname{res}\left(\frac{\mathrm{d}H_i \, \mathrm{d}H_j \, \mathrm{d}H_k}{\Omega}\right), \tag{4.37}$$

где $\mathrm{d}H_i$ — 1-формы, "связанные" с переменными T_i, а Ω — некоторая "симплектическая" 2-форма, следствием которой являются, например, уравнения ассоциативности (4.36).

5. Струны и дуальность между калибровочными теориями и гравитацией

5.1. Голография и струны

Одной из интереснейших физических идей последнего времени в теории струн является применение "голографического принципа", позволяющего описать теорию в полном D-мерном пространстве-времени (или некоторой его части) — в так называемом *балке* — с помощью информации, "закодированной" на *границе*. Такая возможность существует далеко не всегда, так как теория в балке содержит, вообще говоря, больше информации, чем имеется на границе: наивно число степеней свободы "объемной" теории гораздо больше. Грубо говоря, отношение числа степеней свободы в балке размерности D и на границе коразмерности δ (обычно $\delta = 1$) с ростом характерного размера системы L растет, как $L^D/L^{D-\delta} = L^\delta$. Кроме того, в традиционной квантовой теории поля теория "внутри" (скажем, функции Грина) полностью определяется теорией на границе лишь в квадратичном, или свободном, случае.

В отличие от квантовой теории поля теория струн неизбежно включает гравитацию, в которой, по-видимому, соотношение между теорией на границе и в балке совершенно иное. Одним из проявлений этого факта является хорошо известная *линейная* связь между энтропией черной дыры и площадью поверхности горизонта, демонстрирующая, что число степеней свободы в гравитации пропорционально вовсе не объему, как можно

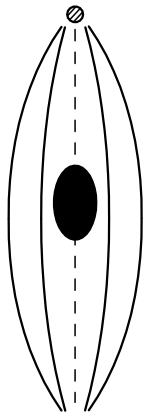

Рис. 15. Голографический принцип 't Хофта. Точка, проекция которой на границу невозможна из-за наличия на пути прямого луча некоторого материального тела, тем не менее, проецируется из-за отклонения лучей гравитационным полем.

было бы ожидать из квантовой теории поля. Другое проявление того же факта известно как голографический принцип 't Хофта [107], согласно которому из-за искривления лучей в гравитационном поле любая точка балка может быть спроецирована на границу (рис. 15).

Теория струн объединяет "материю" (открытые струны) и гравитацию (замкнутые струны). Более того, как уже отмечалось в разделе 4.4, в теории струн естественно возникают вакуумы, в которых материя сосредоточена на некоторых гиперповерхностях в пространстве-времени, в то время как замкнутые струны или гравитоны распространяются везде в балке. Неизбежное возникновение замкнутых струн в теории открытых струн (см. рис. 5) приводит к тому, что существует возможность установить некоторую *голографическую* (в указанном выше смысле) аналогию между теорией материи, или открытых струн, на D-бране ("границе") и теорией замкнутых струн, или гравитацией, в балке.

Иными словами, одни и те же эффекты можно сформулировать как на языке открытых струн, или теории Янга – Миллса, так и на языке теории замкнутых струн, или гравитации. В данном разделе мы попытаемся обсудить некоторые следствия этой дуальности, обычно объединяемые на современном жаргоне термином "АдС/КТП-соответствие". Широко известный частный случай этого явления — дуальность между $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной четырехмерной конформной теорией Янга – Миллса (конформной теорией поля — КТП) и гравитацией в пятимерном пространстве анти-де-Ситтера (АдС) [123] (см. раздел 5.4). Наиболее интересным физическим эффектом, который можно попытаться понять глубже в рамках АдС/КТП-соответствия, является предложенная Поляковым [119] параллель между двумя самыми важными проблемами в современной теоретической физике — конфайнментом или удержанием кварков в неабелевой калибровочной теории и невылетанием материи за горизонт черной дыры.

Другим интересным аспектом рассматриваемой картины является включение в физическую картину мира так называемых дополнительных измерений. В отличие от ставших уже традиционными идей Калуцы – Клейна [64] (см. также [44]) о дополнительных *малых* измерениях, ответственных за внутренние симметрии теории, в дан-

ной картине мира дополнительные измерения вовсе не обязаны быть малыми (вообще говоря, они могут быть даже некомпактными). Подробно вопросы теорий с "дополнительными" измерениями (правда, не в контексте теории струн) рассматривались в недавнем обзоре в *УФН* [40].

5.2. Дуальность открытых и замкнутых струн

Как уже обсуждалось в разделе 3.1, теория струн является единственным разумным кандидатом на роль единой теории векторных полей и гравитации именно потому, что естественным образом объединяет переносчиков этих взаимодействий как возбуждений открытых и замкнутых струн. Одно из следствий этой связи — возможная интерпретация замкнутых струн как связанных состояний в теории открытых струн (см. рис. 5). Другое столь же естественное следствие возникает, если рассмотреть однопетлевую диаграмму в теории открытых струн, отвечающую мировому листу с топологией "цилиндра" (рис. 16). Если посмотреть на ту же самую диаграмму с точки зрения замкнутых струн, то она отвечает просто древесному пропагатору (ср. с рис. 6) и, таким образом, говорит о том, что однопетлевые (т.е. квантовые) эффекты в теории открытых струн могут иметь дуальное описание в терминах древесной (т.е. классической) гравитации — безмассовой части спектра замкнутых струн.

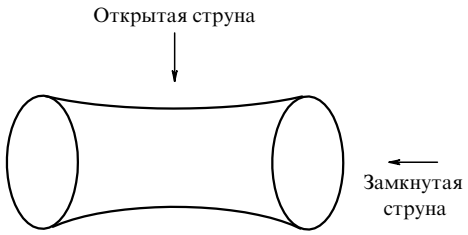

Рис. 16. Однопетлевая диаграмма в теории открытых струн эквивалентна древесной диаграмме в теории замкнутых струн.

Эту чисто струнную дуальность в принципе можно реализовать как дуальность между калибровочными теориями и гравитацией, что приводит к уже упомянутым параллелям между удержанием кварков в адронах и невылетанием материи за горизонт черных дыр. Данная идея стала чрезвычайно популярной в последнее время благодаря более или менее явному примеру "голографической" дуальности между $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теорией и геометрией $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ (т.е. прямого произведения пятимерного пространства Лобачевского или анти-де-Ситтера и пятимерной сферы; см. раздел 5.4). Струнную дуальность иногда называют "голографической", так как с точки зрения непертурбативной теории струн на нее можно смотреть как на следствие голографического принципа или, говоря более простыми словами, того факта, что гравитацию можно описать в терминах некоторой эффективной теории на поверхности занимаемого ею объема.

Более подробно, гипотетический сценарий струнной дуальности основан на следующих предположениях.

• Материя, описываемая в терминах калибровочных полей и их суперпартнеров или открытых струн, "привязана" к некоторым гиперповерхностям в многомерном (скажем, $D = 10$ или $D = 11$) пространстве-времени, так как концы открытых струн могут находиться *только* на этих D-бранах[29] (см. рис. 9).

• В отличие от материи гравитация, отвечающая безмассовым возбуждениям *замкнутых* струн, может распространяться везде в балке десятимерного пространства-времени, т.е. действительно является (по крайней мере) десятимерной, как и должно быть в любой самосогласованной теории *квантовой* гравитации, или теории критических струн.

• Браны материи (D-браны) являются источниками гравитационного поля, которое в классическом приближении ($\alpha' \to 0$) можно рассматривать как решение объемных уравнений движения с граничными условиями на бранах. Таким образом, с одной стороны, граничные члены можно просто считать локализованными источниками гравитационного поля, а с другой стороны, более детальный анализ позволяет рассматривать граничное действие в теории гравитации как производящую функцию для корреляторов в теории (материи) на бране.

• В наиболее простых моделях геометрия многомерного пространства "приводима", т.е. имеет вид прямого произведения пространств типа $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$, где компактная часть (пятимерная сфера $\mathbf{S}^5$) "зафиксирована", а основные физические эффекты связаны с некомпактной частью, в которой четыре координаты $\{x_\mu\}$ являются координатами наблюдаемого пространства-времени, в то время как пятая координата, скажем, y (от которой метрика зависит нетривиально), играет роль размера или масштабного фактора наблюдаемого пространства-времени[30]. Другими словами, метрику можно представить в выделенном в теории струн виде "фридмановской вселенной":

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}y^2 + a(y)\,\mathrm{d}x_\mu^2\,. \tag{5.1}$$

• Положение браны материи в дополнительном (пятом) измерении, отвечающем масштабному фактору метрики макроскопической теории, находится как решение пятимерных уравнений движения (с "гравитационной стороны") или уравнений ренормгруппы (с точки зрения калибровочной теории материи). Поскольку уравнения движения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка (в отличие от уравнений ренормгруппы, являющихся дифференциальными уравнениями первого порядка по масштабному фактору), связь между ними нетривиальна. Одна из существующих возможностей [127] — использовать гамильтонов формализм [35] в пятимерной теории гравитации. Развитием этой точки зрения могло бы быть непосредственное описание граничного эффективного действия в терминах тау-функции некоторой интегрируемой системы (см. раздел 4.6).

Большинство идей о соответствии между калибровочными теориями и теорией гравитации возникло [119] как непосредственное развитие хорошо исследованного соответствия между нульмерными (одномерными) калибровочными теориями (так называемыми матричными

[29] По крайней мере в теориях типа II.

[30] В данном случае пятимерная геометрия играет роль пятимерного "гравитационного балка", ограниченного браной коразмерности $\delta = 1$.

моделями — матричной квантовой механикой) и теорией двумерной гравитации или $c \leqslant 1$ струнными моделями [62, 99 – 101].

5.3. Конфайнмент и черные дыры

Одна из старейших проблем в теории струн, явившаяся по сути дела ее источником, — описание одномерных протяженных объектов в теории сильных взаимодействий. Многочисленные попытки сформулировать теорию струн, адекватную описанию вильсоновских петель в теории калибровочных полей и КХД, привели к мысли [119] о том, что такая теория с неизбежностью должна быть некритической. Эффективное натяжение должно зависеть от дополнительной струнной координаты, играющей роль масштаба, и в некоторой точке обращаться в нуль или в бесконечность. Это означает, что струнное действие в такой модели имеет общий вид:

$$\int_{\Sigma} \left(\partial\varphi\,\bar{\partial}\varphi + a(\varphi)\,\partial\mathbf{X}\,\bar{\partial}\mathbf{X} + \ldots\right), \tag{5.2}$$

с тем чтобы в критической точке теория имела шанс совпасть с теорией калибровочных полей.

Главной проблемой является отождествление действия (5.2) с точно решаемой двумерной конформной теорией поля, обладающей необходимым спектром и другими свойствами. В основных чертах "гравитационная картина" конфайнмента изображена на рис. 17. Действию (5.2) в гравитационном приближении отвечает "метрика Фридмана" (5.1), при этом координаты $\{x_\mu\}$ являются нулевыми модами "двумерных полей" $\{X_\mu(\sigma,\tau)\}$, а координата y — нулевой модой "двумерного поля" $\varphi(\sigma,\tau)$. Функция $a(y)$ качественно устроена так, что с одной стороны оси y она растет и пространство-время является некоторым макроскопическим пятимерным пространством, а с другой стороны оси y, напротив, функция $a(y) \to 0$ и возникает некоторая "горловина" с сильным гравитационным полем, удерживающим материю.

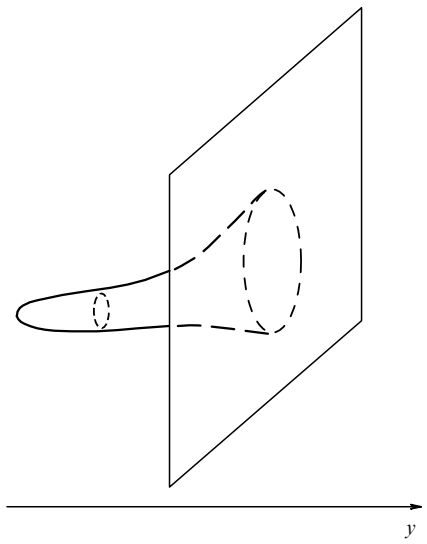

Рис. 17. Гравитационная аналогия конфайнмента. Метрика типа метрики "черной дыры" вдали от "горизонта" является практически плоской, а за "горизонтом" превращается в узкую горловину с сильным гравитационным полем, удерживающим кварки.

Существенной особенностью данной картины является "нестандартность" гравитации по сравнению с обычной гравитацией наблюдаемого (макроскопического) пространства-времени. Во-первых, эффекты этой "адронной" гравитации [119] должны становиться существенными не на планковском масштабе, а уже на масштабе сильного взаимодействия (порядка 10^3 МэВ). Во-вторых, метрика (5.1) не является наблюдаемой хотя бы в том смысле, что координата y не является настоящей координатой (или координатой "видимого" пространства-времени), а играет роль масштаба в теории. Кроме того, следует отметить, что собственно гравитационное описание применимо лишь в ситуации, когда подавлены струнные поправки. Так происходит, например, когда калибровочная теория рассматривается в планарном пределе $N \to \infty$ [70], что отвечает фейнмановским диаграммам сферической топологии или сферическому (древесному) пределу дуальной теории замкнутых струн.

Таким образом, существующие примеры дуальности между калибровочной теорией и теорией гравитации предполагаются верными по крайней мере в режиме $N \gg 1$ и $g_{\mathrm{YM}}^2 N > 1$. Первое требование — хорошо известный предел больших N [70] — означает, что в калибровочной теории выживают лишь планарные диаграммы или что петлевые поправки *замкнутых* струн подавлены. В отличие от этого достаточно прозрачного предела больших N (который буквально означает $N \to \infty$ для правильно нормированных величин) второе условие на константу связи совершенно нетривиально. Оно заключается в том, что для сравнения с граничным действием объемной теории гравитации сначала следует просуммировать вклады всех петель в калибровочной теории или теории открытых струн. Тем самым теория гравитации дает предсказание для *непертурбативных* ответов в калибровочной теории, которые, вообще говоря, неаналитичны по константе связи. Следует особо отметить этот факт во избежание путаницы между нетривиальной струнной дуальностью, связывающей классическую теорию в балке с квантовой теорией на границе в режиме сильной связи, и достаточно банальным "продолжением" (свободных) функций Грина с границы, хорошо определенным для конформных теорий на границе и для метрики отрицательной постоянной кривизны в балке.

5.4. АдС/КТП-соответствие

Наиболее изученным примером дуальности между калибровочными теориями и гравитацией является так называемое АдС/КТП-соответствие — соответствие между гравитацией в пространстве анти-де-Ситтера и конформной теорией поля, точнее, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга – Миллса, которая является четырехмерной (не путать с двумерной!) конформной теорией поля с бета-функцией (2.4), (2.5), равной нулю (по крайней мере в теории возмущений). Такая калибровочная теория может быть представлена непосредственно картинкой на рис. 9, т.е. для калибровочной теории с группой $\mathrm{SU}(N)$ — "пачкой" из N (полностью совпадающих!) D3-бран, а дуальная гравитационная метрика построена как решение *супер*гравитации с соответствующими источниками. Это решение хорошо известно (см., например, [123]), его метрика имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = U^{-1/2}(\mathrm{d}x_\mu)^2 + U^{1/2}(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2)\,. \tag{5.3}$$

Источником нетривиальной метрики является рамон-рамоновская 4-форма

$$C_{\mu\nu\lambda\rho} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(\frac{1}{U} - 1\right), \tag{5.4}$$

по которой заряжены D3-браны.

В формулах (5.3) и (5.4) функция U зависит только от расстояния r до "пачки" бран:

$$U(r) = 1 + \frac{g^2 N \alpha'^2}{r^4}, \tag{5.5}$$

где N — число D-бран, а g — константа связи $\mathcal{N} = 4$ калибровочной теории. Метрика (5.3) представляет собой метрику многообразия, составленного из пятимерной сферы (второй член в правой части (5.3)) и некоторой пятимерной теории типа (5.1), где роль выделенной координаты y играет расстояние r до D-бран. Так как

$$U(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{g^2 N \alpha'^2}{r^4}, \tag{5.6}$$

в окрестности горизонта $r \to 0$ первый член в правой части (5.3) превращается в метрику анти-де-Ситтера:

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha' \sqrt{g^2 N}\left(\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r^2 + a(r)\,\mathrm{d}x_\mu^2 + \mathrm{d}\Omega^2\right), \tag{5.7}$$

$$a(r) = \frac{\alpha'}{g^2 N}\left(\frac{r}{\alpha'}\right)^2. \tag{5.8}$$

Из (5.7) следует, что квадрат радиуса пятимерной сферы $R^2_{\text{sphere}} = \alpha' \sqrt{g^2 N}$ равен так называемой постоянной 'т Хофта в единицах α'. Как уже отмечалось, струнные поправки подавлены при $N \to \infty$. Кроме того, метрика (5.7) хорошо приближает точное решение при большой постоянной 'т Хофта, т.е. когда $g^2 N \gg 1$.

Данный пример — по сути дела единственный *явный* пример соответствия между калибровочной теорией и гравитацией, позволяющий, в частности, исследовать корреляционные функции и аномальные размерности составных операторов [124]. К сожалению, этот пример очень трудно "сдеформировать" в более содержательные физические теории, т.е. вся конструкция является чрезвычайно жесткой. Некоторые попытки построения дуального гравитационного описания калибровочных теорий с меньшей суперсимметрией были предприняты в [128], хотя и без особого успеха.

С более общей точки зрения, в рамках теории струн АдС/КТП-соответствие можно разделить на две разные части:

$$\ln \int \mathrm{D}A_\mu \exp\left(-S_{\mathrm{YM}}[A_\mu, \phi_0] + \sum \int \mathrm{d}^4 x\, \phi_i O_i^{\mathrm{YM}}(F_{\mu\nu})\right) =$$
$$= \sum \int \mathrm{D}\varphi\, \mathrm{D}X \exp\left[-\int_\Sigma \left(G_{MN}\, \partial X^M\, \bar{\partial} X^N + R^{(2)}\, \Phi(X) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum \phi_i(X)\, V_i(X)\right)\right] = \int \mathrm{d}x \sqrt{G}\, \exp(-2\Phi) \times$$
$$\times \left(R(G) + V(\phi_i) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_i)^2 + \ldots\right), \tag{5.9}$$

отвечающие двум знакам равенства в этой формуле.

Формула (5.9) написана достаточно "условно" и нуждается в следующих пояснениях.

- В первой части равенства (5.9) представлен логарифм производящей функции (на самом деле, конечно, суперсимметричной, что для краткости опущено) *матричной* теории полей Янга – Миллса, которая разложением по петлям и $(1/N)$-разложением 'т Хофта воспроизводит пертурбативное разложение в теории струн соответственно по "дыркам" (или петлям открытых струн) и "ручкам" (или петлям замкнутых струн; см. рис. 8). К действию суперсимметричной теории Янга – Миллса добавлена линейная комбинация калибровочно-инвариантных операторов $O_i^{\mathrm{YM}}(F_{\mu\nu})$ [124], зависящих от (ковариантных производных) напряженностей калибровочных полей с внешними источниками $\phi_i(x)$.
- Вторая часть равенства (5.9) буквально представляет собой производящий функционал в теории струн. Как и должно быть в первично-квантованной теории, перед интегралом стоит сумма по топологиям мировых листов и числу "дырок", полностью аналогичная теории Янга – Миллса. Интеграл берется по всем отображениям $X^M = (X^\mu, \varphi)$ двумерного мирового листа Σ в пространство-время. По постановке задачи суммирование производится только по таким мировым листам, у которых "дырки приклеены" к границе в пространстве-времени, т.е. на переменную φ наложены граничные условия Дирихле. Калибровочно-инвариантные операторы, отвечающие константам ϕ_i, теперь представлены фоновыми полями $\phi_i(X)$ в теории *замкнутых* струн, взаимодействующими со струной по всей мировой поверхности.
- Требование конформной инвариантности (см. раздел 3.4) эквивалентно тому, что внешние фоновые поля $\phi_i(X)$ (включая специально выделенные для ясности метрику $G_{MN}(X)$ и дилатон $\Phi(X)$) удовлетворяют уравнениям движения, или (как говорят, в теории поля) находятся на массовой поверхности. На самом деле это чрезвычайно важно, так как уравнения движения должны быть дополнены граничными условиями, которые в (5.9) явно *не* заданы. Это означает, что о них следует вспомнить и явно добавить ко второй части равенства (5.9). При этом граничные условия на внешние поля наложены при $\varphi\big|_0 = y = y_*$, а значения констант связи в производящем функционале теории калибровочных полей, грубо говоря, совпадают с граничными значениями[31] $\phi_i(x) \propto \phi_i(X\big|_0, \varphi\big|_0 = y_*)$.
- Равенство между второй и третьей частями формулы (5.9) нуждается в более подробных пояснениях. В третьей части написано эффективное действие Фрадкина – Цейтлина (см. раздел 3.6, в частности формулу (3.26)). Буквально оно выглядит, как локальное эффективное действие в квантовой теории поля. Однако если вспомнить, что вторая часть равенства (а значит, и третья!) определена *только* на массовой поверхности, то сразу становится ясной условность этой локальной записи. На

[31] Мы пока обсуждаем соответствие на достаточно "грубом" уровне, оставляя "за кадром" более тонкие вопросы, например о соответствии базисов калибровочно-инвариантных операторов в теории Янга – Миллса и соответствующих вершинных операторов в теории струн. Вопрос совершенно нетривиален, так как не существует способа согласовать эти базисы *a priori* в первой и во второй частях равенства (5.9), что видно уже на простейшем примере АдС/КТП-соответствия — матричной модели (4.32) и дуальной ей *двумерной* гравитации.

самом деле в третьей части равенства (5.9) стоит *нелокальное* выражение, которое возникает, если подставить в действие решения уравнений движения как функционалы граничных значений полей! Таким образом, несмотря на то что формула (5.9), казалось бы, сводит квантовую задачу о вычислении производящей функции (с учетом всех петель) к некоторой классической задаче, классическая задача (об отыскании вида эффективного действия как функционала граничных условий) отнюдь не является в действительности простой. Исключение составляет случай поля дилатона с нулевым потенциалом, для которого было проведено сравнение между калибровочной теорией и гравитацией в [124].

5.5. Жизнь на бране

Интерпретация масштаба как некоторой вспомогательной координаты *пространства-времени* позволяет практически одинаково рассматривать и проблемы конфайнмента в теории элементарных частиц, и проблемы теории гравитации или космологии. Так, аналогично предыдущим разделам в теории гравитации уже на уровне простейшего *классического* рассмотрения можно продемонстрировать, что:

- легко добиться равенства нулю *эффективной* космологической постоянной четырехмерной теории материи;
- столь же легко получить безмассовый четырехмерный гравитон, не распространяющийся в балке в линейном приближении.

Эти простые следствия возникают без дополнительной информации из решений классических уравнений движения гравитации в балке с определенными граничными условиями, индуцированными источниками на бранах.

Наиболее общий вид соответствующего классического действия в данном подходе включает всего два слагаемых (остальные вклады в эффективное действие обозначены многоточием):

$$\int \mathrm{d}^5x\,\sqrt{G_5}\left(\frac{R_5}{2\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}}+\Lambda_5\right)+\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{G_4}\,\Lambda_4+\ldots\,, \qquad (5.10)$$

где согласно принятой концепции рассматривается лишь нетривиальная пятимерная часть D-мерного пространства-времени. Два слагаемых в (5.10) отвечают объемному пятимерному вкладу (с метрикой $G_{MN}^{(5)}\equiv G_{MN}$, кривизной $R_5=R_5(G)$ и пятимерной ньютоновской константой $\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}$) и граничному четырехмерному вкладу (в котором G_4 обозначает детерминант метрики на поверхности браны, индуцированной пятимерной метрикой с детерминантом $G_5\equiv G$). Опущенные в (5.10) члены, вообще говоря, нелокальны или содержат высшие производные; безусловно, их необходимо учитывать в точной струнной формулировке проблемы.

Замечательно, что написанное в простейшем приближении действие (5.10) не зависит от каких бы то ни было деталей модели. Проще всего выбрать второе слагаемое в (5.10) в виде дельта-функции по выделенному пятому направлению $x_5=y$, а "потенциалы" Λ_5 и Λ_4 считать постоянными, имеющими смысл соответственно пятимерной космологической постоянной и четырехмерной *затравочной* космологической постоянной, или натяжения соответствующей браны. Тем не менее ничто не запрещает заменить их на нетривиальные функции координат, имеющие смысл значений потенциалов (скалярных) полей материи, что геометрически соответствует переходу к нескольким тонким бранам или к одной толстой бране. При этом анализ практически не отличается от простейшего случая [129], в котором второе слагаемое в (5.10) отвечает "сидящей" в $y=0$ единственной тонкой бране или, что то же самое, тому, что вклад всех остальных источников "закодирован" в ненулевой космологической постоянной $\Lambda_5=\mathrm{const}<0$, приводящей немедленно к анти-де-ситтеровской AdS_5-геометрии вдали от браны.

Подходящие решения уравнений движения

$$\frac{1}{\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}}\left(R_{MN}^{(5)}-\frac{1}{2}\,G_{MN}R_5\right)=\frac{1}{2}\,\Lambda_5G_{MN}+T_{MN}^{(4)}\,, \qquad (5.11)$$

следующих из (5.10), можно достаточно легко найти, используя симметрии задачи. (В данном разделе прописные индексы пробегают значения $M,N=1,\ldots,5$, а строчные индексы — $\mu,\nu=1,\ldots,4$.) Так как $T_{MN}^{(4)}\propto\propto\delta(y)t_{\mu\nu}^{(4)}(x)\,\delta_M^{\mu}\delta_N^{\nu}$, сначала элементарно решаются уравнения (5.11) при $y\neq 0$, для которых естественно искать решение в виде (5.1). Подстановка метрики (5.1) в (5.11) дает

$$a''(y)+\frac{\Lambda_5\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}}{3}\,a(y)=0\,,\qquad y\neq 0\,, \qquad (5.12)$$

с решением

$$\begin{aligned}&a(y)=A\exp(ky)+B\exp(-ky)\,,\\&\Lambda_5\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}=-3k^2<0\end{aligned} \qquad (5.13)$$

(космологическая постоянная пятимерного пространства отрицательна). Естественным образом решение (5.13) можно ограничить на $A=0$ при $y>0$ и на $B=0$ при $y<0$, тогда анти-де-ситтеровский горизонт расположен при $|y|\to\infty$.

"Сшивая" две экспоненты с различными знаками на поверхности браны при $y=0$, мы получаем $a(y)=\exp(-k|y|)$, что дает дополнительный вклад в уравнение (5.11) при $y=0$, пропорциональный дельта-функции $\delta(y)$. При "настройке" параметров $\Lambda_4\gamma_{\mathrm{N}}^{(5)}=3k$ этот вклад в точности компенсируется вкладом вариации второго члена из действия (5.10), в результате уравнения (5.11) будут верны и при $y=0$. Тем самым окончательно найденное решение имеет вид

$$\mathrm{d}s^2=\exp(-k|y|)\,(\mathrm{d}x_\mu)^2+\mathrm{d}y^2\,, \qquad (5.14)$$

так что *эффективная* космологическая постоянная в четырехмерной теории становится равной нулю:

$$\Lambda_4^{\mathrm{eff}}=\Lambda_4+\int \mathrm{d}y\,\sqrt{G_5}\,\Lambda_5=\Lambda_4+\frac{\Lambda_5}{k}=0\,. \qquad (5.15)$$

Таким образом, в данном сценарии "наблюдаемая" космологическая постоянная Λ_4^{eff} зануляется классически, независимо от каких бы то ни было деталей устройства конкретных моделей данного класса.

Одно из немедленных важных следствий заключается в том, что граничные условия (в данном случае условия "склейки" на бране) уничтожают ровно половину мод, существующих в балке. В более общей ситуации граничное условие может иметь другой вид, но самое существенное останется неизменным: в формуле (5.13) коэффициент B можно найти как функцию A или наоборот.

Следующим естественным вопросом является спектр малых флуктуаций "линеаризованного" действия (5.10) в окрестности классического решения (5.14). Легко видеть, что для возмущения

$$g_{\mu\nu} = a(y)\,\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x,y) = a(y)\,\eta_{\mu\nu} + \psi^{(p)}_{\mu\nu}(y)\exp(\mathrm{i}px)$$

возникает уравнение

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + p_\mu^2 \exp(k|y|) - 2k\delta(y) + k^2\right)\psi^{(p)}(y) = 0\,, \qquad (5.16)$$

похожее на уравнение Шрёдингера с ямой в виде дельта-функции и коэффициентом $-2k$. Из квантовой механики хорошо известно, что в этом случае всегда существует *единственный* уровень, локализованный в яме (в данном случае при $y=0$) с энергией $E=-k^2$. Для уравнения (5.16) это немедленно приводит к $p_\mu^2=0$ или четырехмерному *безмассовому* гравитону, экспоненциальная волновая функция $\psi^{(p^2=0)} \propto \exp(-k|y|)$ которого запрещает распространяться в дополнительное пятое направление (в балк).

На самом деле это чрезвычайно общее явление: для *любой* метрики в форме (5.1) при $a(y) = \exp\big(-\alpha(y)\big)$ с подходящим поведением

$$a(y) \underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

существует решение уравнений (5.11) с *непостоянным*, вообще говоря, "потенциалом" в балке $\Lambda_5(y)$ и натяжением толстой браны $\Lambda_4(y)$, которые удовлетворяют условиям[32]

$$\begin{aligned}
&\Lambda_5(y) = -3\alpha'(y)^2\,, \qquad \Lambda_4(y) = \frac{3}{2}\,\alpha''(y)\,,\\
&\Lambda_5(y) + \Lambda_4(y) = 3\left(-\alpha'(y)^2 + \frac{\alpha''(y)}{2}\right),\\
&\int \mathrm{d}y\,(\Lambda_5 + \Lambda_4)\exp\big(-2\alpha(y)\big) = \qquad (5.17)\\
&\quad = \frac{3}{2}\int \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\alpha'\exp\big(-2\alpha(y)\big)\right] =\\
&\quad = -\frac{3}{4}\int \mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\exp\big(-2\alpha(y)\big) = 0\,.
\end{aligned}$$

Безусловно, представленное "гравитационное" описание отвечает практически на все простые вопросы, но при этом не может претендовать на полноту[33]. Массивные моды $\psi(y)$ легко записать в терминах цилиндрических функций Бесселя, и их вклад в поправки к закону Ньютона имеет ту же форму, что и *любые* однопетлевые вклады в пропагатор гравитона

$$\big\langle h_{\mu\nu}(x)\,h_{\alpha\beta}(0)\big\rangle \sim \int \mathrm{d}^4q\,\exp(\mathrm{i}qx)\,q^4 \ln\frac{q^2}{\mu^2}\,,$$

приводящие к $(1/r^3)$-вкладам в потенциал четырехмерной гравитации.

Возвратимся, наконец, к тому, что гравитация является не чем иным, как эффективной теорией для струн, и посмотрим на приведенные в настоящем разделе формулы с этой точки зрения. Производящий функционал теории струн во внешнем фоне (5.1), (5.2) имеет вид

$$\int \mathrm{D}\varphi\,\mathrm{D}X\,\exp\left(-\int_\Sigma a(\varphi)\,\partial X_\mu\,\bar\partial X_\mu + \partial\varphi\,\bar\partial\varphi + \right.$$
$$\left. + \mathcal{R}^{(2)}\Phi(\varphi) + \ldots\right), \qquad (5.18)$$

так что "нулевые моды", или постоянные компоненты полей X_μ $(\mu = 1,\ldots,4)$ на мировом листе струны $X_\mu(\sigma,\tau)\big|_0 = x_\mu$, являются четырехмерными координатами из формулы (5.1), а нулевая мода лиувиллевского поля $\varphi(\sigma,\tau)\big|_0 = y$ играет роль выделенной пятой координаты.

Действие (5.18) должно быть самосогласованно в "струнном" смысле, в частности, если проинтегрировать его по координатам X_μ, поправка к действию

$$\int \mathrm{D}X\,\exp\left(-\int_\Sigma a(\varphi)\,\partial X_\mu\,\bar\partial X_\mu\right) = \det\big(\bar\partial a(\varphi)\,\partial\big)^{-D/2} =$$
$$= \exp\left(-\int_\Sigma \partial\alpha\,\bar\partial\alpha + \mathcal{R}^{(2)}\alpha + \ldots\right) \qquad (5.19)$$

не должна нарушать конформной инвариантности (независимости макроскопической теории от выбора координат на мировом листе). В формуле (5.19), которая является частным случаем общей формулы для аномалии из [93], функция $\alpha = \alpha(\varphi) = \ln a(\varphi)$, а аномальные члены, зависящие только от метрики на мировом листе, обозначены многоточием.

Таким образом, отождествляя поле Лиувилля или дилатон с пятой координатой, мы видим, что интегрирование в (5.19) приводит к репараметризации в дополнительном измерении $\varphi \to \varphi + \alpha(\varphi)$, а также к переопределению $\Phi(\varphi) \to \Phi(\varphi) + \alpha(\varphi)$. Специальный фон (5.14) выделен тем, что в нем струнное действие перенормируется тривиально. В частности, это может означать, что фон (5.14) *стабилен* относительно струнных поправок. Интегрирование в теории струн по координатам X_μ эффективно эквивалентно изучению нетривиальной зависимости только от пятой координаты для теории в балке, если рассматривать четырехмерные браны как некоторые эффективные граничные условия. Это в точности отвечает процедуре, проделанной выше в классическом гравитационном приближении. Более того, решение $\alpha = \alpha(\varphi) = \ln a(\varphi)$ является единственным, наивно согласованным с конформной инвариантностью в теории на мировом листе.

6. Некоторые новые направления в теории струн

В заключение данного обзора скажем несколько слов о направлениях, развивавшихся в теории струн в течение

[32] Заметим, что выражение $\mathcal{T}(y) = \Lambda_5(y) + \Lambda_4(y)$ имеет в точности вид "миуровского" тензора энергии-импульса, часто возникающего в двумерной конформной теории поля, например при бозонизации, а также в ***теории Лиувилля***. Подобные "вирасоровские" свойства конформного фактора метрики пространства-времени могут служить основанием для существования ***условий Вирасоро*** (4.35), которые неоднократно возникали при описании эффективных действий теории струн в терминах интегрируемых систем.

[33] Например, в рамках классической теории гравитации нельзя ответить на вопрос, почему зануление космологической постоянной не нарушается квантовыми эффектами. Это все, безусловно, лишь еще одно проявление основной концепции данного обзора: единственный способ "квантования" гравитации — считать ее низкоэнергетическим пределом теории замкнутых струн.

буквально нескольких последних лет. Мы остановимся лишь на некоторых из них и сразу заметим, что понимание большинства вопросов, затронутых в настоящем разделе, пока оставляет желать лучшего.

6.1. М(атричная) теория

М(атричная) теория [120] представляет собой одну из небезынтересных (хотя и не вполне успешных, с точки зрения автора) попыток создать альтернативный струнам формализм в ***М-теории***. Результативно в качестве такого формализма предлагается некоторая весьма специальная *матричная* квантовая механика (откуда и происходит название), а выделенность первой буквы — прозрачный намек на ее отождествление с символом "М" в М-теории (в том смысле, что остальные буквы можно не писать).

В качестве "строительных блоков" в матричной теории используются $(N \times N)$-матрицы X_i $(i = 1, \ldots, 9)$, диагональные элементы которых можно интерпретировать как поперечные координаты D0-бран (их число равно N) в одиннадцатимерной компактифицированной М-теории в координатах светового конуса. Лагранжиан такой теории можно записать в виде

$$\int \mathrm{d}t \, \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{2R} \dot{X}_i^2 + M_{\mathrm{Pl}}^6 R \sum_{i<j} [X_i, X_j]^2 + \ldots \right), \tag{6.1}$$

где многоточие отвечает пропущенным фермионным членам. В формуле (6.1) явно присутствует одиннадцатимерная масса Планка M_{Pl} (ср. с (4.1) и (4.2)), а также радиус компактного измерения R, который в формализме матричной теории несколько искусственно соответствует координате светового конуса X_-. Таким образом, девять поперечных координат и две координаты светового конуса (время и компактифицированная координата X_-, отвечающая следу по матрицам в (6.1)) вместе составляют одиннадцатимерное пространство М-теории.

Квантовомеханическому действию (6.1) весьма условно можно придать следующий смысл. Если $N = 1$, то формуле (6.1) соответствует гамильтониан $H \sim P^2$ и основное состояние вырождено по всем дополнительным (отсутствующим в (6.1)) грассмановым переменным θ_α. Простой пересчет этих состояний показывает (см., например, [28]), что их всего $2^8 = 256$, при этом половина из них бозонных $(9(9+1)/2 - 1 = 44$ гравитона и 84 состояния, отвечающие антисимметричному тензорному полю), а половина фермионных.

Таким образом, "вакуум" м(атричной) теории отвечает "супергравитону" или, точнее, супермультиплету гравитона одиннадцатимерной гравитации [74], бозонными полями которой являются метрика и антисимметричная 3-форма. Утверждается также, что нетривиальные решения уравнений движения в м(атричной) теории можно отождествить с мембраной, 5-браной и т.п. Например, в "квазиклассическом" пределе $N \to \infty$ действие (6.1) можно переписать, заменив коммутатор скобкой Пуассона по вспомогательным переменным (σ_1, σ_2):

$$\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^2\sigma \left(\frac{1}{2R} \dot{X}(\sigma_1, \sigma_2)_i^2 + \right.$$
$$\left. + M_{\mathrm{Pl}}^6 R \sum_{i<j} \{X(\sigma_1, \sigma_2)_i, X(\sigma_1, \sigma_2)_j\}_{PB}^2 + \ldots \right), \tag{6.2}$$

и отождествить с действием мембраны в калибровке светового конуса.

Надежды, связанные с альтернативным матричным формализмом в теории струн, не оправдались (в том смысле, что этот формализм отнюдь не оказался эффективным для решения существенных вопросов). Тем не менее относительным успехом является уже тот факт, что хотя бы какие-то свойства теории струн и одиннадцатимерной М-теории могут быть извлечены из совершенно абсурдной, на первый взгляд, концепции. В заключение данного раздела скажем, что некоторые вопросы формализма, связанного с м(атричной) теорией, обсуждались в недавнем обзоре в *УФН* [12].

6.2. Некоммутативные теории поля

Некоммутативные координаты. Тот факт, что с точки зрения эффективной калибровочной теории поля координаты "пачки" D-бран являются собственными значениями матрицы скалярного поля в присоединенном представлении, иногда пытаются интерпретировать как появление *некоммутативных координат*. В формализме первичного квантования на это можно смотреть, как на достаточно простое и формальное представление для эффективного описания непертурбативной теории в терминах D0-бран, D-струн и т.п., привлекая соответствующую матричную квантовую механику или двумерную неабелеву калибровочную теорию.

Ненулевое фоновое *B*-поле. Другой вариант некоммутативности возникает, если рассматривать теорию струн в нетривиальном фоновом B-поле (3.4):

$$B_{\mu\nu} = B\epsilon_{\mu\nu}, \qquad B = \mathrm{const}. \tag{6.3}$$

В этом случае легче всего понять, что происходит, используя аналогию с хорошо известным случаем заряженной частицы в постоянном магнитном поле.

Действительно, взаимодействие, скажем, с постоянным B-полем (6.3), которое осуществляется по всей поверхности мирового листа:

$$\int_\Sigma B_{\mu\nu} \, \mathrm{d}X^\mu \wedge \mathrm{d}X^\nu = \int_{\partial\Sigma} B_{\mu\nu} X^\mu \, \mathrm{d}X^\nu, \tag{6.4}$$

по формуле Стокса можно переписать в виде граничного члена, эквивалентного взаимодействию струны с вектор-потенциалом $A_\mu(X) = B_{\mu\nu} X^\nu$, отвечающим постоянному магнитному полю. Если поле B достаточно велико, то это приводит к доминирующему вкладу члена (6.4) в двумерный коррелятор полей $X(t) = X\big|_{\partial\Sigma}$:

$$\langle X_\mu(t) \, X_\nu(t') \rangle \propto \epsilon_{\mu\nu} \, \mathrm{sign}\,(t - t'), \tag{6.5}$$

что в полевом пределе соответствует некоммутирующим координатам

$$[X_\mu, X_\nu] = \zeta \epsilon_{\mu\nu}, \qquad \zeta \sim \frac{1}{B}. \tag{6.6}$$

Это рассуждение на самом деле является достаточно грубой иллюстрацией известного эффекта, когда некоммутативными переменными становятся координаты центров окружностей, по которым вращаются частицы в магнитном поле.

Соответствующую эффективную теорию поля можно описать лагранжианом, в котором все произведения

заменены на так называемые мояловские произведения

$$f(x) * g(x) = \exp\left(\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\nu}\right) f(x)\, g(y)\Big|_{x=y} = \\ = f(x)\, g(y) + \{f(x), g(x)\} + \mathcal{O}(\partial^2)\,. \qquad (6.7)$$

Здесь f и g — любые функции (локальные функционалы) "обычных" полей $\phi(x)$, а

$$\{f(x), g(x)\} = \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial g}{\partial x_\nu} \qquad (6.8)$$

— скобка Пуассона, отвечающая "классическому" пределу коммутатора (6.6). Лагранжианы, в которых поля умножаются по правилу (6.7), содержат, очевидно, бесконечное число производных[34].

В качестве некоммутативных теорий поля обычно рассматриваются теории скалярного поля

$$S = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi * \partial_\mu \phi + V(\phi)\right) = \\ = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\mu \phi + V(\phi)\right) \qquad (6.9)$$

(где умножение со знаком "$*$" в (6.7) существенно лишь в членах взаимодействия) и калибровочные теории

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu\,, \\ S = \frac{1}{g^2} \int \mathrm{d}x\, F_{\mu\nu} * F_{\mu\nu}\,, \qquad (6.10)$$

которые являются естественным обобщением матричных теорий Янга – Миллса. Отметим, что в отличие от коммутативного случая абелев вариант (6.10) является нетривиальной теорией со взаимодействием и что практически без изменений (если считать $A_\mu(x)$ матричнозначными функциями от некоммутирующих переменных и добавить к интегралу след по матричным индексам) формула (6.10) определяет некоммутативные теории Янга – Миллса.

Наиболее интересными на сегодняшний день приложениями некоммутативных теорий поля являются их классические решения.

Солитоны и инстантоны в некоммутативных теориях. В отличие от обычных скалярных теорий поля, в которых существование локализованных классических решений практически во всех размерностях (начиная с $D \geqslant 2$) запрещено скейлинговыми аргументами, такие решения могут возникать в некоммутативных теориях, где скейлинг менее тривиален из-за дополнительного размерного параметра (ζ в формуле (6.6)) [130]. Простейшим является двумерный случай. Сделав масштабное преобразование координат $X \to \sqrt{\zeta} X$ в действии (6.9), для двумерного (или статического трехмерного) случая получим

$$E = \int \mathrm{d}^2 x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \zeta V(\phi)\right). \qquad (6.11)$$

В случае $\zeta \to \infty$ решение (и его энергия) определяется только потенциальным членом, так что уравнение стационарности, например, для потенциала

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\, \phi^2 + \frac{\lambda}{3}\, \phi^3$$

сводится к уравнению

$$m^2 \phi + \lambda \phi * \phi = 0\,. \qquad (6.12)$$

При обычном умножении решением уравнения (6.12) были бы "отображения в точки" $\phi(x) = 0$ и $\phi(x) = -m^2/\lambda$, однако некоммутативность "размывает" эти точки в пространстве полей. Действительно, формально решением (6.12) является

$$\phi = -\frac{m^2}{\lambda}\, \hat{P}\,,$$

где $\hat{P}$ — проектор, т.е., вообще говоря, не число, а оператор, для которого выполняется условие $\hat{P}^2 = \hat{P}$. В двумерном некоммутативном пространстве (изоморфном фазовому пространству квантовой механики с одной степенью свободы) проекторы элементарно строятся с помощью операторов, скажем, в пространстве Фока, например $\hat{P}_n \sim |n\rangle\langle n|$, где $|n\rangle$ — состояние n-го уровня энергии гармонического осциллятора. Соответственно, можно выписать их представления в (некоммутативном) x-пространстве; простейшим решением будет "колокол"

$$\phi_0(x) = -\frac{2m^2}{\lambda} \exp\left(-(x_1^2 + x_2^2)\right).$$

В калибровочных некоммутативных теориях поля особый интерес представляют инстантонные решения [125]. В отличие от коммутативной теории нетривиальные решения уравнений самодуальности существуют уже в случае (некоммутативной) калибровочной группы U(1). С физической точки зрения они интересны прежде всего тем, что в них исчезает сингулярность нулевого размера $1/x^4$ (например, при $\rho = 0$ в выражении для напряженности в (2.12)), параметр некоммутативности превращает неинтегрируемую в четырехмерии сингулярность $1/x^4$ в интегрируемую сингулярность $1/\big(x^2(x^2+\zeta)\big)$. Конструкция самих инстантонных решений переносится практически без изменений с коммутативного случая заменой (где только возможно) обычного умножения на мояловское умножение (6.7).

Подробное освещение различных аспектов некоммутативных теорий поля можно найти, например, в обзоре [48].

6.3. Тахионный потенциал

Одной из основных проблем многих известных струнных моделей является наличие в них тахионов, или возбуждений с отрицательным квадратом массы. Тахионы приводят, в частности, к инфракрасным расходимостям в струнных амплитудах, а поскольку инфракрасные и ультрафиолетовые области отождествляются в двумерной геометрии, эта проблема "экранирует" ультрафиолетовую конечность теории струн.

Смысл появления отрицательных масс абсолютно ясен в теории поля (в частности, в эффективной теории поля для струнных моделей с тахионами) и заключается в

[34] Несмотря на это, их ультрафиолетовые свойства не лучше, чем свойства обычных (т.е. коммутативных) квантовых теорий поля.

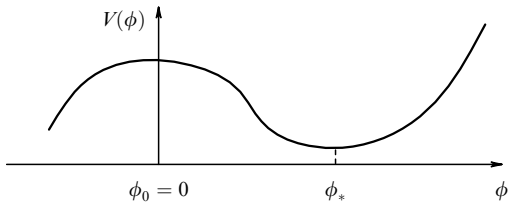

Рис. 18. Эффективный потенциал с минимумом $\phi = \phi_*$ и экстремумом в точке $\phi = \phi_0 = 0$. Точка $\phi_0 = 0$ является точкой экстремума потенциала $V'(\phi_0) = 0$, но вторая производная отрицательна ($V''(\phi_0) < 0$), что отвечает наличию тахиона в теории возмущений в окрестности этой точки.

нестабильности соответствующего вакуума. Действительно, нарисовав эффективный потенциал и потребовав $m^2 = V''(\phi_0) < 0$, мы сразу видим (рис. 18), что точка (в пространстве полей) $\phi = \phi_0$ является локальным экстремумом, но не минимумом; поэтому при любом возмущении теория, вообще говоря, должна "скатываться" в настоящий вакуум $\phi = \phi_*$.

К сожалению, в теории струн на сегодняшний день не существует последовательного вторично-квантованного формализма или струнной теории поля[35] в том виде, в котором вторично-квантованный подход имеется в квантовой теории поля. Скажем, любой квантовополевой лагранжиан с потенциалом, изображенным на рис. 18, позволяет сразу увидеть как стабильные ($\phi = \phi_*$), так и нестабильные ($\phi = \phi_0$) вакуумы. Этот эффект невозможно буквально проследить в теории струн, так как не существует (пока?) формализма, позволяющего одновременно охватывать точки $\phi = \phi_0$ и $\phi = \phi_*$.

В теории бозонных струн существующий формализм предназначен для вычисления амплитуд в окрестности вакуума типа $\phi = \phi_0$, вообще говоря, с двумя тахионами: из открытого и замкнутого секторов. А. Сен [126] предложил красивую D-бранную интерпретацию, позволяющую частично разобраться с тахионом открытого сектора. Теорию открытой струны можно интерпретировать как D25-брану (D-брану размерности $p = 25$), мировой объем которой заполняет все двадцатишестимерное пространство-время в модели бозонной струны, или как D9-брану в теории десятимерной суперструны. Стандартный способ избавиться от тахиона в десятимерной суперструне — ГСО-проекция [54], которая обсуждалась в разделе 3.5 и отвечает рис. 9 с параллельными БПС-D-бранами. С некоторой точки зрения это можно считать определением того, что изображено на рис. 9.

В работе [126] тахион интерпретировался как низшее состояние струны, натянутой между D- и анти-D-бранами, с конфигурацией, отвечающей "другому знаку" ГСО-проекции. Оговорим сразу, что речь идет только о "недиагональном" или "неабелевом" тахионе открытого спектра, так как он отвечает струне, натянутой между разными бранами. В отличие от невзаимодействующих параллельных БПС-D-бран такая ситуация нестабильна: D- и анти-D-браны стремятся "схлопнуться" и аннигилировать. При этом из закона сохранения энергии следует, что (см. рис. 18)

$$V(\phi_0) - V(\phi_*) = 2T_{\mathrm{D}}\,, \tag{6.13}$$

где T_{D} — натяжение D-браны или анти-D-браны.

Более того, поскольку между D- и анти-D-бранами можно натянуть две разные струны, отличающиеся ориентацией, соответствующее тахионное поле можно считать комплексным, и потенциал на рис. 18 следует "комплексифицировать" вращением вокруг вертикальной оси, сделав из него хорошо известное при изучении спонтанного нарушения симметрии в Стандартной модели "донышко бутылки". Эффективная теория такого потенциала обладает также решениями типа "кинка", зависящими от некоторой координаты x в пространстве-времени:

$$\phi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} |\phi_*| \exp(\mathrm{i}\theta_1)\,, \qquad \phi(x) \underset{x\to-\infty}{\to} |\phi_*| \exp(\mathrm{i}\theta_2)\,,$$

так что $\theta_1 \neq \theta_2$.

Таким образом, если тахион отвечал паре Dp- и анти-Dp-бран, возникающий кинк чрезвычайно напоминает протяженный объект на единицу меньшей размерности, т.е. D$(p-1)$-брану. В свою очередь, полученный кинк нестабилен; кроме того, существует "антикинк" — аналогичное решение, "бегущее" вдоль координаты x в противоположном направлении. Естественно интерпретировать антикинк как анти-D$(p-1)$-брану и продолжить процедуру по индукции. Качественное рассмотрение приводит к мысли, что, "скатываясь" по тахионному потенциалу (из точки $\phi_0 = 0$ в точку $\phi = \phi_*$ на рис. 18), начиная с пары Dp- и анти-Dp-бран, где $p = D - 1$ — размерность нашего пространства (без времени), мы пройдем локальные экстремумы, отвечающие бранам меньшей размерности, и в конце концов окажемся в "настоящем" вакууме $\phi = \phi_*$, в котором вообще отсутствуют возбуждения типа открытых струн.

К сожалению, приведенные рассуждения не позволяют вычислить точный тахионный потенциал даже для ограниченного класса тахионных возбуждений. Единственный способ вычисления подобных величин — метод эффективного действия, который обсуждался в разделе 3.6. В буквальном смысле этот метод применим лишь в окрестности "ложного вакуума" $\phi_0 = 0$ тахионного потенциала, где соответствующая двумерная конформная теория является теорией свободных полей. Однако не прекращаются попытки "экстраполяции" результатов таких вычислений в область "настоящего вакуума" $\phi = \phi_*$ (см., например, [131]). Более того, существуют утверждения, что таким способом тахионный потенциал в древесном приближении вычисляется *точно* [132] и выражается достаточно простой формулой:

$$V(\tilde{\phi}) = -\frac{1}{2}\,\tilde{\phi}^{\,2} \ln \tilde{\phi}\,, \tag{6.14}$$

[35] Проблемы возможного создания струнной теории поля выходят за рамки данного обзора. Заметим только, что по данному вопросу существует обширная литература, едва ли не сравнимая по объему с литературой по всем остальным проблемам теории струн вместе взятым. С точки зрения автора, однако, сама возможность создания струнной теории поля как теории, позволяющей видеть *все* (а не единственный!) струнные вакуумы, затруднена хотя бы отсутствием подходящих "универсальных" переменных, так как первично-квантованная теория струн описывается в терминах *разных* переменных (двумерных конформных теорий поля) в окрестности разных вакуумов. Другая проблема заключается в том, что по крайней мере в теории замкнутых струн счет состояний в петлях различается для диаграмм с разным числом петель (или римановых поверхностей различного рода), поэтому в отличие от квантовой теории поля чрезвычайно сложно (или невозможно?!) написать вторично-квантованный лагранжиан, учитывающий это обстоятельство.

где $\tilde{\phi} \sim \exp(-\phi)$. Несмотря на то что обоснование формулы (6.14) оставляет желать лучшего, качественно она означает, что в "настоящем вакууме" ($\tilde{\phi} = 0$ или $\phi \to \infty$) масса тахионного поля становится бесконечной, что согласуется с гипотезой Сена об отсутствии возбуждений открытого сектора.

7. Заключение. Теория струн или теория поля?

В данном обзоре мы попытались обсудить основные аспекты теории струн в том виде, в котором она дожила до сегодняшнего дня. Безусловно, как и любая физическая теория, совершенно оторванная от эксперимента, теория струн многим представляется "повисшей в воздухе". Единственным оправданием этой теории могут служить новые идеи, которые незаметно возникли внутри нее и постепенно все больше и больше меняют современную научную парадигму в том, что принято называть современной квантовой теорией поля.

Представляется все более и более очевидным, что описание физики микромира не сводится к бесконечному набору или среде из гармонических осцилляторов. Такие теории возникают лишь в качестве низкоэнергетического эффективного описания явлений в области слабой связи, которое, тем не менее, находит широкое применение как в теории элементарных частиц, так и в физике "конденсированного состояния". Однако основные проблемы, минимально понятые на сегодняшний день, как раз связаны с областью сильного взаимодействия или сильных полей, где теория поля в традиционном смысле ("теория осциллятора") давно уже не приводит к новым успехам. Все менее и менее обещающими выглядят крайне популярные тридцать или даже двадцать лет назад попытки развить "правильный" или "общий" формализм в теории поля, в рамках которого вычисления могут быть тем или иным способом "продолжены" в область сильной связи. Теория струн, напротив, предполагает (и изначально предполагала) существование принципиально нового взгляда на проблемы сильной связи.

Возникнув почти феноменологически в теории сильных взаимодействий, теория одномерных протяженных объектов завоевала большую популярность прежде всего тем, что в отличие от прочих моделей предполагала переформулировку многих проблем на языке невероятно простой двумерной конформной теории поля, структура вычислений в которой жестко контролируется существованием бесконечномерной симметрии и, более того, комплексной геометрией, в том числе языком комплексно-аналитических функций. Несмотря на то что наблюдаемым является многомерный мир, амплитуды рассеяния в струнной теории возмущений сводятся к корреляционным функциям в двумерных конформных теориях с хорошо определенными операторными разложениями и т.п. Кроме того, большинство многомерных симметрий так или иначе связано с двумерными симметриями на мировом листе струны.

В теории струн был предложен и реализован подход, основанный на дуальном описании эффектов сильной связи, который довольно быстро привел к появлению гипотез о точных непертурбативных результатах в суперсимметричных калибровочных теориях поля. Эти результаты находятся за рамками традиционных квантовополевых методов и помогают гораздо глубже продвинуться в понимании проблемы невылетания кварков.

Теория струн является, по-видимому, единственным естественным продолжением общей теории относительности в область сильных полей и малых расстояний. Все более и более утверждается (как мы пытались показать, вполне очевидная) мысль о том, что не существует квантовой теории гравитации в смысле квантовой теории поля и что это принципиально разные теории. Возникновение времени как масштабного фактора, а также естественность решений типа фридмановской вселенной указывают на глубокую внутреннюю связь между гравитацией и теорией струн.

Таким образом, опыт развития теории струн чрезвычайно обогатил современную физику новыми идеями. Беда заключается лишь в том, что на сегодняшний день теория струн не обладает не то что развитым, а даже хоть в какой-то степени построенным формализмом, позволяющим проводить вычисления физических эффектов "без применения интуиции". Все эти проблемы существуют на фоне усиленного развития связей с различными разделами математики и математической физики и говорят о том, что отсутствие формализма носит пока не математический, а физический характер. В то же время хочется верить, что в необходимости постоянного использования физической интуиции и заключается Теоретическая Физика.

Автор благодарен В.Л. Гинзбургу, предложившему написать данный обзор, И.М. Дремину и Л.Б. Окуню, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд очень ценных замечаний, а также Э.Т. Ахмедову, А.О. Барвинскому, И.А. Баталину, А.И. Вайнштейну, А.А. Герасимову, А.С. Горскому, Вл.С. Доценко, А.В. Забродину, В.А. Казакову, И.М. Кричеверу, А.С. Лосеву, В.В. Лосякову, Ю.М. Макеенко, Р.Р. Мецаеву, А.Д. Миронову, Н.А. Некрасову, А.М. Полякову, А.А. Рослому, В.А. Рубакову, К.А. Сарайкину, К.Г. Селиванову, И.В. Тютину, В.Я. Файнбергу, В.В. Фоку, С.М. Харчёву, А.А. Цейтлину, Дж. Шварцу, А.В. Юнгу и особенно Б.Л. Воронову и А.Ю. Морозову за многочисленные полезные обсуждения различных вопросов, затронутых в тексте.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (00-02-16477), ИНТАС (99-1-590) и Совета по президентским грантам и государственной поддержке ведущих научных школ (01-02-30024).

8. Приложения

8.1. Словарь некоторых новых терминов

Аномалия — нарушение классической симметрии теории квантовыми эффектами, связанное прежде всего с невозможностью выбрать регуляризацию, не нарушающую ту или иную классическую симметрию (см. подробности в обзоре [36]). Именно аномалии теории на двумерных мировых листах приводят к существенным ограничениям на пространственно-временны́е свойства струнных теорий.

Балк — жаргонное понятие струнного "новояза" (bulk), не имеющее хорошего русского аналога. Наиболее близким словом является "объем". Говоря о теории в "балке", обычно имеют в виду теорию во всем "объемном пространстве", отведенном данной струнной

модели, если в этой модели имеются также протяженные объекты — браны — и часть полей локализована на них. Именно в этом случае различают теорию полей в балке (или во всем пространстве-времени) и теорию "на границе" (или на соответствующей мировому объему браны гиперповерхности).

БПС-состояния — состояния Богомольного – Прасада – Соммерфельда. Это часть спектра суперсимметричной теории, относящаяся к так называемым "коротким мультиплетам", массы которых пропорциональны центральным зарядам супералгебры. Если допустить, что ***суперсимметрия*** является точной квантовой симметрией теории, то массы БПС-состояний не могут иметь квантовых поправок, а следовательно, их классические значения являются точными. Поскольку собственные значения гамильтониана суперсимметричных теорий ограничены снизу центральными зарядами, БПС-состояния являются самыми легкими из состояний полного спектра и представляют тем самым существенный интерес для низкоэнергетических эффективных теорий. БПС-состояния "коротких мультиплетов" инвариантны относительно действия части генераторов суперпреобразований и поэтому часто ассоциируются с решениями уравнений первого порядка. В теории Виттена – Зайберга (см. раздел 4.5) анализ БПС-спектра позволяет получить совершенно нетривиальные выводы о точной форме низкоэнергетического эффективного действия.

Браны — обобщение второй части слова "мем*брана*", попросту означающее протяженный объект, вообще говоря, произвольной размерности p; часто говорят о p-бране, где p — число *пространственных* координат, "занимаемых" браной. В это определение никакая дополнительная информация, кроме размерности, не входит. Так, частица является 0-браной, струна — 1-браной, мембрана — 2-браной, локализованные в (евклидовом) пространстве-времени инстантоны — (-1)-бранами, и т.п.

Вакуумы теории струн — вакуумы гипотетической вторично-квантованной теории струн, в окрестности которых теория возмущений описывается континуальным интегралом Полякова с соответствующей конформной теорией поля. В основе этой умозрительной концепции лежит простая аналогия с квантовой теорией поля, вакуумы которой отождествляются с различными минимумами (точнее, даже с различными экстремумами) полевого потенциала (см. рис. 18); пертурбативные разложения вокруг этих минимумов, вообще говоря, различны. Поскольку вторично-квантованной теории струн не существует, а двумерные конформные теории поля в точности отвечают решениям классических полевых уравнений для фоновых полей (см., например, (3.15)), *по определению* различные пертурбативные теории струн (двумерные конформные теории) отождествляются со струнными вакуумами. Безмассовый сектор теорий, описываемый эффективными квантовыми теориями соответствующих безмассовых полей, отвечает в этой концепции квантовополевому эффективному описанию вакуумов теории струн.

Вирасоро алгебра, условия — алгебра генераторов преобразований репараметризации окружности, точнее, ее центральное расширение коциклом Гельфанда – Фукса. В теории струн алгебра Вирасоро возникает в качестве естественного следствия независимости теории от выбора координат на ненаблюдаемых двумерных мировых листах. Репараметризационная инвариантность сводит зависимость двумерной ***конформной теории*** от метрики к зависимости от ее конформного класса. Остаточная инвариантность заключается в голоморфных заменах координат (в прямом произведении голоморфных и антиголоморфных замен), являющихся аналитическим продолжением в комплексную область репараметризаций окружности. Центральное расширение алгебр репараметризаций окружности (3.17) есть следствие *конформной* аномалии в двумерной квантовой теории поля; в "полной" конформной теории на мировом листе эта аномалия должна сокращаться. Интереснейшим и до конца непонятым следствием такой симметрии на мировых листах теории струн является наличие генераторов алгебры Вирасоро в эффективных уравнениях по константам связи теории струн в пространстве-времени.

D-браны — Дирихле-браны. Это гиперповерхности (см. ***браны***), на которых (и только на которых) сосредоточены концы открытых струн. В направлениях "вдоль" D-браны концы открытых струн движутся свободно, но в "поперечных" бране направлениях они жестко привязаны к D-бране, т.е. соответствующие координаты струны удовлетворяют условиям Дирихле, откуда и происходит название. В различных теориях D-браны могут иметь более или менее произвольные размерности p; тогда применяют несколько запутывающую терминологию Dp-брана.

Дуальность — одна из основных эвристических концепций непертурбативной теории струн. Основная идея дуальности заключается в том, что одни и те же физические явления могут иметь различное описание на взаимно "дополняющих" или *дуальных* языках. Так, предполагается, что обычная калибровочная теория в области сильной связи может иметь дуальное магнитное описание, в котором "фундаментальными" объектами являются магнитно заряженные поля (и частицы), а электрически заряженные объекты являются сложными образованиями типа монополей в стандартной калибровочной теории. Сам термин "дуальность" имеет чисто струнное происхождение, связанное, с одной стороны, со свойствами ***пространства модулей*** комплексных многообразий и возникающей из-за этого тождественности инфракрасных и ультрафиолетовых расходимостей в пертурбативной теории струн, а с другой стороны, проистекающее из единственного существующего строгого примера "дуальных описаний" одной и той же теории струн в пространстве-времени с компактными измерениями (см. раздел 4.2).

Конфайнмент — удержание кварков в адронах. Это один из существующих вызовов современной теоретической физике, заключающийся в отсутствии количественной теории описания механизма удержания кварков в адронах главным образом благодаря тому, что весь эффект "сидит" на сильной связи между кварками. Проблема конфайнмента явилась одной из отправных точек теории струн, так как качественно растущий потенциал между кварками легче всего представить себе как натянутую между ними струну. На сегодняшний день количественная теория конфайнмента по-прежнему отсутствует. Тем не менее ряд последних достижений, вытекающих из теории струн (прежде всего теория Виттена – Зайберга и так называемая "АдС/КТП-дуальность"; см. разделы 4.5 и 5.3), позволяет надеяться на определенный прогресс в понимании этого явления.

Конформные теории — двумерные конформные теории поля на струнных мировых листах, существеннейший ингредиент пертурбативной теории струн. Совершенно нетривиальным образом пространственно-временны́е свойства теории струн оказываются закодированными в свойствах достаточно простых двумерных теорий с бесконечномерными группами симметрии (***алгебры Вирасоро***), позволяющими точно вычислять любые корреляционные функции, непосредственно связанные с амплитудами рассеяния в теории струн.

Критические размерности — струнный эффект, заключающийся в том, что теория струн "подбирает себе" размерность пространства-времени. Наиболее известные критические размерности: $D = 26$ в теории бозонной струны в плоском пространстве-времени и $D = 10$ в теории фермионной струны или ***суперструны***. Критические размерности являются следствием требования сокращения аномалий в двумерной конформной теории, т.е. в конечном счете следствием независимости теории от выбора координат на мировом листе. Именно это свойство теории струн позволило впервые задуматься о *динамической* природе пространства-времени, в том числе его размерности.

Лиувилля поле, действие, теория — двумерная теория скалярного поля с экспоненциальным потенциалом. Как показано Поляковым [55], теория Лиувилля возникает в качестве теории индуцированной гравитации в двумерии. В случае, когда поле Лиувилля вносит нетривиальный вклад в струнные корреляционные функции (так называемые некритические струны), их вычисление представляет собой достаточно нетривиальную и до конца не решенную задачу.

М-теория — одно из современных названий гипотетической *непертурбативной* теории струн (см. раздел 4.1).

Препотенциал — потенциал в специальной кэлеровой геометрии. Если говорят, что метрика кэлерова, то в комплексных координатах она выражается через вторые производные некоторой вещественной функции комплексных координат — кэлерова потенциала $G_{\bar{i}j} = \partial^2 K(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})/\partial\bar{z}_{\bar{i}}\partial z_j$. В еще более специальном случае (в так называемой специальной кэлеровой геометрии или ее аналогах) кэлеров потенциал, в свою очередь, можно выразить через единственную *голоморфную* (гораздо более сильное ограничение!) функцию комплексных координат $K(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \operatorname{Im} \sum_i \bar{z}_i \partial\mathcal{F}/\partial z_i$, которая называется препотенциалом. Препотенциалы естественным образом возникают в четырехмерных калибровочных теориях с $\mathcal{N} = 2$ расширенной ***суперсимметрией***, которая требует, чтобы геометрия пространств модулей (или сигма-моделей скалярных полей из векторных супермультиплетов в эффективной теории) была специальной кэлеровой.

Пространство модулей — пространство параметров теории (в наиболее грубом смысле, который чаще всего применяется в последнее время). Более тонкие свойства пространств модулей возникают обычно при отождествлении параметров физической теории с параметрами комплексных многообразий, возникающих как многообразия струнной компактификации. Наиболее исследованными примерами таких многообразий являются ***римановы поверхности***. Отличительной особенностью пространств модулей являются их глобальные свойства. В частности, невозможно выбрать хорошо определенные глобальные координаты, из-за того, что пространства модулей комплексных многообразий, как правило, имеют вид некоторых многообразий, профакторизованных по действию дискретной группы, т.е. пространства модулей, вообще говоря, не являются гладкими многообразиями. Именно преобразования этой дискретной группы отождествляются с гипотетическими преобразованиями ***дуальности*** между различными физическими теориями, описывающими один и тот же круг явлений.

Римановы поверхности — двумерные вещественные или одномерные комплексные (компактные) многообразия. Их топология характеризуется единственным целым положительным числом — родом (см. рис. 12). В пертурбативной теории струн римановы поверхности возникают в качестве мировых листов, отвечающих струнным петлевым поправкам (см. рис. 8). Результатом такого отождествления являются представления для струнных амплитуд в виде интегралов по пространствам модулей комплексных структур римановых поверхностей [61]. Кроме того, римановы поверхности могут возникать как простейшие многообразия струнных компактификаций, и именно в этой роли они появляются, например, в теории Виттена – Зайберга (см. раздел 4.5). Хорошо развитый аппарат в теории мероморфных функций и дифференциалов на римановых поверхностях в обоих случаях позволяет получать точные количественные результаты.

Суперсимметрия — симметрия между бозонами и фермионами, позволяющая в теории поля существенно снизить проблему ультрафиолетовых расходимостей из-за сокращения бозонных и фермионных петель, которая возникает в теории струн в двух ипостасях. Суперсимметрия на мировом листе является непосредственным обобщением суперсимметрии в квантовой механике или уравнения Дирака, которое приводит к пространственно-временны́м фермионам. Кроме того, в теории струн возникает и "обычная" пространственно-временна́я суперсимметрия.

Суперструны — в широком смысле достаточно неудачное (по крайней мере с точки зрения автора), широко распространенное в популярной литературе название теории струн. В более узком смысле — это введенный Дж. Шварцем термин для обозначения десятимерных, свободных от ***аномалий*** струнных моделей с пространственно-временно́й ***суперсимметрией*** в спектре.

8.2. Комментарий к списку литературы

По теории струн уже написано невероятное количество работ, которые не только невозможно прочитать, но и в них даже трудно сориентироваться. Мы попытаемся прокомментировать список литературы к данному обзору (составленный абсолютно субъективно) и сказать несколько слов по поводу работ, в наибольшей степени повлиявших на взгляды автора по тем или иным вопросам. Отметим сразу, что никакого нормального учебника по теории струн не существует главным образом потому, что теория струн пока еще не достигла той стадии развития, на которой становится возможным писать учебники.

В целом список литературы можно разделить на несколько групп.

Книги [1 – 8]

Список литературы начинается с книг основоположников теории струн [1 – 3]. Теория струн в современном виде возникла во многом благодаря идеям А.М. Полякова, хотя неподготовленному читателю читать его книгу [1] достаточно сложно. Классический двухтомник [2] содержит подробное изложение "старой" теории струн, но написана она неоднородно: с нашей точки зрения, наиболее полезная ее часть — вторая половина второго тома. Труд Дж. Полчинского [3] включен в список [1 – 3] как единственная книга, в которой сделана попытка сказать что-то о непертурбативной теории струн.

Далее в списке литературы следуют книги [4 – 8], в той или иной степени связанные с различными вопросами, обсуждаемыми в настоящем обзоре. Безусловно, это совершенно неполный список, он лишь отражает меру знакомства и предпочтений автора. Среди этих книг есть классические монографии по теории калибровочных полей [4] и физике элементарных частиц [5]. Книга И.В. Андреева [6] посвящена калибровочной теории сильных взаимодействий при высоких энергиях, труд П. Уэста [7] — один из немногих (изданных на русском языке) по суперсимметрии и супергравитации. Наконец, книга [8] содержит единственное (известное автору) подробное изложение некоторых вопросов, затронутых в разделах 4.4 – 4.6.

Обзоры [9 – 48]

Список обзоров открывается публикациями по теории струн в журнале *УФН* [9 – 13]. Обзор В.Г. Книжника [9] представляет собой цикл лекций по пертурбативной теории струн, прочитанных человеком, внесшим решающий вклад в развитие этой области. В [10] предпринята первая попытка взглянуть на теорию струн с общих позиций ее места в современной теоретической физике (десять лет назад). Обзоры [11 – 13] посвящены состоянию дел в трех конкретных "подразделах" теории струн.

За публикациями в *УФН* следует ряд достаточно удачных или полных, с точки зрения автора, обзоров по теории струн [14 – 18] и М-теории [19 – 21], в которых дано описание современного состояния в этой области. Работы [22] посвящены теории возмущений в фермионной струне, обзоры [23 – 26] — зеркальной симметрии и зеркальным многообразиям. В обзорных статьях из журнала *Теоретическая и математическая физика* [27] обсуждается теория Виттена – Зайберга, ее связь со струнами и интегрируемыми системами. Лекции Л. Саскинда [28, 29] посвящены м(атричным) моделям и голографическому принципу. Замыкают эту часть списка обзоры [30 – 32] по "зоологии бран", т.е. по геометрической интерпретации в терминах D-бран различных калибровочных теорий.

Далее представлены обзорные статьи в *УФН* (в хронологическом порядке), проблематика которых тесно связана со многими вопросами, возникающими "вокруг" теории струн. Статья [33] — первый обзор по суперсимметрии, [34] — замечательный обзор по инстантонам. Обзор [35] содержит описание гамильтонова формализма в теории гравитации, [36] — аномалий в квантовой теории поля. Затем следуют обзоры по нейтринным осциляциям [37], проблемам теории элементарных частиц и космологии [38], нобелевские лекции Г. 't Хофта и М. Велтмана [39] о перенормируемости Стандартной модели. Обзор В.А. Рубакова посвящен дополнительным измерениям [40], статья [41] — феноменологическим аспектам существования суперсимметрии как реальной симметрии физического мира, исторический очерк [42] — открытию суперсимметрии.

Завершают эту часть списка обзоры по вильсоновской ренормгруппе [43], расширенной суперсимметрии [44], физике Стандартной модели [45], проблемам конфайнмента в суперсимметричных калибровочных теориях [46, 47] и некоммутативной теории поля [48].

Классические работы по теории струн [49 – 63]

Безусловно, деление на классические и остальные работы чисто условно и во многом отражает лишь точку зрения автора. В работах [50] впервые появилась теория релятивистской струны в качестве первоисточника амплитуды Венециано [49], в [51, 52] введены дополнительные фермионные переменные на мировой поверхности струны для описания внутренних степеней свободы. Статья [53] — одна из ключевых работ в теории струн, в ней впервые указано, что струны не только дают эффективное описание сильного взаимодействия, но и могут претендовать на роль единой фундаментальной физической теории. В [54] показано, что в теории фермионных струн естественным образом возникает пространственно-временна́я суперсимметрия.

В работе [55] предложена пертурбативная формулировка теории струн как суммы по двумерным геометриям, в [56] разработан формализм двумерных конформных теорий поля, в [57, 58] сформулирована конформная теория на групповых многообразиях. В [59] указано на то, что теория *суперструн* в десятимерии свободна от аномалий и может рассматриваться как реальный кандидат на роль фундаментальной физической теории. В [60] проведен мост между теорией струн и эффективными теориями поля, в [61] установлена связь между пертурбативной теорией струн и комплексной геометрией пространств модулей римановых поверхностей. Наконец, в [62] предложен двойной скейлинговый предел в матричных моделях двумерной гравитации, позволяющий получать непертурбативные результаты в простейших струнных моделях, в [63] введены D-браны, являющиеся одним из основных ингредиентов современной картины непертурбативной струнной теории.

Классические работы по теме обзора [64 – 75]

В классических работах [64] впервые представлена идея о том, что внутренние степени свободы (электрический заряд, цвет и т.п.) могут возникать как "скрытое проявление" дополнительных (малых!) измерений пространства-времени. Статья [65] — первая работа по суперсимметрии. В работе [66] предложена связь между энтропией черной дыры и площадью горизонта, в [67] найдена асимптотическая свобода в неабелевых калибровочных теориях, в [68] указано на то, что в суперсимметричных теориях поля должны происходить существенные сокращения петлевых вкладов бозонов и фермионов в теории возмущений.

В статьях [69] построены монополи как решения классических уравнений в неабелевых калибровочных теориях, в [70] исследованы свойства $(1/N)$-разложения в калибровочных теориях, в дальнейшем получившего чрезвычайно естественную интерпретацию с точки зрения теории струн. В работах [71] предложены инстантоны, в [72] построено первое инстантонное решение в теории Янга – Миллса. В статьях [73] введены БПС-

состояния, отвечающие уравнениям первого порядка, в [74] построена "максимальная" одиннадцатимерная супергравитация. Работа [75] содержит по сути дела первое точное непертурбативное решение суперсимметричной калибровочной теории и анализ возникающего в таких теориях конфайнмента.

Дополнительная литература [76 – 132]

Из оставшихся работ в списке литературы особо хотелось бы отметить статьи по первично-квантованной формулировке теории струн [79, 80], явившиеся предтечей [55], а также представление двумерных конформных теорий свободными полями [83, 86], теорию возмущений в фермионной струне [90]. Заслуживают несомненного внимания работы [95, 96] по квантованию классического спина, статьи [129] по локализации и дополнительным измерениям и особенно лекции А.М. Полякова [119] по связи калибровочных теорий со струнами и теорией гравитации.

Список литературы

Книги основоположников теории струн

1. Поляков А М *Калибровочные поля и струны* (Черноголовка: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995)
2. Грин М, Шварц Дж, Виттен Э *Теория суперструн* (М.: Мир, 1990)
3. Polchinski J G *String Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)

Книги по различным вопросам, затронутым в обзоре

4. Славнов А А, Фаддеев Л Д *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (М.: Наука, 1978)
5. Окунь Л Б *Лептоны и кварки* (М.: Наука, 1990)
6. Андреев И В *Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях* (М.: Наука, 1981)
7. Уэст П *Введение в суперсимметрию и супергравитацию* (М.: Мир, 1989)
8. Marshakov A *Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems* (Singapore: World Scientific, 1999)

Обзоры по теории струн в *УФН*

9. Книжник В Г *УФН* **159** 401 (1989)
10. Морозов А Ю *УФН* **162** (8) 83 (1992)
11. Морозов А Ю *УФН* **164** 3 (1994)
12. Зарембо К Л, Макеенко Ю М *УФН* **168** 3 (1998)
13. Ахмедов Э Т *УФН* **171** 1005 (2001); Akhmedov E T, hep-th/9911095

Другие обзоры по струнам

14. Schwarz J H, hep-ex/0008017; hep-th/9812037
15. Sen A *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **94** 35 (2001); hep-lat/0011073; hep-th/9904207; hep-th/9802051
16. Polchinski J, hep-th/9411028
17. Polchinski J, hep-th/9611050
18. Vafa C, hep-th/9810149; hep-th/9702201
19. Townsend P K, hep-th/9612121
20. Schwarz J H *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **55** 1 (1997); hep-th/9607201
21. Losev A "M-theory for pedestrians", Preprint ITEP, unpublished
22. D'Hoker E, Phong D H *Rev. Mod. Phys.* **60** 917 (1988); см. также библиографию в данном обзоре; *Phys. Lett. B* **529** 241 (2002); hep-th/0110247; hep-th/0110283; hep-th/0111016; hep-th/0111040
23. Vafa C, hep-th/9111017
24. Witten E, hep-th/9112056
25. Aspinwall P S, hep-th/0001001
26. Morrison D R, in *Mathematics Unlimited — 2001 and Beyond* (Eds B Enquist, W Schmid) (Berlin: Springer, 2001) p. 899; math.AG/0007090
27. Маршаков А В *ТМФ* **112** 3 (1997); **121** 179 (1999)
28. Bigatti D, Susskind L, hep-th/9712072
29. Bigatti D, Susskind L, hep-th/0002044
30. Giveon A, Kutasov D *Rev. Mod. Phys.* **71** 983 (1999); hep-th/9802067
31. Kachru S, hep-th/0009247
32. Argyres Ph C, Narayan K *JHEP* **0103** 047 (2001); hep-th/0101114

Обзоры в *УФН* по проблемам "вокруг" теории струн

33. Огиевецкий В И, Мезинческу Л *УФН* **117** 637 (1975)
34. Вайнштейн А И и др. *УФН* **136** 553 (1982)
35. Фаддеев Л Д *УФН* **136** 435 (1982)
36. Морозов А Ю *УФН* **150** 337 (1986)
37. Герштейн С С, Кузнецов Е П, Рябов В А *УФН* **167** 811 (1997)
38. Рубаков В А *УФН* **169** 1299 (1999)
39. 't Хофт Г *УФН* **170** 1218 (2000); Велтман М Й Г *УФН* **170** 1225 (2000)
40. Рубаков В А *УФН* **171** 913 (2001); Rubakov V A, hep-ph/0104152
41. Высоцкий М И, Невзоров Р Б *УФН* **171** 939 (2001)
42. Лихтман Е П *УФН* **171** 1025 (2001)

Другие обзоры по вопросам, затронутым в тексте

43. Wilson K G, Kogut J B *Phys. Rep.* **12** 75 (1974)
44. Шерк Дж "Расширенная суперсимметрия и теории расширенной супергравитации", в сб. *Геометрические идеи в физике* (Под ред. Ю И Манина) (М.: Мир, 1983) с. 203
45. Высоцкий М И и др. *ЯФ* **61** 894 (1998)
46. Strassler M J *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131** 439 (1998); hep-lat/9803009; "On confinement and duality", in *Lecture Notes for Spring School on Superstrings and Related Matters, Trieste, Italy, 2 – 10 April 2001*
47. Yung A, hep-th/0005088
48. Douglas M R, Nekrasov N A *Rev. Mod. Phys.* **73** 977 (2002); hep-th/0106048

Классические работы по теории струн

49. Veneziano G *Nuovo Cimento A* **57** 190 (1968)
50. Nambu Y, in *Proc. of the Intern. Conf. on Symmetries and Quark Models, Wayne State Univ., 1969* (Ed. R Chand) (New York: Gordon and Breach, 1970) p. 269; Goto T *Prog. Theor. Phys.* **46** 1560 (1971)
51. Neveu A, Schwarz J *Nucl. Phys. B* **31** 86 (1971)
52. Ramond P *Phys. Rev. D* **3** 2415 (1971)
53. Scherk J, Schwarz J H *Nucl. Phys. B* **81** 118 (1974)
54. Gliozzi F, Scherk J, Olive D I *Phys. Lett. B* **65** 282 (1976)
55. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **103** 207, 211 (1981)
56. Belavin A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B *Nucl. Phys. B* **241** 333 (1984)
57. Witten E *Commun. Math. Phys.* **92** 455 (1984)
58. Knizhnik V G, Zamolodchikov A B *Nucl. Phys. B* **247** 83 (1984)
59. Green M B, Schwarz J H *Phys. Lett. B* **149** 117 (1984)
60. Fradkin E S, Tseytlin A A *Nucl. Phys.* **261** 1 (1985)
61. Белавин А А, Книжник В Г *ЖЭТФ* **91** 364 (1986)
62. Kazakov V A *Mod. Phys. Lett. A* **4** 2125 (1989)
63. Polchinski J *Phys. Rev. Lett.* **75** 4724 (1995); hep-th/9510017; *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **123** 9 (1996); hep-th/9511157; *Rev. Mod. Phys.* **68** 1245 (1996); hep-th/9607050

Классические работы по теме обзора

64. Kaluza T *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl.* (1) 966 (1921); Klein O *Z. Phys.* **37** 895 (1926)
65. Гольфанд Ю А, Лихтман Е П *Письма в ЖЭТФ* **13** 452 (1971)
66. Bekenstein J D *Lett. Nuovo Cimento* **4** 737 (1972); Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1972)
67. Gross D J, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973); Politzer H D *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973)
68. Wess J, Zumino B *Nucl. Phys. B* **70** 39 (1974)
69. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **79** 276 (1974); Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **20** 430 (1974)
70. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **72** 461 (1974)
71. Polyakov A M *Phys. Lett. B* **59** 79 (1975); Белавин А А, Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **22** 503 (1975)
72. Belavin A A et al. *Phys. Lett. B* **59** 85 (1975)
73. Богомольный Е Б *ЯФ* **24** 861 (1976); Prasad M K, Sommerfield Ch M *Phys. Rev. Lett.* **35** 760 (1975)
74. Cremmer E, Julia B, Scherk J *Phys. Lett. B* **76** 409 (1978)
75. Seiberg N, Witten E *Nucl. Phys. B* **426** 19 (1994); hep-th/9407087; *Nucl. Phys. B* **431** 484 (1994); hep-th/9408099

Дополнительная литература

76. Paton J E, Chan H-M *Nucl. Phys. B* **10** 516 (1969)
77. Gervais J-L, Sakita B *Nucl. Phys. B* **34** 632 (1971)

78. Volkov D V, Akulov V P *Phys. Lett. B* **46** 109 (1973)
79. Brink L et al. *Phys. Lett. B* **64** 435 (1976)
80. Deser S, Zumino B *Phys. Lett. B* **65** 369 (1976); Brink L, Di Vecchia P, Howe P S *Phys. Lett. B* **65** 471 (1976)
81. Green M B, Schwarz J H *Nucl. Phys. B* **181** 502 (1981); *Phys. Lett. B* **109** 444 (1982); **136** 367 (1984)
82. Фейгин Б Л, Фукс Д Б *Функциональный анализ и его приложения* **16** (2) 47 (1982)
83. Dotsenko V S, Fateev V A *Nucl. Phys. B* **240** 312 (1984); **251** 691 (1985)
84. Gross D J et al. *Phys. Rev. Lett.* **54** 502 (1985)
85. Fradkin E S, Tseytlin A A *Phys. Lett. B* **163** 123 (1985)
86. Friedan D, Martinec E J, Shenker S H *Nucl. Phys. B* **271** 93 (1986)
87. Seiberg N, Witten E *Nucl. Phys. B* **276** 272 (1986)
88. Shifman M A, Vainshtein A I *Nucl. Phys. B* **277** 456 (1986)
89. Verlinde E, Verlinde H *Nucl. Phys. B* **288** 357 (1987)
90. Verlinde E, Verlinde H *Phys. Lett. B* **192** 95 (1987); Atick J, Moore G, Sen A *Nucl. Phys. B* **307** 221 (1988); La H, Nelson P *Phys. Rev. Lett.* **63** 24 (1989)
91. Atick J J, Witten E *Nucl. Phys. B* **310** 291 (1988)
92. Fainberg V Ya, Marshakov A V *Phys. Lett. B* **211** 81 (1988)
93. Каллош Р, Морозов А Ю *ЖЭТФ* **94** 42 (1988)
94. Dijkgraaf R, Verlinde E, Verlinde H *Commun. Math. Phys.* **115** 649 (1988); Ginsparg P *Nucl. Phys. B* **295** 153 (1988)
95. Nielsen H B, Rohrlich D *Nucl. Phys. B* **299** 471 (1988)
96. Alekseev A, Faddeev L, Shatashvili S *J. Geom. Phys.* **5** 391 (1989)
97. Marshakov A V *Nucl. Phys. B* **312** 178 (1989); Маршаков А В, Файнберг В Я *Труды ФИАН* **201** 139 (1990)
98. Gerasimov A et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **5** 2495 (1990)
99. Brezin E, Kazakov V A *Phys. Lett. B* **236** 144 (1990)
100. Douglas M R, Shenker S H *Nucl. Phys. B* **335** 635 (1990)
101. Gross D J, Migdal A A *Phys. Rev. Lett.* **64** 127 (1990)
102. Witten E *Nucl. Phys. B* **340** 281 (1990); Dijkgraaf R, Verlinde H, Verlinde E *Nucl. Phys. B* **352** 59 (1991)
103. Fukuma M, Kawai H, Nakayama R *Int. J. Mod. Phys. A* **6** 1385 (1991); Dijkgraaf R, Verlinde E, Verlinde H *Nucl. Phys. B* **348** 435 (1991)
104. Gerasimov A et al. *Nucl. Phys. B* **357** 565 (1991)
105. Marshakov A, Mironov A, Morozov A *Phys. Lett. B* **274** 280 (1992); Kharchev S et al. *Nucl. Phys. B* **380** 181 (1992); hep-th/9201013; см. также [102]
106. Kharchev S et al. *Mod. Phys. Lett. A* **8** 1047 (1993); hep-th/9208046; Харчев С и др. *ТМФ* **95** 280 (1993)
107. 't Hooft G, gr-qc/9310026; см. также [29]
108. Seiberg N, hep-th/9408013
109. Klemm A et al. *Phys. Lett. B* **344** 169 (1995); hep-th/9411048; Argyres Ph C, Faraggi A E *Phys. Rev. Lett.* **74** 3931 (1995); hep-th/9411057
110. Gorsky A et al. *Phys. Lett. B* **355** 466 (1995); hep-th/9505035
111. Townsend P K *Phys. Lett. B* **350** 184 (1995); hep-th/9501068
112. Witten E *Nucl. Phys. B* **443** 85 (1995); hep-th/9503124
113. Marshakov A, Mironov A, Morozov A *Phys. Lett. B* **389** 43 (1996); hep-th/9607109
114. Kachru S et al. *Nucl. Phys. B* **459** 537 (1996); hep-th/9508155
115. Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 335 (1996); hep-th/9510135
116. Diaconescu D-E *Nucl. Phys. B* **503** 220 (1997); hep-th/9608163; Hanany A, Witten E *Nucl. Phys. B* **492** 152 (1997); hep-th/9611230
117. Seiberg N, Witten E, in *The Mathematical Beauty of Physics: A Memorial Volume for Claude Itzykson, Saclay, France, 5–7 June 1996* (Adv. Ser. in Math. Phys., Vol. 24, Eds J M Drouffe, J B Zuber) (Singapore: World Scientific, 1997) p. 333; hep-th/9607163
118. Witten E *Nucl. Phys. B* **500** 3 (1997); hep-th/9703166
119. Polyakov A M *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **68** 1 (1998); hep-th/9711002; *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 645 (1999); hep-th/9809057; *ЯФ* **64** 594 (2001); hep-th/0006132; hep-th/0110196
120. Banks T et al. *Phys. Rev. D* **55** 5112 (1997)
121. Marshakov A, Martellini M, Morozov A *Phys. Lett. B* **418** 294 (1998); hep-th/ 9706050; Marshakov A, in *New Developments in Quantum Field Theory* (NATO ASI Series. Ser. B, Vol. 366, Eds P H Damgaard, J Jurkiewicz) (New York: Plenum Press, 1998) p. 279; hep-th/ 9709001
122. Gorsky A et al. *Nucl. Phys. B* **527** 690 (1998); hep-th/9802007
123. Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1999); hep-th/9711200
124. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); hep-th/9802109
125. Nekrasov N, Schwarz A *Commun. Math. Phys.* **198** 689 (1998); hep-th/9802068
126. Sen A *JHEP* **9808** 012 (1998); hep-th/9805170; *JHEP* **9912** 027 (1999); hep-th/9911116; *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 4061 (1999); hep-th/9902105
127. de Boer J, Verlinde E, Verlinde H *JHEP* **0008** 003 (2000); hep-th/9912012; Verlinde E, Verlinde H *JHEP* **0005** 034 (2000); hep-th/9912018; Verlinde E *Classical Quant. Grav.* **17** 1277 (2000); hep-th/9912058
128. Polchinski J, Strassler M J, hep-th/0003136; Polchinski J *Int. J. Mod. Phys. A* **16** 707 (2001); hep-th/0011193
129. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 136 (1983); Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690 (1999); hep-th/9906064
130. Gopakumar R, Minwalla S, Strominger A *JHEP* **0005** 020 (2000); hep-th/0003160
131. Цейтлин А А *ТМФ* **128** 540 (2001)
132. Gerasimov A A, Shatashvili S L *JHEP* **0010** 034 (2000); hep-th/0009103

String theory or field theory?

A.V. Marshakov
P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskiĭ prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 135-83 39. Fax (7-095) 938-22 51
E-mail: mars@lpi.ru
Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 123-35 55. Fax (7-095) 127-08 23
E-mail: mars@gate.itep.ru

The status of string theory is reviewed, and major recent developments — especially those in going beyond perturbation theory in the string theory and quantum field theory frameworks — are analyzed. This analysis helps better understand the role and place of string theory in the modern picture of the physical world. Even though quantum field theory describes a wide range of experimental phenomena, it is emphasized that there are some insurmountable problems inherent in it — notably the impossibility to formulate the quantum theory of gravity on its basis — which prevent it from being a fundamental physical theory of the world of microscopic distances. It is this task, the creation of such a theory, which string theory, currently far from completion, is expected to solve. In spite of its somewhat vague current form, string theory has already led to a number of serious results and greatly contributed to progress in the understanding of quantum field theory. It is these developments which are our concern in this review.

PACS numbers: **11.15.–q**, **11.25.–w**, **12.20.–m**

Bibliography — 132 references

Received 21 Novemver 2001, revised 23 April 2002