Сентябрь 2001 г. **Том 171, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Соответствие между суперсимметричной теорией Янга – Миллса и супергравитацией

Э.Т. Ахмедов

AdS/CFT-соответствие устанавливает связь между супергравитацией в пространстве анти-де Ситтера (AdS) и суперсимметричной теорией Янга – Миллса, которая является конформно-инвариантной теорией поля (CFT). Пространство анти-де Ситтера является решением уравнений гравитации Эйнштейна – Гильберта с постоянной отрицательной кривизной. Почему это соответствие важно? Какого оно типа? Каким образом можно его обнаружить? Цель настоящей статьи — ответить на эти вопросы. В статье представлены основные идеи и аргументы, лежащие в основе AdS/CFT-соответствия. Краткое изложение утверждений "старой" теории струн, определение D-бран и рассмотрение их основных свойств завершается описанием AdS/CFT-соответствия и аргументов в его пользу.

PACS numbers: **04.65.+e**, **11.25.–w**, 12.60.Jv

Содержание

Э.Т. Ахмедов. Институт теоретической
и экспериментальной физики,
117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 129-97-68
Факс (095) 129-96-49
E-mail: akhmedov@itep.ru; akhmedov@physics.ubc.ca
Университет Британской Колумбии,
6224 Agricultural Rd, Vancouver BC, Canada, V6T 1Z1

Статья поступила 30 мая 2000 г.,
после доработки 29 декабря 2000 г.

1. Введение

В квантовой теории поля давно стоит задача найти струнное описание теории Янга – Миллса (ЯМ) [1]. Аргументация при этом такова: в математическом описании любого явления необходимо найти какую-нибудь приближенную модель, допускающую точное решение, и малый параметр, по которому можно провести разложение, чтобы достигнуть реальной ситуации. В случае теории ЯМ хорошим приближением при высоких энергиях является описание в терминах свободных векторных частиц. Они несут квантовые числа, принимающие значения в присоединенном представлении неабелевой калибровочной группы, а малый параметр, о котором идет речь, — это константа связи g^2 [1].

Однако в этом описании есть проблема, поскольку из-за квантовых эффектов константа связи g^2 растет при удалении на большие расстояния или при переходе к малым энергиям. Более того, на некотором масштабе энергий описание теории ЯМ в терминах основных переменных становится несостоятельным из-за сингулярностей, возникающих в теории возмущений [1]. В результате никто не знает, как перейти к низким энергиям в теории ЯМ. Поэтому возникает вопрос: какое приближение к теории ЯМ может быть применимо при любых энергиях?

Наиболее многообещающий подход к задаче состоит в рассмотрении $\mathrm{SU}(N)$-теории ЯМ при $N \to \infty$ [1], когда теория возмущений существенно упрощается [2] и остающиеся диаграммы выглядят как "триангуляции" сферы. Этот факт является одним из намеков [1] на то, что в пределе $N \to \infty$ теория ЯМ могла бы описываться двумерной теорией струн, представляющей "триангуляции" сферы. Диаграммы, дающие вклад в эти "триангуляции", являются разложением в ряд по степеням параметра g^2N, который полагается конечным в пределе

$N \to \infty$ [2]. При этом вклады от диаграмм с топологией тора и сферы, имеющие несколько ручек, подавлены по степеням величины $1/N^2$, играющей роль малого параметра, при разложении по которому можно приблизиться к реальной ситуации.

Почему описание при помощи теории струн предпочтительно? Дело в том, что в теории струн существуют хорошо разработанные методы вычисления амплитуд различных процессов [1, 3, 4] и, кроме того, есть надежда ее решить.

В случае обычной теории ЯМ попытки найти струнное описание до сих пор не увенчались успехом. Однако в применении к конформно-инвариантной суперсимметричной теории ЯМ недавно был достигнут значительный прогресс [5–8]. Стоит отметить, что струнное описание конформных теорий ЯМ представляет исключительно академический интерес, поскольку из-за конформной инвариантности известна динамика таких теорий на всех расстояниях. Тем не менее можно надеяться, что при этом обнаружатся некоторые свойства, соответствующие обычной теории ЯМ.

Известно несколько безаномальных и самосогласованных теорий струн, обладающих суперсимметрией в объемлющем пространстве — пространстве, в котором распространяются струны. Объемлющее пространство должно быть десятимерным, поскольку в другом случае не существует хорошо разработанных методов вычисления суперструнных амплитуд [1, 3, 4]. В то же время мировые поверхности струн — это двумерные пространства, заметаемые струнами во время их эволюции.

Согласно теории на мировой поверхности имеется бесконечно много возбуждений, соответствующих разным квантовым состояниям струны. Все они выглядят как частицы, живущие в объемлющем пространстве. Среди этих частиц существует конечное число безмассовых, тогда как остальные частицы имеют массы, пропорциональные квадратному корню из струнного натяжения. Натяжение струны обычно считается величиной порядка квадрата планковской энергии (здесь и далее мы используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$). Следовательно, на расстояниях, бóльших по сравнению со струнным масштабом длин (т.е. когда струны можно считать точечными объектами), выживают только безмассовые частицы. Последние предпочтительнее описывать теорией поля в объемлющем пространстве, чем теорией струн.

Среди безмассовых возбуждений *замкнутых* струн есть частица, соответствующая симметричному тензорному полю. В силу свойств симметрии струнной теории эта частица имеет в точности такое же число степеней свободы, как и гравитон. Единственной теорией на больших расстояниях (т.е. с младшими степенями производных от полей), которая может описывать гравитон является теория гравитации Эйнштейна–Гильберта в объемлющем пространстве. Как можно строго показать [1, 3, 4], именно эта теория (также содержащая взаимодействие с остальными безмассовыми струнными возмущениями) получается из теории струн на больших расстояниях. Соответственно, из теории суперструн на больших расстояниях получается теория супергравитации.

Теорию, описывающую взаимодействие полей суперсимметричной теории ЯМ с полями супергравитации, можно получить, если наряду с замкнутыми струнами включить в рассмотрение открытые, поскольку в теории *открытых* струн возбуждение с самой малой энергией является векторной частицей с числом физических поляризаций, как у калибровочного бозона.

Имея это в виду, можно сказать, что существует теория суперструн, которая описывает четырехмерную суперсимметричную теорию ЯМ, точнее регуляризует ее. В самом деле, теория суперструн конечна и применима при любых энергиях, и только при низких энергиях она приводит к суперсимметричной теории ЯМ. Однако это неудовлетворительно, поскольку при суперструнном описании суперсимметричной теории ЯМ приходится иметь дело с квантовой гравитацией и размерность пространства-времени равна десяти, а не четырем.

К счастью, недавно были открыты добавления секторов открытых струн к замкнутым, которые приводят к новым способам взаимодействия полей суперсимметричной теории ЯМ с полями супергравитации. Чтобы найти их, к замкнутой теории струн надо добавить набор из N параллельных D-бран так, чтобы *сохранить суперсимметрию*. D-браны — это многомерные подмногообразия в объемлющем пространстве, на которых заканчиваются открытые струны [9], в то время как замкнутые струны могут распространяться во всем объемлющем пространстве. Следовательно, при низких энергиях в мировом объеме N параллельных D-бран мы видим $\mathrm{U}(N)$-инвариантную суперсимметричную теорию ЯМ [10], а в объемлющем пространстве — обычную супергравитацию.

Таким образом, струны, которые могли бы описывать суперсимметричную теорию ЯМ, прикреплены концами к нашему четырехмерному миру (мировому объему D3-браны) и флуктуируют в объемлющем пространстве [5, 9]. Для точного описания соответствующей теории струн надо найти геометрию, в которой она реализуется, т.е. провести измерение D3-браны извне (из объемлющего пространства). В то же время с точки зрения наблюдателя, удаляющегося от D-браны, теория может изменяться неконтролируемым образом, поскольку полная динамика теории струн не определена. Для преодоления этой трудности, надо потребовать, чтобы D-браны сохраняли некоторую часть преобразований суперсимметрии в теории суперструн. Поясним, почему это надо сделать.

В квантовой теории поля и статистической механике при переходе от малых к большим расстояниям необходимо провести усреднение по всем флуктуациям с длинами волн, меньшими масштаба расстояний, о котором идет речь. Это может привести к изменению параметров теории. Например, если поместить заряженный источник в плазму, он экранируется, поскольку заряды противоположного знака притягиваются к нему, а одноименные заряды отталкиваются от него. Простота системы в этом примере позволяет предсказать, как будет изменяться заряд источника при приближении к нему. Однако в теории ЯМ ситуация более сложная: изменение заряда в теории с расстоянием известно только до некоторого низкоэнергетического масштаба. В результате правильное низкоэнергетическое описание сильных взаимодействий до сих пор не найдено. Подобное может случиться с любой нелинейной теорией, такой как гравитация или теория струн.

При наличии суперсимметрии бозонные и фермионные степени свободы в теории могут меняться местами

[12]. Именно эта симметрия приводит к сокращению эффектов экранирования и антиэкранирования фермионами и бозонами. Последнее происходит, только если источник сохраняет некоторую часть суперсимметрии, т.е. является состоянием Богомольного – Прасада – Соммерфельда (БПС) [4, 11, 12]. Хотя наше описание и не было строгим, мы надеемся, что читатель хотя бы почувствовал физическую природу явления.

Таким образом, суперсимметрия позволяет определить, как искривляется геометрия пространства в присутствии D-бран. Например, характерная кривизна D3-браны (в единицах струнного натяжения) пропорциональна $(g^2N)^{1/4}$.

Какие новые идеи для струнного описания теории ЯМ могут дать D-браны по сравнению со "старой" струнной теорией? Во-первых, в этом случае можно работать прямо с четырехмерной суперсимметричной теорией ЯМ. Во-вторых, можно менять масштаб регуляризации для теории ЯМ в мировом объеме D-браны и сделать его много меньше струнного масштаба энергий [5] следующим образом. После регуляризации теряется информация о высокоэнергетических модах, и регуляризующая теория должна содержать эту информацию. В случае D-бран высокочастотные моды полей в мировом объеме D-браны могут удаляться в объемлющее пространство, т.е. рождать замкнутые струны, уходящие в объемлющее пространство [13]. Тем не менее замкнутые струны с энергиями, меньшими кривизны браны, не могут уйти на бесконечность [14], а остаются в области горловины — сильно искривленной части пространства-времени вблизи D-браны, поскольку они не обладают энергией, достаточной для того, чтобы преодолеть гравитационный потенциал и выйти в область асимптотически плоского пространства.

В итоге, для сохранения унитарности необходима только теория в области горловины [5, 6, 15]. Если переход к пределу $N \to \infty$ и $g \to 0$ осуществляется так, что $g^2N \ll 1$, имеется полная теория струн в горловине, регуляризующая суперсимметричную теорию ЯМ в мировом объеме D-браны [6]. Действительно, в этом пределе размер горловины D-браны очень мал и может быть применима только теория струн. Однако если переход к пределу $N \to \infty$ и $g \to 0$ происходит так, что $g^2N \gg 1$, для описания можно применять теорию классической гравитации. Имеется в виду, что в этом пределе размер горловины очень большой и струнное описание суперсимметричной теории ЯМ дается *классической* суперструной на фоне геометрии горловины.

Таким образом, струнное описание суперсимметричной теории ЯМ существует еще до того, как гравитация становится квантовой. В простейшей ситуации суперсимметричная теория ЯМ на бране имеет $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию, поэтому ее β-функция обращается в нуль и теория конформно-инвариантна. В соответствующем гравитационном описании горловина браны, о которой идет речь, имеет геометрию пространства анти-де Ситтера.

Изложение материала построено следующим образом. Для самосогласованности изложения мы включили в статью два раздела, посвященные теории струн. В разделе 2 представлены основные идеи теории струн на примере бозонной струны, в разделе 3 рассмотрена теория суперструны типа II и дано описание их безмассового спектра. После знакомства с теорией суперструн, мы вводим понятие D-бран, показываем их связь с солитонами в теории гравитации [1] и суперсимметричной теорией ЯМ (раздел 4). Описание AdS/CFT-соответствия и аргументы в его пользу представлены в разделе 5. Заключительный раздел 6 содержит выводы и результаты проведенного исследования. Для завершенности изложения мы включили в статью дополнение, посвященное БПС-состояниям.

К сожалению, даже в большой книге невозможно представить в деталях все аспекты проблемы, поэтому наше изложение будет не очень подробным. Мы пытались лишь выделить основные идеи и дать некоторую пищу для размышлений по обсуждаемой проблеме. Мы не стремились к всестороннему обзору этого широкого предмета, и, следовательно, наш список литературы далек от полного. Более или менее подробные ссылки можно найти в [16].

2. Теория бозонных струн

К настоящему времени полностью построена только первично-квантованная теория струн [1, 3, 4] — "квантовая механика" двумерных струнных мировых поверхностей, заметаемых квантовыми струнами в процессе их эволюции в объемлющем пространстве. По аналогии с релятивистской частицей действие для релятивистской струны пропорционально площади ее мировой поверхности:

$$S \propto \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\det|g_{ab}|}\,, \qquad g_{ab} = \partial_a \tilde{x}_\mu \partial_b \tilde{x}_\mu\,, \tag{1}$$

где σ_a $(a = 1, 2)$ — координаты на мировой поверхности струн, а $\tilde{x}_\mu(\sigma)$ $(\mu = 0, \ldots, d-1)$ — функции двух переменных, описывающие вложение струн в d-мерное плоское пространство-время.

Действие (1) нелинейно, и поэтому его трудно проквантовать. Для того чтобы сделать его квадратичным по $\tilde{x}_\mu$, надо ввести новую динамическую переменную — внутреннюю метрику h_{ab} на мировой поверхности струны [1]. В этом случае теория струн описывается двумерной σ-моделью, поля которой $\tilde{x}_\mu$ взаимодействуют с полями двумерной гравитации:

$$S_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-h}\, h^{ab}\, \partial_a \tilde{x}_\mu \partial_b \tilde{x}_\mu + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-h}\,, \tag{2}$$

$$h = \det|h_{ab}|\,, \qquad h^{ab} = h_{ab}^{-1}\,.$$

Здесь α' обозначает обратное натяжение струны, которое обычно задает некоторый масштаб длин. Последний полагается меньше любого масштаба, экспериментально доступного на настоящий момент.

На уровне классических уравнений движения $h_{ab} \propto g_{ab}$. Следовательно, действие (2) классически эквивалентно действию (1). Однако на квантовом уровне (по крайней мере наивно) теории с этими действиями различаются (тем не менее см. [1]). Действительно, в функциональном интеграле теории с действием (1) суммирование производится по всем возможным мировым поверхностям струны, т.е. по вложениям $\tilde{x}_\mu$, в теории с действием (2) — по всем возможным метрикам на каждой мировой поверхности и самим мировым поверхностям.

[1] Здесь и далее мы называем солитонами *любые* решения уравнений теории гравитации с конечным натяжением или массой.

Далее мы будем рассматривать теорию с действием (2), которое инвариантно относительно репараметризационных преобразований: $\sigma_a \to f_a(\sigma)$, что является отражением общей ковариантности на мировой поверхности струны. *Эта двухпараметрическая* симметрия позволяет избавиться от *двух* компонент метрики: $\mathrm{d}s^2 = h^{ab}\,\mathrm{d}\sigma_a\,\mathrm{d}\sigma_b = \exp\bigl[\varphi(z,\bar z)\bigr]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z$, где $z = \exp\bigl[\sigma_1 + \mathrm{i}\sigma_2\bigr]$. Для мировой поверхности со сферической топологией это можно сделать однозначным образом, в то время как для мировых поверхностей с топологией тора и выше — только с точностью до комплексной структуры [3, 4]. Мы не вдаемся в подробности того, что такое комплексная структура, поскольку мы не собираемся где-либо использовать это понятие (за исключением самого факта его существования).

После фиксации репараметризационной инвариантности действие (2) остается все еще инвариантным относительно конформных преобразований:

$$z \to f(z)\,, \quad \exp\varphi(z,\bar z) \to \bigl|\partial_z f(z)\bigr|^2 \exp\varphi(z,\bar z)\,, \quad \partial_{\bar z} f(z) = 0.$$

Используя конформные преобразования, можно избавиться от внутренней метрики и получить

$$S'_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2 z\,\partial_z\tilde x_\mu\,\partial_{\bar z}\tilde x_\mu + \text{духи Фаддеева–Попова}\,. \quad (3)$$

Мы не объясняем здесь, что такое духи Фаддеева–Попова, так как нигде далее не используем это понятие, кроме самого факта его существования. Подробное обсуждение духов Фаддеева–Попова в рамках теории струн можно найти в книге [3].

Избавление от метрики, как в (3), полностью возможно только классически. После квантования теории с действием (2) появляется так называемая конформная аномалия [1, 3, 4], поскольку конформная симметрия нарушается из-за квантовых эффектов. В результате поле $\varphi(z,\bar z)$ становится динамическим. Однако вклады в аномалию от полей $\tilde x_\mu$ $(\mu = 0,\ldots,d-1)$ и духов Фаддеева–Попова взаимно сокращаются, если $d = 26$, и теория с действием (3) применима даже после квантования.

Имеется также остаточная симметрия от репараметризационной инвариантности на мировых поверхностях высшей топологии, называемая модулярной инвариантностью. Модулярные преобразования действуют на комплексные структуры [3, 4]. Модулярная инвариантность должна сохраняться; в противном случае могут возникнуть проблемы с гравитационными и калибровочными аномалиями в объемлющем пространстве, вследствие чего может быть нарушена унитарность.

2.1. Производящий функционал

В случае, если все вышеуказанные симметрии сохранены, можно должным образом определить фундаментальную величину в теории бозонной струны:

$$Z(G,B,\Phi,T) = \sum_{\mathcal{G}=0}^{\infty} Z_{\mathcal{G}} = \\ = \sum_{\mathcal{G}=0}^{\infty}\int [\mathcal{D}h_{ab}]_{\mathcal{G}} \prod_{\mu=0}^{d-1}\mathcal{D}\tilde x_\mu \exp\bigl\{-\mathrm{i}S_{\mathrm{st}}(\tilde x_\mu, h_{ab}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, T)\bigr\}\,. \quad (4)$$

Мера $\prod_{\mu=0}^{d-1}\mathcal{D}\tilde x_\mu$ в (4) такая же, как и для d-скаляров, а меру $[\mathcal{D}h_{ab}]_{\mathcal{G}}$ следует определить в соответствии с репараметризационной, конформной и модулярной инвариантностями [1].

В формуле (4) суммирование производится по родам $\mathcal{G}$ мировых поверхностей струн. Это есть разложение по струнным петлевым поправкам, которые присутствуют в дополнение к уже упоминавшимся квантовым поправкам в σ-модели. Если рассматривать только замкнутые струны, струнные петлевые поправки даются сферами, имеющими $\mathcal{G}$ ручек. В противном случае — это диски с дырками и ручками [2], полное число которых равняется $\mathcal{G}$.

В случае замкнутых бозонных струн действие, входящее в формулу (4), записывается в виде

$$S_{\mathrm{st}}(\tilde x_\mu, h_{ab}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, T) = \\ = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\sigma\,\bigl\{\sqrt{-h}\,h^{ab}G_{\mu\nu}(\tilde x)\,\partial_a\tilde x^\mu\,\partial_b\tilde x^\nu + \\ + \epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(\tilde x)\,\partial_a\tilde x^\mu\,\partial_b\tilde x^\nu + \alpha'\sqrt{-h}\,R^{(2)}\Phi(\tilde x) + \sqrt{-h}\,T(\tilde x)\bigr\}\,, \quad (5)$$

где ϵ^{ab} — полностью антисимметричный тензор в двух измерениях, а $R^{(2)}$ — двумерная скалярная кривизна, вычисленная для метрики h_{ab}.

Как видно из формулы (5), вакуумное среднее дилатона Φ_∞ определяет константу связи в струнном петлевом разложении:

$$Z_{\mathcal{G}} \propto \exp\left\{-\mathrm{i}\,\frac{\Phi_\infty}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sigma\,\sqrt{-h}\,R^{(2)}\right\} = \\ = \exp\bigl[\,2(\mathcal{G}-1)\Phi_\infty\bigr] = g_{\mathrm{s}}^{2(\mathcal{G}-1)}\,, \quad (6)$$

где индекс "s" (от англ. "string") отличает струнную константу связи от константы связи в теории ЯМ. Подставляя в (5) значения $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} = 0$, $\Phi = 0$ и $T = 1$, мы получаем для S_{st} выражение (2).

Физический смысл величины $Z(G,B,\Phi,T)$ состоит в том, что она является производящим функционалом для амплитуд взаимодействий между струнными состояниями с *наименьшей массой*. Действительно, эти амплитуды можно получить, варьируя функционал Z по источникам G, B, Φ и T. Нас интересуют только состояния с наименьшей массой, поскольку нам надо найти классический предел (поведение на больших расстояниях) теории струн. Именно в этом пределе можно использовать интуицию и то, что известно про наш мир. По этой причине мы не включили в функциональный интеграл (4) и соотношение (5) никаких других источников, которые соответствовали бы массивным состояниям.

2.2. Низкоэнергетический спектр

Почему операторы в (4) и (5) с источниками G, B, Φ и T соответствуют состояниям с наименьшей массой? Преж-

[2] Здесь уместно отметить, что теория открытых струн содержит замкнутые струны на петлевом уровне. Действительно, амплитуда проколотого диска (первая петлевая поправка в теории открытых струн) эквивалентна амплитуде цилиндра (соответствующей древесному уровню в теории замкнутых струн). Замкнутые струны необходимо добавить к открытым, чтобы сохранить унитарность.

де всего необходимо объяснить, каким образом двумерный оператор соответствует струнному состоянию. Действие оператора на вакуум конформной теории с $S_{\rm st}$ в форме (2) рождает возмущение. Если взять специальную гармонику источника (например, $T = :\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu\right]:$), с точки зрения объемлющего пространства она будет выглядеть как некоторая распространяющаяся струна в определенном квантовом состоянии. Это не что иное, как плоская волна в пространстве-времени.

Кроме того, для описания взаимодействия струнных состояний нет необходимости модифицировать функциональный интеграл (4). Это одно из главных отличий теории струн от теории поля, которое основывается на двух фундаментальных фактах. Во-первых, в отличие от траекторий частиц в случае любого несвязного набора одномерных многообразий всегда можно найти двумерную струнную мировую поверхность, для которой эти многообразия служат компонентами границы. Такая поверхность представляет собой фейнмановскую диаграмму для струнной амплитуды, а ее границы являются начальным и конечным состояниями некоторого процесса в теории струн. Во-вторых, благодаря конформной симметрии "внешние ноги" в струнной амплитуде всегда можно "ампутировать". Конкретнее, при помощи конформного преобразования можно втянуть внешние ноги, а каждую компоненту одномерной границы превратить в точку на мировой поверхности, в которой действует соответствующий вершинный оператор.

Покажем, почему операторы, о которых идет речь, отвечают возбуждениям с наименьшей массой. Для этого рассмотрим N-точечную корреляционную функцию [1]

$$\mathcal{A}_N = \int \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}^2\sigma_j \left\langle \mathcal{O}_1\big(\tilde{x}_\mu(\sigma_1)\big) \ldots \mathcal{O}_N\big(\tilde{x}_\mu(\sigma_N)\big)\right\rangle, \tag{7}$$

где усреднение $\langle\ldots\rangle$ производится при помощи функционального интеграла (4) с действием (2), $\mathcal{O}_j$ — некоторые операторы с конформными весами[3] $\Delta_j = 2$, так что интегралы от них по $\mathrm{d}^2\sigma_j$ конформно-инвариантны. Среди подходящих для этого операторов есть представленные в (5). Оператор

$$\mathcal{O}_G = G_{\mu\nu} :\partial_z \tilde{x}_\mu\, \partial_{\bar{z}} \tilde{x}_\nu: \tag{8}$$

имеет хорошо определенный конформный вес, если $G_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} :\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu\right]:$, причем $f_{\mu\nu}$ — некоторая поляризация с точки зрения объемлющего пространства.

В интеграле (7) имеется область, в которой $\sigma_1 \to \sigma_2$ и вблизи которой можно использовать операторное разложение

$$\lim_{\sigma_1\to\sigma_2} \left[\mathcal{O}_i\,(\sigma_1)\, \mathcal{O}_j\,(\sigma_2)\right] \approx \sum_k C_{ijk} |\sigma_1 - \sigma_2|^{\Delta_k - \Delta_j - \Delta_i} \mathcal{O}_k(\sigma_1)\,. \tag{9}$$

Здесь суммирование в правой части идет по базису локальных операторов в конформной теории поля на мировой поверхности. Используя операторное разложение (9), находим [1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_N = \int \mathrm{d}^2\eta \int \prod_{j=2}^{N} \mathrm{d}^2\sigma_j \left\langle \mathcal{O}_1(\sigma_2+\eta)\, \mathcal{O}_2(\sigma_2) \ldots \mathcal{O}_N\,(\sigma_N)\right\rangle \approx \\
\approx \sum_k C_{12k} \int^a \mathrm{d}^2\eta\, |\eta|^{\Delta_k - 4} \times \\
\times \int \prod_{j=2}^{N} \mathrm{d}^2\sigma_j \left\langle \mathcal{O}_k(\sigma_2)\, \mathcal{O}_3(\sigma_3) \ldots \mathcal{O}_N\,(\sigma_N)\right\rangle + \\
+ \text{менее сингулярные члены} \approx \sum_k \frac{1}{\Delta_k - 2}\, \mathcal{A}_3^{(k)} \mathcal{A}_{N-1}^{(k)} + \\
+ \text{менее сингулярные члены}\,,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\mathcal{A}_3^{(k)} \propto C_{12k} \propto \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_k \rangle$, а интегрирование по $|\eta|$ производится до масштаба a, меньшего всех остальных расстояний между σ_j.

Теперь примем во внимание, что оператор $T(\tilde{x}) = :\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu(\sigma)\right]:$ имеет конформный вес, равный $\alpha' p_\mu^2/2$. Этот вес можно найти, используя теорему Вика для двухточечной корреляционной функции оператора $T(\tilde{x})$ [1] и пропагатор для $\tilde{x}_\mu$, следующий из действия (2). Более того, для источника G, пропорционального $:\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu(\sigma)\right]:$, конформный вес оператора (8) равен $\alpha' p_\mu^2/2 + 2$. Другие операторы, входящие в (5), имеют такой же конформный вес при условии, что источники B и Φ пропорциональны $:\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu(\sigma)\right]:$. Аналогично, полагая источники, не входящие в (5), пропорциональными $:\exp\left[\mathrm{i}\, p_\mu\, \tilde{x}_\mu(\sigma)\right]:$, можно получить для соответствующих весов выражение $\alpha' p_\mu^2/2 + \delta_k$, где $\delta_k > 2$ из-за локальных операторов, которые стоят возле источников, как оператор $:\partial_z \tilde{x}_\mu\, \partial_{\bar{z}} \tilde{x}_\mu:$, стоящий после $G_{\mu\nu}$ в (8).

Таким образом, для любой области, в которой $\sigma_i \to \sigma_j$, правая часть (10) содержит сумму по всем пропагаторам струнных возбуждений, каждое из которых отвечает некоторому оператору $\mathcal{O}_k$:

$$\mathcal{A}_N = \sum_k \frac{\mathcal{A}_3^{(k)} \mathcal{A}_{N-1}^{(k)}}{p_\mu^2 + 2(\delta_k - 2)/\alpha'}\,. \tag{11}$$

В результате, имеется связь между конформными весами операторов $\mathcal{O}_k$ и массами соответствующих струнных состояний $m_k^2 = 2(\delta_k - 2)/\alpha'$. Наше обсуждение показывает, что поле T описывает тахионное состояние с $m_T^2 = -p_\mu^2 = -4/\alpha'$, поскольку $\delta_T = 0$. В то же время источники G, B и Φ описывают безмассовые состояния ($\delta_{G,B,\Phi} = 2$), тогда как остальные источники — массивные состояния ($\delta_k > 2$).

2.3. Связь между гравитацией и теорией струн

Имея в виду приведенные выше рассуждения, можно рассмотреть теорию струн на расстояниях, много больших $\sqrt{\alpha'}$ (расстояния определяются функциями G, B, Φ и T). В этом случае отдельные кванты (8) можно заменить гладкими полями, как в случае перехода от фотонов к электромагнитным волнам, причем массивные струнные возбуждения отщепляются. Это означает, что на масштабах энергий, о которых идет речь, мы должны получить теорию поля, а не теорию струн. В самом деле, свободная струна эквивалентна бесконечному числу частиц: пропагатор струны является бесконечной суммой пропагаторов частиц (11). Следовательно, если пренебречь массивными частицами, сумма (11) сведется

[3] Конформный вес Δ_j оператора $\mathcal{O}_j$ определяется следующим образом: $\mathcal{O}_j(\sigma_j) = \lambda^{-\Delta_j} \mathcal{O}_j(\lambda\sigma_j)$.

к конечной сумме по возбуждениям с наименьшими массами.

Таким образом, на масштабах, много бóльших $\sqrt{\alpha'}$, при $d = 26$ находим [17]

$$Z(G, B, \Phi, T) = \frac{1}{16\pi\Gamma_{\mathrm{N}}} \int \mathrm{d}^{26}x \sqrt{-G}\, \exp[-2\Phi] \times \\ \times \left[\mathcal{R} + 4G^{\mu\nu}\, \partial_\mu \Phi\, \partial_\nu \Phi - \frac{1}{12} H^2_{\mu\nu\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} G^{\mu\nu}\, \partial_\mu T \partial_\nu T + \frac{1}{2} m_T^2 T^2 \right] + O(\alpha', \Gamma_{\mathrm{N}})\,. \qquad (12)$$

Это функционал действия 26-мерной гравитации, поле которой взаимодействует с дилатоном Φ и антисимметричным тензорным полем $H_{\mu\nu\lambda} \propto \partial_{[\mu} B_{\nu\lambda]}$. В соотношении (12) $\Gamma_{\mathrm{N}} \propto g_{\mathrm{s}}^2 \alpha'^{12}$ — 26-мерная постоянная Ньютона, $O(\alpha', \Gamma_{\mathrm{N}})$ схематично обозначает поправки в двумерной σ-модели и струнные петлевые поправки. Если угодно, такие поправки возникают из-за массивных струнных мод.

Из уравнения (12) следует, что в пределе $\alpha' \to 0$ (в единицах характерного масштаба длин, определяемого функциями G, B, Φ и T) функционал Z дает те же фейнмановские вершины и пропагаторы, что и главный вклад в правой части (12). К сожалению, этот факт удается явно установить только для простейших фоновых полей G, B, Φ и T, таких как плоская метрика и постоянные поля B и Φ. Проблемы возникают из-за того, что не разработаны методы квантования нелинейной σ-модели (5) для источников G, B, Φ и T общего вида. Лучшее, что удалось установить на данный момент, — это то, что вакуумы в левой и правой частях соотношения (12) совпадают. Действительно, конформная инвариантность σ-модели (5) накладывает условия на источники [1, 3]: необходимо зануление β-функций для источников G, B, Φ и T. Эти условия являются уравнениями движения для действия (12).

Есть способ интуитивно понять, почему мы должны получить действие вида (12) из теории струн. Действие (5) инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований полей G и B:

$$G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu} + \partial_{(\mu}\xi_{\nu)}\,, \qquad B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\rho_{\nu]}\,, \qquad (13)$$

первое из которых есть не что иное, как общековариантное преобразование поля гравитона. Инвариантность относительно преобразований (13) необходимо (но не достаточно) сохранить, чтобы обеспечить унитарность теории. Поэтому наша задача — найти эффективное действие на больших расстояниях для источников в функционале Z, которое было бы инвариантно относительно вышеуказанных преобразований. Легко видеть, что правая часть формулы (12) — единственно возможное низкоэнергетическое действие, которое удовлетворяет этим условиям и содержит простейшие члены, описывающие взаимодействие с дилатоном Φ. Причина, по которой "$Z = S$(источники)", а не "$Z = \exp[-\mathrm{i}S(\text{источники})]$" состоит в том, что мы имеем дело с *первично-квантованной* теорией струн.

2.4. Теория открытых бозонных струн

Теперь рассмотрим теорию открытых бозонных струн. Для обеспечения пуанкаре-инвариантности в объемлющем пространстве наивно (см. раздел 4) можно использовать только граничные условия Неймана для координат $\tilde{x}_\mu$ открытых струн.

Как уже отмечалось, теория открытых струн включает в себя теорию замкнутых струн на петлевом уровне. Следовательно, производящий функционал теории открытых струн содержит те же самые источники, что и (4), а также источники своих возбуждений. Более того, концам открытых струн можно приписать квантовые (чан-патоновские) числа (индексы), принимающие значения в фундаментальном представлении калибровочной группы.

Таким образом, следуя приведенным рассуждениям, можно показать, что безмассовые вершинные операторы в теории открытых струн должны быть упорядоченными вдоль траектории вильсоновскими экспонентами [4]

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{P}\,\exp\left\{ \mathrm{i} \int_{\text{граница}} \mathrm{d}\tau\, \hat{a}_\mu(\tilde{x})\, \partial_{\mathrm{t}} \tilde{x}_\mu \right\}, \qquad (14)$$

где ∂_{t} обозначает касательную производную к границе мировой поверхности, а τ — некоторая ее параметризация. Присутствие оператора (14) в (4) означает, что концы струны заряжены по отношению к калибровочному полю $\hat{a}_\mu$, принимающему значения в присоединенном представлении калибровочной группы. В самом деле, уравнение (14) инвариантно относительно калибровочных преобразований $\hat{a}_\mu \to \hat{a}_\mu + \partial_\mu \hat{\lambda} + \mathrm{i}[\hat{a}_\mu, \hat{\lambda}]$.

Аналогично теории замкнутых бозонных струн производящий функционал в теории открытых струн на больших расстояниях эквивалентен функционалу действия 26-мерной гравитации (12), поля которой взаимодействуют, помимо всего прочего, с калибровочными полями $\hat{a}_\mu$.

2.5. Об объединении теорий гравитации и Янга – Миллса

Обсудим кратко возможную связь теории струн с квантованием теории гравитации Эйнштейна и объединение гравитационного и калибровочного взаимодействий. Правая часть формулы (12) записана в так называемой струнной метрике. От этой метрики можно перейти к стандартной эйнштейновской метрике, если произвести перескалирование $G_{\mathrm{E}} = G \exp[-4\Phi]$. Следовательно, 26-мерное действие Эйнштейна – Гильберта появляется в *квантовой* теории струн как часть низкоэнергетического, или классического, приближения. Более того, и калибровочная теория, и теория гравитации могут быть описаны единым образом как приближения к теории струн.

Четырехмерную теорию можно получить при помощи так называемой компактификации [3, 4]. Для этого надо рассмотреть 26-мерный мир как произведение некомпактного четырехмерного пространства на очень малое 22-мерное. Оба пространства, о которых идет речь, должны быть решениями уравнений движения, вытекающих из (12).

Все это выглядит довольно заманчиво. Однако теория замкнутых бозонных струн содержит тахионное возбуждение T с $m_T^2 = -4/\alpha'$. Это патологическое возбуждение, поскольку его присутствие означает, что во время квантования был выбран нестабильный вакуум.

[4] Заметим, что в открытых струнах имеется еще одно тахионное поле, которое мы здесь не рассматриваем.

Действительно, тахион — отрицательная мода среди возбуждений над вакуумом. Кроме того, старшие члены для самодействия тахиона в теории замкнутых бозонных струн, похоже, не приводят к стабилизации вакуума. Таким образом, нам неизвестен ни правильный вакуум, ни даже факт его существования в теории замкнутых бозонных струн.

3. Теория суперструн типа II

Для получения самосогласованной теории струн следует рассмотреть суперсимметричные обобщения теорий бозонных струн [3, 12]. Существует несколько типов безаномальных теорий суперструн. Ниже мы обсудим только замкнутые струны типа II в формализме Навье – Шварца – Рамона (НШР). В этом случае суперсимметрия вводится в теорию бозонных струн при помощи антикоммутирующих (фермионных) полей ψ_μ, которые являются суперпартнерами полей $\tilde{x}_\mu$ на мировой поверхности. В принципе, следует также учесть гравитон h_{ab} на мировой поверхности с его суперпартнером, однако, как и в случае бозонной струны, благодаря фиксации симметрий в теории суперструн можно избавиться от этих полей.

Таким образом, в качестве отправной точки мы имеем двумерную $\mathcal{N}=1$ супергравитацию, поля которой взаимодействуют с конформно-инвариантной материей, описываемой полями $\tilde{x}$ и ψ [1, 3, 4]. Это суперсимметричное расширение теории с действием (2). Благодаря присутствию конформной симметрии суперсимметричная репараметризационная инвариантность действия повышается до суперконформной симметрии. Как мы увидим ниже, для получения суперсимметрии в объемлющем пространстве необходимо проделать некоторые дополнительные манипуляции с теорией.

Рассмотрим гамильтоново квантование теорий суперструн типа II [3], которое более подходит для наших целей, чем подход функционального интеграла [1]. Свободные суперструны описываются действием

$$S_{\text{sst}} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2 z\,(\partial_z x^\mu\,\partial_{\bar z} x_\mu + \psi^\mu\,\partial_{\bar z}\psi_\mu + \text{c.c.}) + \\ + \text{духи Фаддеева – Попова}\,, \\ z = \exp\left[\sigma_1 + \mathrm{i}\sigma_2\right]. \tag{15}$$

При помощи суперсимметричной репараметризации и суперконформной симметрии мы избавились в формуле (15) от поля гравитона h_{ab} на мировой поверхности и его суперпартнера.

В теории с действием (15) мы должны наложить на поля $\tilde{x}_\mu$ стандартные периодические граничные условия $\tilde{x}_\mu(\sigma_1,\sigma_2+2\pi) = \tilde{x}_\mu(\sigma_1,\sigma_2)$. При этом для сохранения модулярной инвариантности квантовая теория суперструн должна содержать секторы с двумя типами возможных граничных условий для фермионов на мировой поверхности [1, 3, 4], т.е. граничные условия Рамона

$$\psi_\mu(\sigma_2+2\pi) = \psi_\mu(\sigma_2) \quad (\text{Р})\,, \tag{16}$$

и граничные условия Навье – Шварца

$$\psi_\mu(\sigma_2+2\pi) = -\psi_\mu(\sigma_2) \quad (\text{НШ})\,. \tag{17}$$

Для полей $\bar\psi_\mu$ имеются аналогичные условия.

Следовательно, существуют два типа разложений на моды для решений свободного двумерного уравнения Дирака $\partial_{\bar z}\psi_\mu = 0$:

$$\psi^\mu(z) = \psi_0^\mu + \sum_n \frac{b_n^\mu}{z^n} \quad (\text{Р})\,, \\ \psi^\mu(z) = \sum_n \frac{c_{n+1/2}^\mu}{z^{n+1/2}} \quad (\text{НШ})\,, \tag{18}$$

а также для $\bar\psi(\bar z)$. Именно благодаря конформной инвариантности с левым (z) и правым ($\bar z$) секторами можно обращаться независимо: в конформной теории поля они не взаимодействуют друг с другом.

Мы опустили разложение по модам для $\tilde{x}_\mu$, поскольку в теории суперструн соответствующие операторы рождения не приводят к безмассовым возбуждениям.

3.1. Квантование и безмассовый спектр

Для квантования суперструнной теории с действием (15) следует наложить стандартные коммутационные (антикоммутационные) соотношения на бозонные (фермионные) поля. Тогда моды b_n и $c_{n+1/2}$ с положительными и отрицательными значениями n станут операторами уничтожения и рождения соответственно. В то же время нулевые моды ψ_0^μ образуют алгебру γ-матриц Дирака:

$$\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\,, \tag{19}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ — метрика Минковского.

Состояния суперструн построены посредством умножения состояний из левого сектора на состояния соответствующего уровня из правого сектора. Поскольку граничные условия в левом и правом секторах можно выбрать независимо, имеются четыре типа состояний:

$$\begin{array}{ll} \text{НШ} - \widetilde{\text{НШ}}\,, & \text{НШ} - \tilde{\text{Р}}\,, \\ \text{Р} - \widetilde{\text{НШ}}\,, & \text{Р} - \tilde{\text{Р}}\,. \end{array} \tag{20}$$

Чтобы найти безмассовые возбуждения в этой теории, необходимо использовать двумерный тензор энергии-импульса для левого сектора

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{22} - 2\mathrm{i}\mathcal{T}_{12} = -\frac{1}{2}(\partial_z\tilde{x}_\mu)^2 + \frac{1}{2}\,\psi_\mu\,\partial_z\psi_\mu\,. \tag{21}$$

Тензор энергии-импульса для правого сектора $\bar{\mathcal{T}}(\bar z)$ получается из $\mathcal{T}(z)$ комплексным сопряжением. Сохраняющиеся гамильтонианы в левом и правом секторах имеют вид

$$L_0 = \int \mathrm{d}z\,\mathcal{T}(z)\,, \qquad \bar L_0 = \int \mathrm{d}\bar z\,\bar{\mathcal{T}}(\bar z)\,.$$

Следовательно, полный гамильтониан

$$H = L_0 + \bar L_0 + \text{const}\,,$$

где константа определяется нормальным упорядочиванием и имеет разные значения в секторах Р и НШ [3, 4]. Состояния с наинизшей энергией для такого гамильтониана имеют вид

масса	НШ	Р
$m^2 = -2/\alpha'$	$\lvert 0\rangle$	–
$m^2 = 0$	$c_{-1/2}^\mu\lvert 0\rangle$	$\lvert 0\rangle,\ \psi_0^\mu\lvert 0\rangle,\ \psi_0^\mu\psi_0^\nu\lvert 0\rangle, \ldots$

(22)

Аналогично можно представить состояния в секторах $\widetilde{\text{НШ}}$ и $\tilde{\text{Р}}$. Вакуум $|0\rangle$ в Р-секторе определен ниже, а в НШ-секторе — это обычный вакуум для фермионов.

Более того, для сохранения модулярной инвариантности необходимо взять проекцию левого и правого секторов на собственное состояние оператора $(-1)^f$ [1, 3, 4], собственные значения которого определяют фермионное число на мировой поверхности в теории суперструн, т.е. оператор $(-1)^f$ антикоммутирует со всеми фермионными операторами рождения и уничтожения. Проецирование означает, что в качестве статистической суммы в теории суперструн следует взять

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{\left[(-1)^f \pm 1\right]\exp(-H)\right\}$$

со знаком плюс или минус, а не просто

$$Z = \mathrm{Tr}\left[\exp(-H)\right].$$

Это так называемая ГСО-проекция [3, 1].

Если включить только состояния, удовлетворяющие

$$\left[(-1)^f + 1\right]|\text{состояние}\rangle = 0\,,$$

то тахионное состояние $|0\rangle$ в НШ-секторе отщепляется от остального спектра, а состояние $c^{\mu}_{-1/2}|0\rangle$ выживает [5]. Таким образом, в секторе НШ – $\widetilde{\text{НШ}}$ мы имеем безмассовое состояние $c^{\mu}_{-1/2}\bar{c}^{\nu}_{-1/2}|0,\bar{0}\rangle$, симметричная, антисимметричная и следовая части которого связаны с возбуждениями полей $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ и Φ соответственно.

Теперь обсудим, что происходит в Р-секторе (рассмотрение $\tilde{\text{Р}}$-сектора аналогично) [4]. Изменим базис нулевых мод ψ^{μ}_0 в соответствии с соотношениями

$$d^{\pm}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1_0 \mp \mathrm{i}\psi^0_0), \quad d^{\pm}_i = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}(\psi^{2i}_0 \pm \psi^{2i+1}_0), \quad i = 1,\ldots,4\,. \tag{23}$$

Тогда из (19) находим

$$\{d^+_I, d^-_J\} = \delta_{IJ}\,, \qquad I,J = 0,\ldots,4\,. \tag{24}$$

Операторы $d^{\pm}_I$ образуют $2^5 = 32$ рамоновских основных состояния $|s\rangle = |\pm 1/2,\ldots,\pm 1/2\rangle$:

$$\begin{aligned} &d^{\pm}_I\left|\pm\frac{1}{2},\ldots,\pm\frac{1}{2}\right\rangle = 0\,,\\ &d^{+}_I\left|-\frac{1}{2},\ldots,s_I = -\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}\right\rangle = \\ &\qquad = \left|-\frac{1}{2},\ldots,s_I = +\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \tag{25}$$

Можно проверить, что после фиксации суперсимметричной репараметризационной инвариантности на физические состояния в теории суперструн налагаются условия Вирасоро [3, 4], которые появляются как обычные связи в подходе Дирака к гамильтонову квантованию и выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\,|\text{состояние}\rangle = 0\,, \qquad & \bar{\mathcal{T}}\,|\text{состояние}\rangle = 0\,,\\ \partial_z\tilde{x}_\mu\,\psi_\mu\,|\text{состояние}\rangle = 0\,, \quad & \partial_{\bar{z}}\tilde{x}_\mu\,\bar{\psi}_\mu\,|\text{состояние}\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Это есть не что иное, как условия суперконформной инвариантности теории суперструн. Чтобы сократить соответствующую аномалию, необходимо положить в этом случае $d = 10$, а не $d = 26$, как в теории бозонных струн.

Из первого условия во второй строке (26) следует, что $p_\mu\,\psi^{\mu}_0\,|\text{состояние}\rangle = 0$. В то же время в системе отсчета, в которой $p^\mu = (p^0, p^0, 0,\ldots,0)$, мы имеем $p_\mu\psi^{\mu}_0 = \sqrt{2}\,p^0 d^+_0$. Следовательно, $s_0 = +1/2$, и это условие оставляет нам только $s_i = \pm 1/2$ $(i = 1,\ldots,4)$, т.е. 16 физических вакуумов. Они обозначаются как 8_{s} с четным числом $(-1/2)$ и 8_{c} с нечетным числом $(-1/2)$ [3]. Состояния 8_{s} и 8_{c} образуют спинорные представления десятимерной группы Лоренца различной киральности [3, 4]. На самом деле нулевые моды ψ^0_μ генерируют алгебру десятимерных матриц Дирака (19), причем состояния 8_{c} и 8_{s} — два ее неприводимых представления.

ГСО-проекция оставляет одно из состояний: 8_{c} или 8_{s}. Учитывая, что существуют две возможности для вакуума:

$$(-1)^f\left|-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\left|-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{27}$$

мы заключаем, что могут быть два типа теорий. Если для вакуума в Р- и $\tilde{\text{Р}}$-секторах выбрать противоположные знаки, мы получим некиральную теорию типа IIA; при одинаковых знаках мы имеем киральную теорию типа IIB.

Итак, в Р- и $\tilde{\text{Р}}$-секторах состояния с наинизшей энергией (25) имеют фермионные квантовые числа в объемлющем пространстве: десятимерные фермионы либо одной $\left(|\beta\rangle\right)$, либо другой $\left(|\dot{\beta}\rangle\right)$ киральности в зависимости от выбора знака в (27). Схематически это означает, что в Р – $\tilde{\text{Р}}$-секторе существуют состояния

$$\begin{aligned} &\left(\gamma^{[\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{n+1}]}\right)_{\lambda\dot{\beta}}|\lambda\dot{\beta}\rangle \quad (\text{IIA})\,,\\ &\left(\gamma^{[\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{n+1}]}\right)_{\lambda\beta}|\lambda\beta\rangle \quad (\text{IIB})\,, \end{aligned} \tag{28}$$

где γ_μ — десятимерные матрицы Дирака в вейль-майорановском представлении. Состояния (28) соответствуют бозонным тензорным полям $A_{\mu_1\ldots\mu_n}$ с напряженностями $F_{\mu_1\ldots\mu_{n+1}} = \partial_{[\mu_{n+1}}A_{\mu_1\ldots\mu_n]}$. Теперь видно, что благодаря свойствам киральности состояний с наименьшей энергией в теории типа IIA поля A имеют *только нечетный* ранг, тогда как в теории типа IIB поля A имеют *только четный* ранг.

Теории струн типа II инвариантны относительно *двух* преобразований суперсимметрии в объемлющем пространстве (Q и $\tilde{Q}$), отвечающих левому и правому секторам на мировой поверхности [3, 4]. По этой причине они называются теориями суперструн типа II.

3.2. Суперструны типа IIB на больших расстояниях

Рассмотрим теорию суперструн типа IIB и ее низкоэнергетические бозонные возбуждения (обсуждение теории суперструн типа IIA аналогично). Кроме обычных НШ – $\widetilde{\text{НШ}}$-полей G, B и Φ, теория суперструн типа IIB содержит Р – $\tilde{\text{Р}}$-поля: скаляр A, тензорные потенциалы

[5] Именно этот тип ГСО-проекции после учета левого и правого секторов приводит к появлению суперсимметрии в объемлющем пространстве. В результате проецирования недиагональные элементы в (20) превращаются в пространственно-временны́х суперпартнеров диагональных элементов [3, 4].

$A_{\mu\nu}$ (два-форму), $A_{\mu\nu\alpha\beta}$ (четыре-форму), а также дуальные к ним. На самом деле для полей, входящих в формулы (22) – (28), по построению имеются различные соотношения дуальности:

$$\begin{aligned} F_{\mu_1\ldots\mu_9} &= \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}\,\partial_{\mu_{10}}A\,,\\ F_{\mu_1\ldots\mu_7} &= \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}\,F^{\mu_8\,\mu_9\,\mu_{10}}\,,\\ F_{\mu_1\ldots\mu_5} &= \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}\,F^{\mu_6\ldots\mu_{10}}\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь $\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}$ — полностью антисимметричный тензор в десяти измерениях.

Аналогично теории бозонных струн суперструны на больших расстояниях содержат пространственно-временну́ю супергравитацию. Вычисление производящего функционала в случае суперструн возможно только для $d = 10$, когда сокращается суперконформная аномалия. Поэтому бозонная часть низкоэнергетического действия десятимерной супергравитации типа IIB имеет вид [3, 4]

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{IIB}} = {} & \frac{1}{16\pi\Gamma_{\mathrm{N}}}\int \mathrm{d}^{10}x\,\times\\ & \times\sqrt{-G}\,\Bigg\{\exp\left[-2\Phi\right]\Bigg[\mathcal{R} + 4G^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi - \frac{1}{12}\,H^2_{\mu\nu\gamma}\Bigg] +\\ & + \frac{1}{2}\Bigg[G^{\mu\nu}\,\partial_\mu A\,\partial_\nu A + \tilde{F}^2_{\mu\nu\gamma} + \frac{1}{2}\,\tilde{F}^2_{\mu_1\ldots\mu_5} +\\ & + \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}\,A_{\mu_1\ldots\mu_4}H_{\mu_5\,\mu_6\,\mu_7}F_{\mu_8\,\mu_9\,\mu_{10}}\Bigg]\Bigg\} +\\ & + \text{фермионы} + O(\alpha',\Gamma_{\mathrm{N}})\,, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu\gamma} &= F_{\mu\nu\gamma} - AH_{\mu\nu\gamma}\,,\\ \tilde{F}_{\mu_1\ldots\mu_5} &= F_{\mu_1\ldots\mu_5} - \frac{1}{2}\,A_{[\mu_1\,\mu_2}H_{\mu_3\,\mu_4\,\mu_5]} + \frac{1}{2}\,B_{[\mu_1\,\mu_2}F_{\mu_3\,\mu_4\,\mu_5]}\,. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma_{\mathrm{N}} = 8\pi^6 g_{\mathrm{s}}^2\alpha'^4$ — десятимерная постоянная Ньютона. Кроме того, в соответствии с третьей формулой из (29) на четыре-форму $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ в действии (30) надо наложить условие самодуальности. Существуют также различные дуальные версии супергравитации типа IIB, которые выражаются при помощи дуальных тензорных полей из (29).

Таким образом, мы видим, что теории суперструн самосогласованны и на больших расстояниях (в классическом пределе) приводят к теориям супергравитации.

4. D-браны и солитоны в теории супергравитации

В теории супергравитации существует много различных солитонов [4, 19]. В десяти измерениях солитоны могут быть частицеподобными черными дырами или бранами различного типа (мембранами и т.д.), которые являются многомерными аналогами четырехмерных черных дыр. Сингулярности солитонов лежат на многомерных подмногообразиях десятимерного пространства-времени и окружены многомерными горизонтами событий. Солитоны могут быть нейтральными или заряженными по отношению к некоторым калибровочным тензорным полям (например, к полю $B_{\mu\nu}$ или $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$-полям, обсуждавшимся в предыдущем разделе), так же как частицеподобные черные дыры могут быть заряжены по отношению к калибровочным *векторным* полям: место расположения солитонного решения можно окружить многомерной сферой и затем найти поток соответствующего тензорного поля.

Имея в виду, что теория струн квантует теорию гравитации, можно спросить, что является квантовым аналогом солитонов? Кроме академического интереса, ответ на этот вопрос может выявить некоторые термодинамические свойства черных дыр [4, 18]. Кроме того, как мы покажем ниже, он связывает суперсимметричную теорию ЯМ с теорией супергравитации.

Проблема состоит в том, что для перехода от теории гравитации на больших расстояниях к микроскопической теории струн необходимо изменять параметр α' (измеренный по отношению к характерному масштабу длин) и константу связи g_{s} в теории струн. Оказывается, что в процессе изменения параметров при наличии фоновых полей поправки $O(\alpha',\Gamma_{\mathrm{N}})$ в (30) могут стать более значительными, чем лидирующий вклад на больших расстояниях. Как отмечалось во введении, эти поправки могут даже полностью изменить вид фона. Во-первых, изменение параметров разрушает горизонт событий, который является глобальной низкоэнергетической характеристикой [4, 6]. Геометрически это проявляется, когда размер горизонта событий солитона становится меньше струнного масштаба длин. Во-вторых, изменение параметров может привести к неконтролируемой перенормировке натяжения солитона или даже к изменению фундаментальных степеней свободы теории, поскольку у нас нет полного знания динамики теории струн.

Тем не менее при наличии суперсимметрии можно контролировать перенормировку низкоэнергетического действия. Более того, в суперсимметричных теориях существуют так называемые БПС-солитоны, перенормировку массы и заряда которых тоже можно контролировать [11]. БПС-солитоны инвариантны по меньшей мере относительно некоторой части преобразований суперсимметрии. Заметим, что произвольные возбуждения не сохраняют никакой симметрии, тогда как сохранение суперсимметрии налагает сильные ограничения на возможную динамику [12].

Среди всех БПС-солитонов в теории струн квантовые аналоги известны только для солитонов, заряженных по отношению к тензорным $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$-полям, поскольку только для этого случая имеется хорошее описание в терминах двумерной конформной теории поля. Хотя исторически первыми были открыты супергравитационные $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$-солитоны БПС [19] и только после этого их квантовые D-бранные аналоги [9], мы рассмотрим вначале D-браны, а затем обсудим их связь с супергравитационными солитонами и суперсимметричной теорией ЯМ.

4.1. Определение D-бран

Возможно ли рассмотрение секторов открытых струн в теориях замкнутых суперструн типа II? Оказывается возможно. Для того чтобы избежать аномалий [4], надо наложить граничные условия Неймана и Дирихле на координаты открытых струн в этих секторах [9]:

$$\begin{aligned} &\partial_{\mathrm{n}}x_m = 0\,, \quad \psi_m = \pm\bar{\psi}_m\,, \quad m = 0,\ldots,p \qquad (\text{Н})\,,\\ &x_i = C_i\,, \qquad \psi_i = \mp\bar{\psi}_i\,, \qquad i = p+1,\ldots,9 \quad (\text{Д})\,, \end{aligned} \tag{31}$$

где C_i — некоторые фиксированные числа, а ∂_{n} — нормальная производная к границе мировой поверхности.

С граничными условиями (31) концы свободных струн могут свободно двигаться только вдоль направлений, отмеченных индексом "m". По сути они прикреплены к $(p+1)$-мерным подмногообразиям, расположенным при $x_i = C_i$ в десятимерном пространстве-времени. Эти подмногообразия, полностью заполняющие $(p+1)$-направление, называются Dp-бранами. Вместе с тем в объеме пространства-времени существует обычная теория замкнутых струн типа II.

Dp-браны имеют несколько свойств, важных для дальнейшего обсуждения. Во-первых, они нарушают пуанкаре-инвариантность пространства-времени:

$$\mathrm{P}(10) \to \mathrm{P}(1+p) \times \mathrm{SO}(9-p)\,.$$

Поэтому для сохранения P(10)-симметрии необходимо рассматривать Dp-браны как динамические возбуждения в теории суперструн. Во-вторых, чтобы сохранить суперсимметрию, надо брать значения $p = 0, 2, 4, 6, 8$ для теории типа IIA и значения $p = -1, 1, 3, 5, 7$ для теории типа IIB [6] [4] (см. ниже). В-третьих, из-за граничных условий (31) Dp-браны не могут быть инвариантны больше, чем относительно половины преобразований суперсимметрии теорий струн типа II. Действительно, два преобразования суперсимметрии Q и $\tilde{Q}$ теперь связаны друг с другом: из-за граничных условий на струнной мировой поверхности левые и правые секторы больше не являются независимыми.

Взаимодействия Dp-бран с низшими модами замкнутых струн описываются так [9]:

$$\begin{aligned} &Z(G, B, \Phi, \{A\}, a, \phi, \text{фермионы}) = \\ &\quad = \sum_{\mathcal{G}=0}^{\infty} \int [\mathcal{D}h_{ab}]_{\mathcal{G}}\, \mathcal{D}\tilde{x}_\mu\, \mathcal{D}(\text{фермионы}) \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\mathrm{i}S_{\mathrm{Dst}}(\tilde{x}_\mu, h_{ab}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, \{A\}, a, \phi, \text{фермионы})\right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &S_{\mathrm{Dst}}(\tilde{x}_\mu, h_{ab}, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi, \{A\}, a, \phi, \text{фермионы}) = \\ &\quad = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathrm{d}^2\sigma \left\{ \sqrt{-h}\, h^{ab} G_{\mu\nu}(\tilde{x})\, \partial_a \tilde{x}^\mu\, \partial_b \tilde{x}^\nu + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(\tilde{x})\, \partial_a \tilde{x}^\mu\, \partial_b \tilde{x}^\nu + \alpha' \sqrt{-h}\, R^{(2)} \Phi(\tilde{x}) \right\} + \\ &\quad + \mathrm{P} - \tilde{\mathrm{P}}\text{-поля} + \int \mathrm{d}\tau\, a_m(\tilde{x}_m)\, \partial_{\mathrm{t}} \tilde{x}_m + \\ &\quad + \int \mathrm{d}\tau\, \phi_i(\tilde{x}_m)\, \partial_{\mathrm{n}} \tilde{x}_i + \text{фермионы}\,. \end{aligned}$$

Здесь τ — некоторая параметризация границы. Как обычно, замкнутые струны появляются на петлевом уровне с точки зрения теории открытых струн. В функциональном интеграле (32) мы использовали калибровку светового конуса $\phi_m(\tilde{x}) = \tilde{x}_m$, где функции $\phi_\mu = (\phi_m, \phi_i)$ описывают вложение Dp-браны в объемлющее пространство.

Поясним смысл функционального интеграла (32). Если положить $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} = 0$, $\Phi = 0$ и все $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$-поля с фермионами равными нулю, то (32) будет описывать временну́ю эволюцию квантового состояния в двумерной конформной теории поля. В самом деле, рассмотрим некоторый временной разрез в объемлющем пространстве. Зафиксируем некоторые начальные условия, а также граничные условия (31), затем проинтегрируем (32) по всем полям теории с этими начальными и граничными условиями. По определению это и есть квантовое состояние.

В случае, когда все фоновые поля нетривиальны, функциональный интеграл (32) описывает взаимодействие квантового состояния с супергравитационными полями. Более того, как показано ниже, на больших расстояниях функциональный интеграл (32) описывает взаимодействия супергравитационного солитона (классического предела квантового состояния, о котором идет речь) с полями супергравитации.

Следуя [10], выясним происхождение источников a_m и ϕ_i в (32). Как уже отмечалось, теория струн должна быть инвариантна относительно преобразований (13). Однако когда мировая поверхность струны имеет границу, после таких преобразований появляются граничные члены. Для сокращения вклада от первого преобразования (13) граница струны должна взаимодействовать с полем ϕ_i, которое преобразуется как $\phi_i \to \phi_i - \xi_i/\alpha'$. При этом граничный член, появляющийся вдоль Dp-браны, обращается в нуль, поскольку вдоль Dp-браны пуанкаре-инвариантность не нарушена.

Таким образом, поля ϕ_i появляются как то, что было бы чисто калибровочными степенями свободы, если бы не нарушалась пуанкаре-инвариантность. Из приведенных рассуждений понятен физический смысл полей ϕ_i. Эти поля представляют собой поперечные колебания Dp-бран относительно их положения, заданного координатами C_i. Другими словами, координаты C_i являются просто вакуумными средними полей ϕ_i: $\phi_i + C_i \to \phi_i$.

Аналогично, для обеспечения инвариантности относительно второго преобразования (13) границы струн должны быть заряжены относительно абелева калибровочного поля a_m. В этом случае граничный член, появляющийся после второго преобразования (13), компенсируется сдвигом $a_m \to a_m - \rho_m/\alpha'$, который отличается от обычного калибровочного преобразования $a_m + \partial_m \lambda$ поля a_m. Физический смысл поля a_m состоит в том, что оно описывает продольные колебания Dp-бран.

4.2. D-браны при низких энергиях

При энергиях, много меньших $1/\sqrt{\alpha'}$, функциональный интеграл (32) приобретает вид [20]

$$\begin{aligned} &Z(G, B, \Phi, \{A\}, a, \phi, \text{фермионы}) = \\ &\quad = S_{\mathrm{II}}(G, B, \Phi, \{A\}, \text{фермионы}) + \\ &\quad + m_p \int \mathrm{d}^{p+1}x\, \exp[-\Phi] \sqrt{-\det(g_{mn} + b_{mn} + 2\pi\alpha' f_{mn})} + \\ &\quad + Q_p \int \mathrm{d}^{p+1}x\, \epsilon_{0\ldots p}\, A_{0\ldots p} + \text{фермионы} + O(\alpha', \Gamma_{\mathrm{N}})\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\epsilon_{0\ldots p}$ обозначает $(0\ldots p)$-компоненту $(p+1)$-мерного, полностью антисимметричного тензора, а

$$\begin{aligned} &f_{mn} = \partial_{[m} a_{n]}\,, \quad g_{mn} = G_{ij}\, \partial_m \phi_i\, \partial_n \phi_j + G_{i(m} \partial_{n)} \phi_j + G_{mn}\,, \\ &b_{mn} = B_{ij}\, \partial_m \phi_i\, \partial_n \phi_j + B_{i[m} \partial_{n]} \phi_j + B_{mn} \end{aligned} \tag{34}$$

[6] Случай $p = -1$ соответствует так называемому D-инстантону, т.е. D-бране, мировой объем которой есть просто точка в десятимерном евклидовом пространстве-времени. D-инстантон описывается открытыми струнами с граничными условиями Дирихле во всех десяти измерениях.

— напряженность поля a_m, индуцированные метрика и B-поле в мировом объеме Dp-браны соответственно. Заметим, что в уравнении (33) мы сохранили все степени f_{mn} и пренебрегли всеми ее производными.

Первый член в (33) — десятимерное действие супергравитации типа II: $S_{\rm II} \propto \int {\rm d}^{10}x \ldots$ В случае теории струн типа IIB действие $S_{\rm II}$ дается лидирующим вкладом в (30). Второй член в (33) — так называемое действие Дирака – Борна – Инфельда (ДБИ) для нелинейной $(p+1)$-мерной электродинамики, которое пропорционально $\int {\rm d}^{p+1}x \ldots$ Коэффициент m_p перед интегралом второго члена в (33) равен массе единицы объема Dp-браны. Можно показать [4], что

$$m_p = \frac{\pi}{g_{\rm s}} (4\pi^2\alpha')^{-(p+1)/2} .$$

Наличие третьего члена в (33) говорит о том, что Dp-браны являются источниками тензорных P – $\tilde{\rm P}$-полей A. Другими словами, Dp-браны заряжены по отношению к P – $\tilde{\rm P}$-полям (или $(p+1)$-тензорам), и соответствующие заряды равны Q_p [9]. Специальные свойства P – $\tilde{\rm P}$-полей (обсуждавшиеся после уравнения (28)) поясняют, почему Dp-браны БПС в теории типа IIA могут иметь только значения $p = 0, 2, 4, 6, 8$, а в теории типа IIB — значения $p = -1, 1, 3, 5, 7$ [4].

Для дальнейшего рассмотрения важно, что действие (33) суперсимметрично, если Dp-браны являются БПС-солитонами. На самом деле Dp-браны (32) сохраняют половину суперсимметрии в теории струн типа II, при этом

$$m_p = Q_p\, l_{\rm st}^{-(p+1)} , \qquad l_{\rm st} \sim \sqrt{\alpha'} . \tag{35}$$

Сила взаимодействия между двумя одинаковыми Dp-бранами, параллельными друг другу, обращается в нуль [4], так как отталкивание из-за P – $\tilde{\rm P}$-полей компенсируется гравитационным притяжением. Этот факт называют "условием нулевой силы".

4.3. D-браны как источники супергравитационных P – $\tilde{\rm P}$-солитонов

Рассмотрим Dp-брану на больших расстояниях $r = \sqrt{x_i x^i} \gg \sqrt{\alpha'}$ в пределе $g_{\rm s} \to 0$, когда можно пренебречь поправками $O(\alpha', \Gamma_{\rm N})$. Напомним, что именно суперсимметрия действия (33) позволяет легко переходить от больших масштабов r к малым (и наоборот), при этом лидирующий вклад (33) остается неизменным. Следовательно, в процессе перехода к большим расстояниям r можно просто забыть о Dp-бранных возбуждениях a_m и ϕ_i. Мы имеем в виду, что с больших расстояний они не наблюдаемы, и поэтому их можно заменить в (33) классическими значениями $a_m = \phi_i = 0$, если нет источников.

Таким образом, в отсутствие фоновых полей G, B и Φ мы имеем

$$Z = S_{\rm II} + m_p \int {\rm d}^{p+1}x + Q_p \int {\rm d}^{p+1}x\, \epsilon_{0\ldots p}\, A_{0\ldots p} + O(\alpha', \Gamma_{\rm N}) . \tag{36}$$

Второй и третий члены уравнения (36) являются просто источниками для кривизны и соответствующего P – $\tilde{\rm P}$-поля. Их можно переписать как

$$\int {\rm d}^{p+1}x \ldots \propto \int {\rm d}^{10}x\, \delta^{9-p}(x_i - C_i) \ldots ,$$

так что решения классических уравнений движения для (36) с этими источниками оказываются супергравитационными P – $\tilde{\rm P}$-солитонами БПС:

$$\begin{gathered} {\rm d}s^2 = f_p^{-1/2}\, {\rm d}x_m\, {\rm d}x^m + f_p^{1/2}({\rm d}r^2 + r^2\, {\rm d}\Omega_{8-p}^2) , \\ \exp[-2\Phi] = f_p^{(p-3)/2} , \qquad A_{0\ldots p} = -\frac{1}{2}(f_p^{-1} - 1) , \end{gathered} \tag{37}$$

причем для теорий типа IIA значения $p = 0, 2, 4, 6, 8$, а для теорий типа IIB значения $p = -1, 1, 3, 5, 7$ [19]. БПС-солитоны — это состояния в теории супергравитации, которые являются классическими пределами состояний (32) в теории струн. Таким образом, обнаруживается связь между Dp-бранами и (P – $\tilde{\rm P}$)p-бранными супергравитационными солитонами. В то же время уравнение (36) описывает низкоэнергетические флуктуации на фоне геометрии этих солитонов.

Все решения (37) являются БПС-решениями, которые для любой функции f_p сохраняют половину преобразований суперсимметрии в супергравитации. Уравнения движения супергравитации (36), связанные с замкнутостью алгебры суперсимметрии, подразумевают [19], что функция f_p должна удовлетворять условию

$$\Delta^{9-p} f_p(r) = m_p \delta^{9-p}(x_i - C_i) . \tag{38}$$

Здесь Δ^{9-p} — лапласиан для плоской метрики в направлениях $p+1, \ldots, 9$. Итак, функция

$$f_p = 1 + \left(\frac{r_p}{r}\right)^{7-p} , \qquad r_p \propto \frac{1}{m_p^{1/(p+1)}} . \tag{39}$$

Заметим, что в случае $r_p \gg \sqrt{\alpha'}$ струнными поправками к (36) можно пренебречь.

Рассмотрим N параллельных Dp-бран, расположенных в точках $\mathbf{r}_s$, $s = 1, \ldots, N$. Это легко сделать, используя "условия нулевой силы". На больших расстояниях система из N параллельных Dp-бран соответствует (P – $\tilde{\rm P}$)p-бранному солитону (37) с зарядом $Q_p \propto N$, при этом

$$f_p = 1 + \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{r_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}\right)^{7-p} . \tag{40}$$

Натяжение солитона $M_p = N m_p$. Если совместить все Dp-браны друг с другом ($r_s = 0$ для всех s), то

$$f_p = 1 + \left(\frac{R_p}{r}\right)^{7-p} , \qquad R_p^{7-p} = N r_p^{7-p} . \tag{41}$$

В этом случае струнными поправками к (36), (37), (41) можно пренебречь, если $R_p \gg \sqrt{\alpha'}$.

Солитоны (37) являются многомерными аналогами четырехмерной критической черной дыры Рейсснера – Нордстрома. Заметим, что горизонт событий для солитонов (37) расположен на подмногообразии $r = 0$.

4.4. D-браны и суперсимметричная теория ЯМ

Рассмотрим Dp-брану на малых расстояниях $r \ll R_p$ в пределе $g_{\rm s} \to 0$, когда можно забыть о длинноволновых колебаниях полей G, B, Φ, $\{A\}$ и заменить их классическими значениями, т.е. нулями в отсутствие внешних источников. Таким образом, разлагая (33) по степеням

малых f_{mn}, получаем

$$Z = S_{\mathrm{II}} + S_{\text{СКЭД}} + O(\alpha', \Gamma_{\mathrm{N}}),$$
$$S_{\text{СКЭД}} \propto \int \mathrm{d}^{p+1}x \left\{ \frac{1}{2} f_{mn}^2 + \frac{1}{2} |\partial_m \phi^i|^2 + \ldots \right\}. \tag{42}$$

Многоточием во второй строке (42) обозначены члены, зависящие от фермионных суперпартнеров. Их можно восстановить из факта, что суперсимметричная КЭД в $(p+1)$-измерении обладает максимальной суперсимметрией. Благодаря (31) и (32) мы знаем число преобразований суперсимметрии, относительно которых действие (42) инвариантно. Это число равно 16, т.е. половине полного числа компонент суперзарядов 32 в теориях струн типа II.

Существует и другой способ нахождения числа преобразований суперсимметрии, относительно которых действие (42) инвариантно. Можно рассмотреть десятимерную $\mathcal{N} = 1$ (т.е. максимально) суперсимметричную КЭД, в которой имеется 16 компонент суперзарядов:

$$L = \frac{1}{2} f_{\mu\nu}^2 + \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi, \tag{43}$$

где Ψ — шестнадцатикомпонентные спиноры Майораны – Вейля, являющиеся суперпартнерами a_μ. Затем можно редуцировать теорию с действием (43) в $(p+1)$-измерение. Для этого все поля в теории надо считать не зависящими от $9-p$ координат [12].

Таким образом, меняя обозначения a_i на ϕ_i $(i = p+1, \ldots, 9)$, мы получаем действие (42) с правильным фермионным составом. Более того, во время этой процедуры число суперсимметрий увеличивается по сравнению с $\mathcal{N} = 1$ в десяти измерениях [12]. На самом деле десятимерные фермионы Ψ перераспределяются в представления меньшей группы Пуанкаре $\mathrm{P}(p+1)$. Поэтому один десятимерный фермион включает в себя несколько фермионов меньшей размерности.

Низкоэнергетическое действие (42) можно также вывести с другой точки зрения [10]. При низких энергиях струны, оканчивающиеся на Dp-бранах, выглядят как безмассовые векторные (a_m) и скалярные (ϕ_i) возбуждения — возбуждения с наименьшей массой в теории открытых струн [3]. В пределе $g_{\mathrm{s}} \to 0$ взаимодействие открытых струн, прикрепленных к Dp-бранам, с замкнутыми струнами, распространяющимися в объемлющем пространстве, подавлено. Тогда низкоэнергетическим действием для таких возбуждений является суперсимметричное действие КЭД — единственное суперсимметричное, калибровочно-инвариантное действие, которое содержит наименьшее число производных от полей.

Последняя точка зрения полезна для понимания низкоэнергетической теории, описывающей связанные состояния Dp-бран [10]. В случае N параллельных Dp-бран с одинаковыми p, кроме струн, обоими концами прикрепленных к одной Dp-бране, имеются струны, натянутые между разными бранами. Более того, поскольку струны ориентируемы, между двумя любыми Dp-бранами может быть натянуто два типа струн. Струны, оканчивающиеся обоими концами на одной Dp-бране, дают безмассовые векторные возбуждения, живущие на бране. Струны, натянутые между разными бранами, дают массивные векторные возбуждения с массами, пропорциональными расстояниям между соответствующими Dp-бранами. Концы этих струн заряжены по отношению к калибровочным полям, живущим на Dp-бранах. Следовательно, соответствующие векторные возбуждения похожи на $\mathrm{W}^{\pm}$-бозоны в калибровочных теориях со спонтанно нарушенной симметрией. Эти возбуждения приобретают массы посредством механизма, аналогичного механизму Хиггса (раздвигания Dp-бран), и становятся безмассовыми, когда Dp-браны сближаются друг с другом.

Теория в мировом объеме связанного состояния N параллельных Dp-бран есть не что иное, как максимально суперсимметричная, $\mathrm{U}(N)$-инвариантная теория ЯМ [10]:

$$S \propto M_p \alpha'^2 \int \mathrm{d}^{p+1}x \, \mathrm{Tr} \left\{ \hat{f}_{mn}^2 + |\mathrm{D}_m \hat{\phi}_i|^2 + \sum_{i>j} [\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]^2 + \ldots \right\},$$
$$\hat{f}_{mn} = \partial_{[m} \hat{a}_{n]} + \mathrm{i}[\hat{a}_m, \hat{a}_n], \qquad \mathrm{D}_m = \partial_m + \mathrm{i}[\hat{a}_m, \quad]. \tag{44}$$

Многоточием в первой строке (44) обозначены члены, зависящие от полей фермионных суперпартнеров. Все возможные положения Dp-бран, образующих это связанное состояние, даются вакуумными средними $\mathrm{U}(N)$-матриц $\hat{\phi}_i$. Заметим, что потенциал в действии (44) имеет плоские направления, которые не поправляются квантовыми эффектами из-за суперсимметрии действия (44). В результате, U(1)-фактор в разложении $\mathrm{U}(N) = \mathrm{SU}(N) \times \mathrm{U}(1)$ описывает положение центра масс связанного состояния Dp-бран.

Насколько нам известно, не существует никакого строгого вывода (44) из первых принципов, таких как определение Dp-бран. Тем не менее существует неканонический способ формулировки неабелевой версии действия (32), (33) и, как следствие, (42) [21]. Этот способ может быть полезен для вывода (44).

Так или иначе, чтобы способствовать пониманию читателя, мы приведем еще один аргумент в пользу суперсимметричной теории ЯМ на Dp-бранах. Когда имеется набор Dp-бран, струны, оканчивающиеся на них, несут чан-патоновские индексы, нумерующие Dp-браны. Следовательно, мы получаем источники типа (14) для безмассовых возбуждений, где $\hat{a}_i \to \hat{\phi}_i$ $(i = p+1, \ldots, 9)$. Как известно, при низких энергиях это приводит к суперсимметричной теории ЯМ и показывает, что действие (44) является редукцией десятимерного $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричного действия в $(p+1)$-измерение.

В заключение стоит отметить, что аналогичным образом можно рассмотреть разные типы связанных БПС-состояний Dp-бран (с различными p) [4], однако это выходит за рамки нашего обсуждения.

5. AdS/CFT-соответствие

Мы показали, что Dp-браны имеют два различных описания в зависимости от того, с какого расстояния они наблюдаются. На большом расстоянии Dp-браны выглядят как источники гравитационных солитонов, тогда как на малых расстояниях наблюдаются их квантовые флуктуации, которые описываются суперсимметричной теорией ЯМ. На первый взгляд эти два предела не связаны друг с другом. Тем не менее это не так. Для того чтобы понять, почему, обсудим одну из простейших ситуаций.

Рассмотрим набор из N параллельных D3-бран в десятимерной супергравитационной теории типа IIB, которые совмещены друг с другом при $x_4 = \ldots = x_9 = 0$ и заполняют направления $0, \ldots, 3$. Соответствующий супергравитационный солитон является самодуальной $(\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}})$D3-браной (29), (37), (41), причем

$$R_3^4 = 4\pi g_{\mathrm{s}} N \alpha'^2 , \qquad Q_3 \propto N . \tag{45}$$

Заметим, что *классическое* описание супергравитации применимо, когда $R_3 \gg \sqrt{\alpha'}$, т.е. когда $g_{\mathrm{s}} N \gg 1$ (в пределе $g_{\mathrm{s}} \to 0$). В противном случае оказываются существенными струнные поправки, деформирующие солитон (37).

Геометрия D3-бранного солитона такова. Солитон имеет асимптотически плоские граничные условия на пространственной бесконечности, поскольку при $r \gg R_3$ отношение $(R_3/r)^4$ становится много меньше единицы. В то же время в окрестности источника ($r = 0$) существует область бесконечной горловины с постоянной кривизной

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{R_3^2}(\mathrm{d}x_m\,\mathrm{d}x^m) + \frac{R_3^2}{r^2}\,\mathrm{d}r^2 + R_3^2\,\mathrm{d}\Omega_5^2 , \quad \exp[-\Phi] = \mathrm{const} . \tag{46}$$

По определению, горловина — это область, в которой $r \ll R_3$, так что в формуле (41) можно пренебречь единицей по сравнению с $(R_3/r)^4$. Тогда из (37)–(41) мы получаем метрику (46).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что метрика (46) имеет постоянную скалярную кривизну, равную R_3, т.е. кривизна не обращается нигде в бесконечность и D3-брана является несингулярным солитоном. В самом деле, метрика (46) описывает геометрию пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$, где AdS_5 — пятимерное пространство анти-де Ситтера, а S_5 — пятимерное пространство де Ситтера (сфера). Как известно, оба эти пространства имеют постоянную скалярную кривизну (S_5 — положительную, а AdS_5 — отрицательную) и являются решениями пятимерных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, имеющей знак плюс или минус соответственно.

Опишем геометрию пространства AdS_5. Существует много способов описания этого пространства (см., например, [8]), но нам удобен следующий. Алгебраически пространство AdS_5 можно представить как *универсальное накрытие* некоторого подмногообразия в плоском шестимерном пространстве с координатами W, V и X_q $(q = 1, \ldots, 4)$ и сигнатурой $(-,-,+,+,+,+)$. Это подмногообразие определяется уравнением [8]

$$W^2 + V^2 - \sum_{q=1}^{4} X_q X_q = R_3^2 , \tag{47}$$

где R_3 — радиус подмногообразия и, следовательно, пространства AdS_5. Таким образом, на пространстве AdS_5 естественно действует глобальная группа SO(4,2), которая является его группой изометрии.

Метрика плоского шестимерного объемлющего пространства имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}W^2 - \mathrm{d}V^2 + \sum_{q=1}^{4} \mathrm{d}X_q\,\mathrm{d}X_q . \tag{48}$$

Метрику на универсальном покрытии подмногообразия (47) можно найти, решив уравнение (47):

$$\begin{aligned} &V = R_3 r t , \\ &W = \frac{1}{2r}\left[1 + r^2\left(R_3^2 + \sum_{q=1}^{3} x_q^2 - t^2\right)\right] , \\ &X_4 = \frac{1}{2r}\left[1 - r^2\left(R_3^2 - \sum_{q=1}^{3} x_q^2 + t^2\right)\right] , \\ &X_q = R_3 r x_q , \quad q = 1, \ldots, 3 . \end{aligned} \tag{49}$$

Подставляя это решение в уравнение (48), получаем для пространства AdS_5 метрику

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2}{R_3^2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \sum_{q=1}^{3} \mathrm{d}x_q\,\mathrm{d}x_q\right) + \frac{R_3^2}{r^2}\,\mathrm{d}r^2 , \tag{50}$$

которая совпадает с метрикой AdS-части в (46), если $x_m = (t, x_q)$, где $q = 1, \ldots, 3$.

Теперь определим границу пространства AdS_5. Если координаты W, V, X_q $(q = 1, \ldots, 4)$ устремить к бесконечности и разделить на положительную постоянную, мы получим уравнение, определяющее границу:

$$W^2 + V^2 - \sum_{q=1}^{4} X_q X_q = 0 . \tag{51}$$

Эта граница является четырехмерным многообразием, поскольку уравнение (51) инвариантно относительно масштабных преобразований $W \to \lambda W$, $V \to \lambda V$, $X_q \to \lambda X_q$ с действительным ненулевым коэффициентом λ.

Перескалируя координаты при помощи положительного значения λ, можно отобразить (51) в геометрическое место точек

$$W^2 + V^2 = \sum_{q=1}^{4} X_q X_q = 1 , \tag{52}$$

являющееся копией пространства $(S^1 \times S^3)/Z_2$, где мы должны профакторизовать по Z_2, поскольку имеется остаточная симметрия относительно преобразований $W \to -W$, $V \to -V$, $X_q \to -X_q$. Границей универсального накрытия (47) является универсальное накрытие (52), т.е. пространство $R^1 \times S^3$. Последнее многообразие — это конформная компактификация четырехмерного пространства Минковского $R^{3,1}$. В самом деле, для конформной компактификации $R^{3,1}$ надо добавить точку на пространственноподобной бесконечности.

В терминах метрики (50) компактификацию $R^{3,1}$ можно пояснить следующим образом. У границы пространства AdS_5 имеются две части: первая находится в области $r \to \infty$ и представляет собой четырехмерное пространство Минковского (t, x_q), где $q = 1, \ldots, 3$, а вторая часть является точкой $r = 0$. Из приведенных рассуждений следует, что на конформной компактификации пространства Минковского естественно действует группа SO(4,2), которая теперь определяет четырехмерные конформные преобразования. Заметим, что под действием произвольного конформного преобразования точка $r = 0$ отображается в точку внутри $R^{3,1}$. По этой причине рассматриваемая компактификация $R^{3,1}$ называется конформной.

Отметим, что теория супергравитации в пространстве AdS_5 инвариантна относительно глобальной

SO(4,2)-симметрии. Более того, эта теория в горловине (46) D3-браны инвариантна относительно $\mathcal{N}=8$ суперсимметрии.

Рассмотрим теперь описание D3-браны при помощи суперсимметричной теории ЯМ. Это описание применимо в пределе $g_{\rm s}\to 0$ и, как следует из (44), дается четырехмерной $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теорией ЯМ:

$$S=\frac{1}{4\pi g_{\rm s}}\int {\rm d}^4x\ {\rm Tr}\left\{\frac{1}{2}\hat{f}_{mn}^2+\frac{1}{2}\,|D_m\hat{\phi}_i|^2+\frac{1}{2}\sum_{i>j}^{6}\left[\hat{\phi}_i,\hat{\phi}_j\right]^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\rm i}{2}\sum_{I=1}^{4}\hat{\bar{\Psi}}^I\hat{D}\,\hat{\Psi}_I-\frac{\rm i}{2}\hat{\Psi}^I\left[\hat{\phi}_{IJ},\hat{\bar{\Psi}}^J\right]+{\rm c.c.}\right\}. \qquad (53)$$

Здесь $\hat{\phi}_{IJ}=\hat{\phi}_i\gamma_{IJ}^i$, причем γ_i^{IJ} — шестимерные матрицы Дирака.

Из формулы (53) видно, что $4\pi g_{\rm s}=g^2$, поэтому в пределе $g_{\rm s}\to 0$ пертурбативное разложение в суперсимметричной теории ЯМ хорошо определено. Благодаря точному сокращению квантовых поправок от бозонов и фермионов теория с действием (53) имеет нулевую β-функцию. Вследствие этого g есть просто не получающая квантовых поправок константа, что находится в соответствии с равенством $g_{\rm s}=\exp\left[2\Phi\right]={\rm const}$. Более того, при любом значении g теория инвариантна относительно четырехмерных конформных преобразований из группы SO(4,2). Благодаря конформной симметрии $\mathcal{N}=4$ суперсимметрия теории ЯМ, о которой идет речь, расширяется до $\mathcal{N}=8$ суперсимметрии.

Таким образом, группа SO(4,2) естественным образом реализована как в суперсимметричной теории ЯМ, так и в теории супергравитации. Последнее является хорошим знаком в пользу того, что $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная теория ЯМ должна быть связана с супергравитационной теорией типа IIB на пространстве $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$ с потоком самодуальной $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы [7] [6]. Заметим, что *классическое* описание супергравитации типа IIB справедливо в пределе $R_3/\sqrt{\alpha'}\to\infty$, что соответствует, как следует из (45), одновременно пределам $N\to\infty$ и $g_{\rm s}N\to\infty$ (при этом $g_{\rm s}\to 0$). Следовательно, *сильно* связанная $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная теория ЯМ в пределе больших N применима в той же ситуации, что и теория супергравитации типа IIB на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$. Эти наивные заключения о связи между двумя теориями, о которых идет речь, ниже получат дополнительные подтверждения.

5.1. Словарь для AdS/CFT-соответствия

Обсудим формальным образом соответствие между $\mathrm{SU}(N)$-инвариантной, четырехмерной $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теорией ЯМ и теорией супергравитации типа IIB на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$ с потоком $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы [7, 8]. Эта связь устанавливает, что в пределе, когда $g_{\rm s}N\to\infty$, $g_{\rm s}\to 0$ и $N\to\infty$, выполняется соотношение

$$\left\langle\exp\left[-{\rm i}\sum_j\int {\rm d}^4x\ J_0^j(x)\,\mathcal{O}^j\right]\right\rangle\approx$$
$$\approx\exp\left\{-{\rm i}S^{\,\min}\left[(\mathrm{AdS}_5)_N\times(\mathrm{S}_5)_N\right]_{J^j}\Big|_{u=J_0^j}\right\}. \qquad (54)$$

Среднее в левой части (54) вычисляется в *сильно связанной* $\mathrm{SU}(N)$-инвариантной, $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории ЯМ при больших значениях N; $\{\mathcal{O}^j\}$ составляет полный набор локальных операторов в этой теории, сохраняющих симметрии задачи, $S^{\,\min}$ в правой части (54) обозначает действие супергравитации типа IIB на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$ с потоком самодуальной $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы.

Действие $S^{\,\min}$ минимально на классических решениях для всех входящих в него полей. (В пределе $R_3/\sqrt{\alpha'}\propto\propto g_{\rm s}N\to\infty$ струнные поправки к теории супергравитации подавлены.) Классические решения в (54) схематически обозначены J_j, где j может содержать, например, тензорные индексы. Эти решения принимают значения $J^j|_u=J_0^j$ на четырехмерной гиперповерхности $r=u<R_3$ в пространстве AdS_5 и имеют асимптотическое поведение при $u\to R_3$ специального вида [8]. При этом значения J_0 служат источниками для левой части соотношения (54).

Итак, как видно из соотношения (54), теория супергравитации типа IIB в *объеме* пространства AdS_5 связана с суперсимметричной теорией ЯМ на *четырехмерных гиперповерхностях* ($r=u$ при произвольных u) внутри пространства AdS_5. Это является примером так называемой голографии [21–23] в квантовой теории поля.

Соотношения между различными параметрами в обоих частях (54) таковы:

$$R_3^4=4\pi g_{\rm s}N\alpha'^2\,,$$
$$g^2=4\pi g_{\rm s}={\rm const}\,,$$
$$M_{\rm UV}=\frac{R_3}{\alpha'}\,, \qquad (55)$$
$$\text{число единиц потока } \mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}} \text{ четыре-формы} =$$
$$=\text{ранг калибровочной группы}=N\propto Q_3\,,$$
$$\text{масштаб энергий в теории ЯМ}=\frac{u}{\alpha'}\,,$$

где $M_{\rm UV}$ — ультрафиолетовое обрезание в суперсимметричной теории ЯМ.

В самом деле, производящий функционал корреляционных функций в левой части (54) имеет ультрафиолетовые расходимости и нуждается в регуляризации. Следовательно, производящий функционал суперсимметричной теории ЯМ преобразуется под действием ренормгруппового потока. Это происходит несмотря на отсутствие квантовых поправок к классическому действию (53) четырехмерной $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории ЯМ. Теория супергравитации на пространстве AdS_5, как мы покажем ниже, тоже нуждается в регуляризации, и естественным параметром регуляризации опять является R_3 [7, 8].

Перед обсуждением смысла соотношения (54) подчеркнем, что оно похоже на соотношение (12) между теорией струн и теорией гравитации. Теория супергравитации в (54) появляется как эффективное описание суперсимметричной теории ЯМ. Одно из отличий соотношения (54) от утверждения (12) в теории струн состоит в том, что мы получаем $Z\propto\exp\left[-{\rm i}S(\text{источники})\right]$, поскольку суперсимметричная теория ЯМ является *вторично-квантованной* теорией.

AdS/CFT-соответствие следует понимать таким образом. На фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$ с потоком $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы существует справедливая при всех энергиях

[7] Поток $\mathrm{P}-\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы присутствует в силу того, что геометрия $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}_5$ возникает из D3-бранного солитона, заряженного по этой форме.

теория суперструн типа IIB, которую еще предстоит найти. Эта теория суперструн слабо связана, когда $g_s \to 0$, поэтому, чтобы удерживать $g_s N$ фиксированным, необходимо положить $N \to \infty$. При энергиях, много меньших R_3/α', теория суперструн имеет два предела вырождения. Один предел реализуется при $g^2 N \sim g_s N \ll 1$, он описывается слабо связанной $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией ЯМ при больших N, которая является хорошо определенной квантовой теорией. Другой предел реализуется при $R_3^4/\alpha'^2 \propto g_s N \gg 1$. В этом пределе приходится иметь дело с суперсимметричной теорией ЯМ в режиме сильной связи, корректное определение которой неизвестно. Правильное описание в пределе $g_s N \gg 1$ дается слабо связанной (*классической*) теорией супергравитации типа IIB на фоне пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$.

5.2. Интерпретация AdS/CFT-соответствия

Рассмотрим теорию суперструн типа IIB на фоне пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$ с потоком $\mathrm{P} - \tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы, соответствующим D3-бране. Это одновременно и теория квантовой гравитации, в которой мы усредняем по всем метрикам с асимптотическими граничными условиями AdS_5. В результате корреляционные функции в этой теории не зависят от координат операторов, действующих в объеме пространства AdS_5. Таким образом, все корреляторы операторов, расположенных в объеме AdS_5, тривиальны. Более того, поскольку пространство AdS_5 не содержит асимптотически-плоской части, теория супергравитации на фоне пространства AdS_5 всегда сильно связана в том смысле, что в ней нет асимптотических состояний.

Итак, теория супергравитации на пространстве AdS_5 полностью определена величиной, которая является производящим функционалом корреляционных функций операторов, действующих на границе пространства AdS_5. Эта величина есть не что иное как волновой функционал в теории супергравитации. Операторы, о которых идет речь, должны рождать или уничтожать на границе различные супергравитационные частицы. Классическим пределом производящего функционала в этом случае является правая часть (54). Важно, что корреляции между операторами, действующими на границе AdS_5, нетривиальны. В самом деле, после фиксирования границы AdS_5 появляется естественный выбор [8] метрики [8] на этой границе, следующий из (50).

Таким образом, гравитация в пространстве AdS_5 полностью описывается SO(4,2)-инвариантной теорией поля на границе этого пространства или на любой четырехмерной гиперповерхности, расположенной в точке $r = u \leqslant R_3$. Производящий функционал для теории гравитации на фоне пространства AdS_5, рассмотренный выше, эквивалентен производящему функционалу четырехмерной конформной теории поля [9]. Вопрос, на который осталось ответить, заключается в следующем: какая именно конформная теория живет на четырехмерных гиперповерхностях в пространстве AdS_5?

Теперь, когда мы установили, как можно понять соответствие (54) с точки зрения теории в объеме пространства AdS_5, поясним, как оно выглядит с точки зрения теории на границе. Определив классический предел производящего функционала теории гравитации на границе, при помощи уравнений движения супергравитации можно найти его значение на любой гиперповерхности $r = u$. С точки зрения теории на границе это выглядит как поток ренормгруппы от масштаба обрезания R_3/α' к масштабу энергий u/α'. В самом деле, левая часть (54) есть не что иное, как эффективное вильсоновское действие для теории на границе, определенное на масштабе энергий $r = u$.

В то же время асимптотическое поведение источников (коэффициентных функций) J_0 при $r = u \to R_3$ определяется пертурбативными β-функциями теории на границе. Заметим, что коэффициентные функции J_0 эффективного вильсоновского действия зависят не только от u, но также и от координат в четырехмерном пространстве-времени x_m. Это необходимо, чтобы принцип голографии был справедлив с точки зрения теории на границе.

Действительно, именно голография позволяет найти производящий функционал теории на границе на масштабе энергий u/α', если известно его значение на любом другом масштабе независимо от того, больше он или меньше u/α'. Например, если известен производящий функционал теории на границе на масштабе энергий $u/\alpha' < R_3/\alpha'$, можно найти его значение на масштабе обрезания R_3/α'.

Забудем на время об AdS/CFT-соответствии и просто посмотрим, что происходит с теорией на границе. В процессе ренормгрупповой эволюции теории мы интегрируем по высокоэнергетическим модам. Если бы в процессе такого интегрирования мы сохраняли информацию только о расходящихся в пределе $R_3/\alpha' \to \infty$ контрчленах, не было бы способа восстановить ультрафиолетовую теорию из инфракрасной. На самом деле могло бы быть много различных ультрафиолетовых теорий, которые эволюционировали бы в одну и ту же инфракрасную. Однако это находится в явном противоречии с принципом голографии.

Чтобы соблюсти принцип голографии, в процессе ренормгрупповой эволюции мы обязаны сохранить всю информацию о высокоэнергетических модах. Это возможно, если сохранить *все* контрчлены, даже те, которые конечны в пределе $R_3/\alpha' \to \infty$. При этом информация о высокоэнергетических модах закодирована в терминах *всех* источников J_0 только при условии, что источники J_0 являются функциями от x_m. Мы имеем в виду, что любое изменение полей в теории может быть компенсировано изменением источников $J_0(x)$. Таким образом, если известны значения всех источников J_0 (т.е. известен производящий функционал суперсимметричной теории ЯМ) при некотором значении $r = u$, то можно найти их значения при любом другом $r = u$.

К сожалению, строгого вывода соотношения (54) нет, и прямо проследить появление теории на границе мы не можем. Поэтому лучшее, что можно сделать сейчас, — это представить различные точки зрения и дать некоторые аргументы в пользу соответствия (54). Ниже мы ответим на вопросы: почему супергравитация в асимптотически-плоской области D3-бранного солитона должна отщепляться от (54); почему теория супергравитации на фоне пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$ соответствует $\mathrm{SU}(N)$-инвариантной, суперсимметричной теории ЯМ, а не $\mathrm{U}(N)$-инвариантной; почему необходимо переходить к пре-

[8] Метрика на границе получается умножением (50) на $1/r^2$ в пределе $r \to \infty$.

[9] Ср. это утверждение с (54).

делам $N \to \infty$ и $g_s N \to \infty$; почему R_3/α' (u/α') играет роль ультрафиолетового обрезания (масштаба энергий) в суперсимметричной теории ЯМ; какое поле в супергравитации соответствует данному оператору в суперсимметричной теории ЯМ и наоборот?

5.3. Качественные замечания

Рассмотрим, что происходит со связанным состоянием N параллельных D3-бран при очень малых энергиях с точки зрения бесконечно удаленного наблюдателя [6, 16]. Согласно (42) в этом пределе наблюдатель видит свободную (невзаимодействующую), десятимерную теорию супергравитации: все взаимодействия подавлены, поскольку ньютоновская константа Γ_{N} мала по сравнению с характерным масштабом длин в теории. В самом деле, действие

$$S \propto \frac{1}{\Gamma_{\mathrm{N}}} \int \mathrm{d}^{10}x \sqrt{-G}\,\mathcal{R} + \ldots \propto$$

$$\propto \int \mathrm{d}^{10}x \left[(\partial h)^2 + \sqrt{\Gamma_{\mathrm{N}}}\,(\partial h)^2 h + \ldots \right]. \qquad (56)$$

В формуле (56) мы параметризовали метрику как $G = \eta + \sqrt{\Gamma_{\mathrm{N}}}\,h$, где η — плоская метрика, а h — малые флуктуации в ее окрестности.

Поскольку все взаимодействия подавлены, свободная теория супергравитации отщепляется от возбуждений D3-браны, которые описываются $\mathrm{SU}(N)$-инвариантной, суперсимметричной теорией ЯМ (см. (53)). Среди всех возбуждений D3-браны, которые описываются $\mathrm{U}(N) = \mathrm{SU}(N) \times \mathrm{U}(1)$ инвариантной, суперсимметричной теорией ЯМ, от свободной теории супергравитации не отщепляются только те, которые соответствуют U(1)-фактору. На самом деле U(1)-фактор описывает степени свободы центра масс и отвечает источникам соответствующего D3-бранного солитона. Таким образом, возбуждения D3-браны, отвечающие U(1)-фактору, взаимодействуют с полями теории супергравитации даже в низкоэнергетическом пределе.

Это только одна точка зрения. Другая точка зрения следующая. В соответствии с (36) и (37), с точки зрения наблюдателя на бесконечности свободная теория супергравитации (56) отщепляется от полей супергравитации, живущих в области горловины (46) D3-браны. Действительно, безмассовые частицы из объемлющего пространства отщепляются от области горловины, поскольку их низкоэнергетическое сечение поглощения D3-браной ведет себя как [13]

$$\sigma \propto \omega^3 R_3^8\,, \qquad (57)$$

где ω — энергия падающей скалярной частицы, измеренная наблюдателем на бесконечности. Сечение поглощения обращается в нуль при уменьшении ω. Такое поведение объясняется тем, что в низкоэнергетическом пределе длины волн частиц в объемлющем пространстве становятся много бóльшими типичного гравитационного размера браны R_3. Следовательно, длинноволновые флуктуации "не чувствуют" областей с размером порядка R_3.

В то же время сечение (57) эквивалентно так называемому "фактору серого тела" D3-бранного солитона, поведение которого согласно (57) можно объяснить следующим образом. По мере понижения энергии (с точки зрения удаленного наблюдателя) возбуждений, волновые функции которых сосредоточены вблизи браны ($r \ll R_3$), им становится все труднее и труднее преодолевать гравитационный потенциал D3-браны и уходить в асимптотически-плоскую область. В результате область горловины и асимптотическая область не взаимодействуют друг с другом в низкоэнергетическом пределе.

Итак, мы имеем две картины описания одного и того же явления. В обоих картинах с точки зрения удаленного наблюдателя имеются две невзаимодействующие теории в низкоэнергетическом пределе. В обоих картинах одной из этих теорий является свободная теория супергравитации в плоском десятимерном пространстве. Поэтому естественно отождествить две другие теории, появляющиеся в обоих описаниях [6]. Это $\mathrm{SU}(N)$-инвариантная, четырехмерная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория ЯМ и теория супергравитации типа IIB на фоне пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}_5$ с потоком самодуальной P–$\tilde{\mathrm{P}}$ четыре-формы.

Наиболее важным фактором для картины в целом является то, что обе вышеупомянутые теории обладают конечными (*ненулевыми*) энергиями [6]. На самом деле их энергетические масштабы соответствуют энергиям, которые видит наблюдатель, находящийся в области горловины (при фиксированных значениях r, меньших R_3), а не на бесконечности. Заметим, что компонента g_{tt} метрики D3-браны не постоянна. Поэтому для любого объекта энергия E_r, измеренная наблюдателем на расстоянии r, и энергия E_∞, измеренная бесконечно удаленным наблюдателем, различаются на множитель красного смещения:

$$E_\infty = f_3^{-1/4} E_r\,. \qquad (58)$$

Отсюда следует, что если объект с конечной постоянной энергией подходит все ближе и ближе к точке $r = 0$, то для удаленного наблюдателя его энергия становится все меньше и меньше.

5.4. Дополнительные аргументы

Представим еще несколько аргументов, подтверждающих AdS/CFT-соответствие (54).

1. Объясним, как найти связь между операторами в левой части и полями в правой части соотношения (54). Для низкоэнергетических мод в теории супергравитации можно использовать (33) или его неабелево обобщение [24]. Возьмем, например, поле дилатона, взаимодействующее с полями суперсимметричной теории ЯМ следующим образом:

$$\Delta_\Phi S \propto \int \mathrm{d}^4x \exp\left[-\Phi(x_m, \phi_i)\right] \times$$

$$\times \left[f_{mn}^2 + \sum_{i=1}^{6} |\partial_m \phi_i|^2 + \text{фермионы} \right]. \qquad (59)$$

Заметим, что поле дилатона, помимо зависимости от x_m, имеет зависимость от ϕ_i. Действительно, поле дилатона является функцией всех десяти координат, а не только четырех координат x_m.

Рассмотрим малые флуктуации поля дилатона в окрестности (46). Разлагая $\exp[-\Phi]$ по степеням дилатонного поля, а само поле по степеням ϕ_i, из (59)

получаем

$$\Delta_\Phi S_n \propto \int \mathrm{d}^4 x\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n}\, \Phi(\phi_i, x)\Big|_{\phi_i=0} \times$$
$$\times \left[\phi_{i_1} \ldots \phi_{i_n} \left(f_{mn}^2 + \sum_{i=1}^{6} |\partial_m \phi_i|^2 + \text{фермионы}\right)\right]. \quad (60)$$

Отсюда видно, что n-я сферическая гармоника дилатонного поля на S_5 (т.е. калуца-кляйновская мода на S_5) взаимодействует с оператором

$$\mathcal{O}_n^\Phi[\phi_i, a_m] \propto \phi_{i_1} \ldots \phi_{i_n} \left(f_{mn}^2 + \sum_{i=1}^{6} |\partial_m \phi_i|^2 + \text{фермионы}\right).$$

Неабелево обобщение этого оператора определяется как

$$\mathcal{O}_n^\Phi[\hat\phi_i, \hat a_m] \propto \mathrm{Tr}\left[\hat\phi_{(i_1} \ldots \hat\phi_{i_n)} \left(\hat f_{mn}^2 + \sum_{i=1}^{6} |\mathrm{D}_m \hat\phi_i|^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sum_{i>j} [\hat\phi_i, \hat\phi_j]^2 + \text{фермионы}\right)\right]. \quad (61)$$

Из соотношения (61) можно заключить, что нулевая мода поля дилатона ($n = 0$) взаимодействует с действием (53) суперсимметричной теории ЯМ. Похожим образом из (33) можно найти, что нулевая мода поля гравитона $G_{mn}(x, \phi_i = 0)$ взаимодействует с тензором энергии-импульса суперсимметричной теории ЯМ.

Общий метод нахождения связи между полями супергравитации и операторами суперсимметричной теории ЯМ основан на сравнении их свойств симметрии относительно группы SO(4,2) [16]. Оказывается, что для каждого супергравитационного поля в киральном представлении (суперсимметричного расширения) группы SO(4,2) существует оператор в суперсимметричной теории ЯМ, преобразующийся по тому же представлению [16], и наоборот.

Здесь стоит упомянуть о наличии других симметрийных аргументов в пользу справедливости AdS/CFT-соответствия [16, 25], однако их обсуждение выходит за рамки нашего изложения.

2. Имея в виду приведенные выше рассуждения, исследуем более детально соотношение (54). Следуя [7, 8], рассмотрим нулевую моду дилатона. Действие для поля дилатона на фоне пространства AdS_5 в линейном приближении имеет вид

$$S(\Phi) = \frac{\pi^2 R_3^8}{32 \Gamma_\mathrm{N}} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{d}z\, \frac{1}{z^3} \left[(\partial_z \Phi)^2 + (\partial_m \Phi)^2\right] + \ldots \quad (62)$$

В уравнении (62) на пространстве AdS_5 мы выбрали метрику

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{R_3^2}{z^2} (\mathrm{d}z^2 + \eta^{mn}\, \mathrm{d}x_m\, \mathrm{d}x_n), \qquad z = \frac{R_3^2}{r}, \quad (63)$$

в которой граница AdS_5 является пространством Минковского в области $z = 0$ плюс точка в области $z \to \infty$.

Действие (62) расходится для классических решений, которые регулярны при $z = 0$ и спадают при $z \to \infty$. Чтобы регуляризовать расходимость, естественно обрезать пространство AdS_5 при $z = \epsilon \sim \alpha'/R_3$. Это инфракрасная регуляризация теории супергравитации на пространстве AdS_5. При этом любое классическое решение с граничным значением $\Phi(z = \epsilon, x) = \Phi_0(x)$ можно разложить по $\Phi(z = \epsilon, x) = \exp\left[\mathrm{i} k_m x^m\right]$, где k_m — четырехимпульс [8]. Единственное нормируемое решение с таким граничным условием, регулярное при $z \to \infty$, таково [7, 8]:

$$\Phi(x_m, z) = \frac{(kz)^2 \mathcal{K}_2(kz)}{(k\epsilon)^2 \mathcal{K}_2(k\epsilon)} \exp\left[\mathrm{i} k_m x^m\right], \qquad k = |k_m|. \quad (64)$$

Здесь $\mathcal{K}_2$ обозначает модифицированную функцию Бесселя.

Действие для решения (64) записывается как

$$S^{\min}(\Phi_0) \propto N^2 \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y\, \Phi_0(x) \Phi_0(y) \times$$
$$\times \left(\epsilon^2 + |x_m - y_m|^2\right)^{-4} + O(\epsilon^2), \quad (65)$$

где $\Phi_0(x) = \exp\left[\mathrm{i} k_m x^m\right]$. Мы получили в (65) множитель N^2, поскольку $R_3^2 \propto N^2$. Вклады в (65) от поправок старшего порядка по степеням Φ_0, следующие из (62) и (32), отсутствуют.

Производящий функционал в суперсимметричной теории ЯМ имеет вид

$$Z(\Phi_0) = \int \mathcal{D}\hat a_m \ldots \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{g^2} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{Tr}\left[\hat f_{mn}^2 + \ldots\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{i}}{g^2} \int \mathrm{d}^4 x\, \Phi_0(x)\, \mathrm{Tr}\left[\hat f_{mn}^2 + \ldots\right]\right\}. \quad (66)$$

Многоточием в (66) обозначены члены, зависящие от суперпартнеров полей a_m. Теперь поле $\Phi_0(x)$ является источником для оператора, соответствующего классическому действию суперсимметричной теории ЯМ. Согласно (54) и (33) поле $\Phi_0(x)$ должно равняться граничному значению дилатона $\Phi(z = \epsilon, x)$.

Интегрируя в (66) по полям суперсимметричной теории ЯМ, получаем

$$Z(\Phi_0) = \mathrm{const} \cdot \exp\left\{-\mathrm{const} \cdot \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y\, \Phi_0(x) \Phi_0(y) \times \right.$$
$$\left. \times \left\langle \mathrm{Tr}\left[\hat f_{lm}^2(x) + \ldots\right] \mathrm{Tr}\left[\hat f_{np}^2(y) + \ldots\right]\right\rangle + \ldots\right\} \quad (67)$$

с точностью до *квадратичного* порядка по дилатону. Благодаря ограничениям, налагаемым $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией, мы знаем точное значение коррелятора:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\left[\hat f_{lm}^2(x) + \ldots\right] \mathrm{Tr}\left[\hat f_{np}^2(y) + \ldots\right]\right\rangle \propto \frac{N^2}{|x_m - y_m|^8}. \quad (68)$$

Множитель N^2 появляется в (68) как число степеней свободы в суперсимметричной теории ЯМ. Действительно, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория ЯМ суперконформно-инвариантна, и, следовательно, в ней нет конфайнмента: степени свободы одни и те же на *всех* масштабах длин.

В соотношениях (67) и (68) имеется ультрафиолетовая расходимость при $x = y$, которую можно регуляризовать при помощи раздвигания точек. Коротко говоря, это означает, что все расстояния в четырехмерном пространстве-времени обязаны быть больше некоторого регуляризационного параметра ϵ'. В рамках такой схемы

регуляризации соотношение (68) приобретает вид

$$\left\langle \mathrm{Tr}\left[\hat{f}^2_{lm}(x)+\ldots\right]\mathrm{Tr}\left[\hat{f}^2_{np}(y)+\ldots\right]\right\rangle \propto$$
$$\propto \frac{N^2}{\left(\epsilon'^2+|x_m-y_m|^2\right)^4}+\text{контактные члены}. \qquad (69)$$

Итак, если положить $\epsilon'=\epsilon$, можно найти полное согласие между левой и правой частями соотношения (54). Более того, мы обнаружили, что инфракрасная регуляризация теории супергравитации связана с ультрафиолетовой регуляризацией суперсимметричной теории ЯМ [7, 8]. Таким образом, величина R_3/α' играет роль параметра ультрафиолетовой регуляризации в суперсимметричной теории ЯМ.

Заметим, что параметр ультрафиолетовой регуляризации в суперсимметричной теории ЯМ можно менять одновременно с изменением положения границы пространства AdS_5 при помощи SO(4,2)-преобразований. Другими словами, гиперповерхность, на которой живет суперсимметричная теория ЯМ, можно поместить в любую точку $r=u$ внутри пространства AdS_5, используя SO(4,2)-преобразования.

Проверку, которую мы выполнили, можно распространить также на другие операторы суперсимметричной теории ЯМ и супергравитационные поля [16].

3. Интересно понять: каков смысл теории струн для $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории ЯМ? Обычно наличие струнного представления означает конфайнмент в теории [1]. Действительно, рассмотрим вильсоновскую петлю

$$W(C)=\mathrm{Tr}\,\mathrm{P}\exp\left[\mathrm{i}\oint_C \mathrm{d}x_m\,\hat{a}_m\right]. \qquad (70)$$

Здесь C — некоторый контур внутри четырехмерного пространства-времени, а след берется по фундаментальному представлению калибровочной группы.

Струнное описание теории ЯМ подразумевает, что вакуумное среднее вильсоновской петли может быть представлено как сумма по струнным мировым поверхностям Σ_C, натянутым на C:

$$\langle W(C)\rangle=\sum_{\Sigma_C}\exp\left[-\mathrm{i}S(\Sigma_C)\right], \qquad (71)$$

для некоторого действия $S(\Sigma_C)$ теории струн. Обычно это означает, что если взять большую петлю C в евклидовом пространстве, то

$$\langle W(C)\rangle\propto\exp\left[-\mathcal{A}(\Sigma_C^{\min})\right], \qquad (72)$$

где $\mathcal{A}(\Sigma_C^{\min})$ — площадь минимальной поверхности $\Sigma_C^{\min}$, натянутой на C. Такое поведение для вакуумного среднего вильсоновской петли свидетельствует о линейности потенциала взаимодействия между источниками в фундаментальном представлении калибровочной группы и, следовательно, о конфайнменте [1].

AdS/CFT-соответствие можно использовать в евклидовом пространстве [26–28], чтобы найти представление типа (72) для вакуумного среднего вильсоновской петли в $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории ЯМ. Для суперсимметричной теории ЯМ в режиме сильной связи ответ тот же, что и в (72), но теперь $\mathcal{A}(\Sigma_C^{\min})$ обозначает регуляризованную площадь минимальной поверхности, натянутой на контур C [26, 27]. Контур C находится на границе пространства AdS_5, тогда как мировая поверхность струны — внутри AdS_5.

Заметим, что мы не ожидаем конфайнмента в конформной теории, поскольку эта теория на всех расстояниях имеет одни и те же степени свободы. Поэтому возникает вопрос: почему поведение типа (72) для вакуумного среднего вильсоновской петли в $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории ЯМ не приводит к конфайнменту? Иными словами, если площадь, ограниченная контуром C на границе, изменяется, почему площадь $\mathcal{A}(\Sigma_C^{\min})$ не изменяется пропорционально? Здесь оказывается полезной именно геометрия пространства AdS_5 [28].

На самом деле ответ на этот вопрос вытекает из SO(4,2)-инвариантности. Если перескалировать контур C как $x_m\to tx_m$ с большим положительным значением t, то при помощи конформной инвариантности можно перескалировать поверхность $\Sigma_C^{\min}$, полагая $x_m\to tx_m$ и $z\to tz$ (см. (63)), без изменения ее площади $\mathcal{A}$. Поэтому площадь $\mathcal{A}$ не обязана быть пропорциональной площади, окруженной контуром C. Однако поскольку перескалирование $z\to tz$ должно проводиться с очень большим значением t, поверхность $\Sigma_C^{\min}$, окруженная очень большим контуром C, должна простираться очень далеко от границы пространства AdS_5. Это позволяет геометрия пространства AdS_5. Прямое вычисление показывает [26, 27], что все вышеприведенные рассуждения верны.

Существует ряд других доводов в пользу справедливости AdS/CFT-соответствия [16], но мы ограничимся сказанным, поскольку надеемся, что приведенных аргументов достаточно, чтобы убедить читателя, что AdS/CFT-соответствие действительно имеет место.

6. Заключение

Итак, AdS/CFT-соответствие является, по всей видимости, первым в науке примером описания суперсимметричной теории ЯМ в терминах теории струн. Стоит упомянуть, что аналоги AdS/CFT-соответствия можно установить и для суперсимметричных теорий ЯМ в других измерениях [29]. Более того, его можно обобщить на конформные теории ЯМ с меньшей суперсимметрией [30, 31]. Существуют также обобщения AdS/CFT-соответствия на случай неконформных теорий [28, 32, 33].

Далее, как обычно случается с утверждениями, которые связывают две, на первый взгляд, различные теории, это соответствие полезно для них обоих [16]. Наряду с тем, что AdS/CFT-соответствие предлагает струнное описание суперсимметричной теории ЯМ, оно дает квантовое описание гравитации в терминах суперсимметричной теории ЯМ. Мы имеем в виду, что на расстояниях, много меньших струнного масштаба (когда $g^2N\ll 1$), существует описание квантовой гравитации при помощи суперсимметричной теории ЯМ: как мы упоминали, теория супергравитации в пространстве AdS_5 является эффективным длинноволновым приближением для суперсимметричной теории ЯМ. Помимо этого, AdS/CFT-соответствие демонстрирует явление голографии, которое может быть важно для понимания квантовой гравитации.

Для полноты изложения мы хотели бы привести некоторую критику общего статуса обсуждаемого пред-

мета. Во-первых, как мы видели, струнное описание теории ЯМ можно найти только в самой простой ситуации. Действительно, струнное описание для теории ЯМ было найдено в случае, когда она максимально суперсимметрична и взят предел больших N. Более того, струнное описание можно проверить более или менее корректно только в режиме сильной связи $g^2N \to \infty$. Во-вторых, даже в такой ситуации AdS/CFT-соответствие не было строго выведено из первых принципов.

В заключение хотелось бы выразить благодарность А. Герасимову, под влиянием которого углубилось мое понимание D-бран и AdS/CFT-соответствия, а также Н. Хамбли, М. Лайдоу, А. Лосеву, Х. Малдацене, А. Маршакову, А. Морозову, Т. Пиллингу, Р. Сципиони, Г. Семенову и К. Зарембо за полезные комментарии и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов NSERC NATO Fellowship, частично INTAS (97-01-03) и Российского фонда фундаментальных исследований (98-02-16575).

7. Дополнение. БПС - состояния

Определим БПС-солитоны, следуя стандартному примеру из статьи [11], который, как мы надеемся, поможет понять их специфику.

Рассмотрим двумерную скалярную суперсимметричную теорию с действием

$$S = \int \mathrm{d}^2\sigma \left[\frac{1}{2}(\partial_a\phi)^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\bar{\Psi}\,\hat{\partial}\Psi - \frac{1}{2}\,V^2(\phi) - \frac{1}{2}\,V'(\phi)\,\bar{\Psi}\Psi \right], \tag{73}$$

где Ψ — майорановский фермион, а $V(\phi)$ — произвольная функция (например, $V = -\lambda(\phi^2 - \phi_0^2)$ или $V(\phi) = -\sin\phi$). Действие (73) инвариантно относительно преобразований суперсимметрии с сохраняющимся нетеровским током

$$s^a = (\partial_b\phi)\gamma^b\gamma^a\,\Psi + \mathrm{i}V(\phi)\,\gamma^a\,\Psi\,. \tag{74}$$

Киральные компоненты $Q^{\pm}$ заряда суперсимметрии могут быть записаны при помощи киральных компонент $\Psi^{\pm}$ ферми-поля следующим образом:

$$Q_{\pm} = \int \mathrm{d}\sigma_2 \left|(\partial_1\phi \pm \partial_2\phi)\,\Psi_{\pm} \mp V(\phi)\,\Psi_{\mp}\right|. \tag{75}$$

В обозначениях (75) алгебра суперсимметрии принимает вид

$$Q_+^2 = p_+\,, \qquad Q_-^2 = p_-\,,$$
$$Q_+Q_- + Q_-Q_+ = 2\int \mathrm{d}\sigma_2\,V(\phi)\,\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_2}\,, \tag{76}$$

где $p_{\pm} = p_1 \pm p_2$. В правой части третьего равенства (76) стоит так называемый центральный заряд $\mathcal{Z}$ алгебры суперсимметрии, который пропорционален топологическому заряду в теории. Например, если $V(\phi) = -\sin\phi$, то заряд

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\sigma_2\,\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\,(2\cos\phi)$$

не равен нулю только для кинковых и антикинковых решений.

Используя алгебру (76), получаем, что

$$p_+ + p_- = \mathcal{Z} + (Q_+ - Q_-)^2 = -\mathcal{Z} + (Q_+ + Q_-)^2\,, \tag{77}$$

поэтому $p_+ + p_- \geqslant |\mathcal{Z}|$. Это означает, что для одночастичного состояния с массой M в системе покоя

$$p_- = p_+ = M \geqslant \frac{1}{2}\,|\mathcal{Z}|\,. \tag{78}$$

Ограничение (78) насыщается для БПС-состояний, когда, как видно из (77),

$$(Q_+ + Q_-)|\text{БПС}\rangle = 0 \quad \text{или} \quad (Q_+ - Q_-)|\text{БПС}\rangle = 0\,.$$

В частности, этому условию удовлетворяют все кинковые и антикинковые решения в теории. Таким образом, БПС-состояния составляют малые представления алгебры суперсимметрии: некоторые комбинации суперзарядов действуют тривиально на состояние и поэтому не генерируют суперпартнеров [12].

Последнее свойство БПС-состояний является ключевым. Действительно, если суперсимметрия не нарушена (что с самого начала можно проверить вычислением виттеновского индекса теории), адиабатические вариации параметров теории не меняют представлений алгебры суперсимметрии. Следовательно, если равенство (78) справедливо при некотором значении параметров, оно будет справедливо всегда и БПС-состояния не разрушаются квантовыми поправками. Более того, используя равенство (78), можно контролировать перенормировку массы и заряда, и если суперсимметрия достаточно велика, ни масса, ни заряд вообще не перенормируются.

Список литературы

1. Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (Heidelberg: Springer-Verlag, 1987)
2. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **72** 461 (1974)
3. Green M B, Schwarz J H, Witten E *Superstring Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987)
4. Polchinski J *String Theory* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998); "TASI lectures on D-branes", hep-th/9611050
5. Polyakov A M *Nucl. Phys. B* (*Proc. Suppl.*) **68** 1 (1998)
6. Maldacena J *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
7. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998)
8. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998)
9. Polchinski J *Phys. Rev. Lett.* **75** 4724 (1995); Dai J, Leigh R G, Polchinski J *Mod. Phys. Lett. A* **4** 2073 (1989); Horava P *Phys. Lett. B* **231** 251 (1989)
10. Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 335 (1996)
11. Witten E, Olive D *Phys. Lett. B* **78** 97 (1978)
12. Bagger J, Wess J *Supersymmetry and Supergravity* 2nd ed. (Princeton: Princeton University Press, 1992)
13. Klebanov I *Nucl. Phys. B* **496** 231 (1997)
14. Maldacena J, Strominger A *J. High Energy Phys.* **12** 8 (1997)
15. Gubser S S, Klebanov I R *Phys. Lett. B* **413** 41 (1997)
16. Aharony O et al. "Large N field theories, string theory and gravity" *Phys. Rep.* **323** 183 (2000); hep-th/9905111; Di Vecchia P "An introduction to AdS/CFT correspondence" *Fortschr. Phys.* **48** 87 (2000); hep-th/9903007; Douglas M R, Randjbar-Daemi S "Two lectures on the AdS/CFT correspondence", hep-th/9902022; Petersen J L "Introduction to the Maldacena conjecture on AdS/CFT" *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 3597 (1999); hep-th/9902131; Klebanov I R "From three-branes to large N gauge theories", hep-th/9901018;

Morozov A "Identities between quantum field theories in different dimensions", hep-th/9810031
17. Tseytlin A A, Fradkin E S *Phys. Lett. B* **160** 69 (1985); *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41** 169 (1985)
18. Maldacena J M, Ph. D. Thesis (Princeton: Princeton University, 1996), hep-th/9607235; Akhmedov E T "Black hole thermodynamics from the point of view of superstring theory" *Int. J. Mod. Phys. A* **15** 1 (2000); hep-th/9711153
19. Duff M J, Khuri R R, Lu J X *Phys. Rep.* **259** 213 (1995); Callan C G (Jr.), Harvey J A, Strominger A "Supersymmetric string solitons", hep-th/9112030
20. Leigh R G *Mod. Phys. Lett. A* **4** 2767 (1989)
21. Susskind L *J. Math. Phys.* **36** 6377 (1995)
22. 't Hooft G "Dimensional reduction in quantum gravity", gr-qc/9310026
23. Susskind L, Witten E "The holographic bound in anti-de Sitter space", hep-th/9805114
24. Tseytlin A A "On non-Abelian generalization of Born–Infeld action in string theory" *Nucl. Phys. B* **501** 41 (1997); hep-th/9701125
25. Ferrara S, Zaffaroni A "Bulk gauge fields in AdS supergravity and supersingletons", hep-th/9807090; Ferrara S, Fronsdal C *Class. Quant. Grav.* **15** 2153 (1998)
26. Maldacena J *Phys. Rev. Lett.* **80** 4859 (1998)
27. Rey S-J, Yee Y "Macroscopic strings as heavy quarks of large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity", hep-th/9803001
28. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 505 (1998)
29. Izhaki N et al. *Phys. Rev. D* **58** 46004 (1998)
30. Kachru S, Silverstein E *Phys. Rev. Lett.* **80** 4855 (1998)
31. Lawrence A, Nekrasov N, Vafa C *Nucl. Phys. B* **533** 199 (1998)
32. Klebanov I R, Tseytlin A A "D-branes and dual gauge theories in type 0 string theory" *Nucl. Phys. B* **546** 155 (1999); hep-th/9811035
33. Polyakov A "The wall of the cave" *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 645 (1999); hep-th/9809057

Correspondence between supersymmetric Yang–Mills and supergravity theories

É.T. Akhmedov
Institute of Theoretical and Experimental Physics
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *129-97 68. Fax* (*7-095*) *129-96 49*
E-mail: *akhmedov@itep.ru*; *akhmedov@physics.ubc.ca*;
University of British Columbia,
6224 Agricultural Rd, Vancouver BC, Canada, V6T 1Z1

The AdS/CFT correspondence establishes a relationship between supersymmetric gravity (SUGRA) on anti-de Sitter (AdS) space and supersymmetric Yang–Mills (SYM) theory, which is a conformally invariant theory (CFT). The AdS space is the solution of the Einstein–Hilbert equations with a constant negative curvature. Why is this relationship important? What kind of relationship is this? How does one find it? The purpose of this paper is to answer these questions. We try to present the main ideas and arguments underlying this relationship, starting with a brief sketch of old string theory results and proceeding with the definition of D-branes and a description of their main features. The demonstration of the discussed correspondence and arguments it its favor conclude the paper.

PACS numbers: **04.65.+e**, **11.25.–w**, 12.60.Jv

Bibliography — 33 references

Received 30 May 2000, revised 29 December 2000