

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.6+550.388

ИОНОСФЕРНАЯ АЭРОДИНАМИКА

А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, В. В. Смирнова

I. ВВЕДЕНИЕ

С момента запуска первых искусственных спутников Земли значительный интерес стали вызывать проблемы ионосферной аэродинамики — теории обтекания движущихся тел разреженной ионосферной плазмой. Основные результаты проведенных до 1964 г. исследований в этой области были изложены в обзоре¹ и монографии². За время, прошедшее после опубликования этих работ, были получены существенно новые результаты, изложению которых посвящен настоящий обзор. Здесь прежде всего следует отметить вопрос о влиянии на обтекание электрического поля, возникающего вследствие возмущения плазмы телом. Этой проблеме в обзоре уделено основное внимание.

Ограниченность объема не позволяет нам осветить все вопросы, в которых был достигнут прогресс за последние годы. Однако для удобства читателей в списке литературы приводятся также ссылки на статьи по проблемам, связанным с обтеканием тел, но непосредственно в обзоре не рассматривающимся.

В дальнейшем будем исходить из условий, реально существующих в ионосфере в области максимума концентрации заряженных частиц. При этом температура ионов $T_i \sim 1000^\circ\text{К}$, а температура электронов³ $T_e \sim (1-2,5) \times 10^3^\circ\text{К}$. При скорости тела $v_0 = 8 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ число Маха оказывается порядка $b = (Mv_0^2/2T)^{1/2} \sim 8-6$ и можно считать, что

$$b = \sqrt{\frac{Mv_0^2}{2T_e}} \gg 1 \quad (1)$$

(здесь M — масса иона); в численной оценке принято, что имеются ионы кислорода O^+ . Следует отметить, что выше 400 км появляются ионы гелия He^+ и водорода H^+ . На высотах, превышающих 1000 км, последние составляют подавляющее большинство. Это приводит к уменьшению числа Маха до $b \sim 1,2$. С другой стороны,

$$\sqrt{\frac{mv_0^2}{2T_e}} \sim 5 \cdot 10^{-2} \ll 1, \quad (2)$$

где m — масса электрона, т. е. скорость тел всегда много меньше тепловой скорости электронов.

Концентрация электронов $N_e \sim 10^5 - 10^6 \text{ см}^{-3}$. При этом дебаевский радиус

$$D = \left(\frac{T_e}{4\pi e^2 N_e} \right)^{1/2} \sim 0,1 - 0,5 \text{ см.}$$

Поэтому для реальных тел в ионосфере с размером $R_0 \sim 1$ м с хорошим запасом выполняется неравенство

$$R_0 \gg D. \quad (3)$$

Что же касается длины свободного пробега ионов и электронов, то на высотах $h \gtrsim 150-200$ км она велика: $l \sim 100$ м. Следовательно, $l \gg R_0$ и влиянием столкновений можно в первом приближении пренебречь. Мы не будем также касаться вопросов, связанных с влиянием магнитного поля на движение электронов и ионов. Как известно (см. 2), это влияние становится существенным на достаточно большом расстоянии от тела ($z \gtrsim Mcv_0/eH$).

II. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОН ПОДОБИЯ

Пренебрежение столкновениями позволяет описывать задачу с помощью бесстолкновительных кинетических уравнений для функций распределения ионов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и электронов $f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. В системе координат, связанной с движущимся телом, задача стационарна и уравнение для функции распределения ионов имеет вид

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (4)$$

(Φ — электрический потенциал). Уравнение для f_e отличается от (4) лишь заменой $M \rightarrow m$, $e \rightarrow -e$. К этим уравнениям нужно добавить уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = -4\pi e \left(\int f d^3v - \int f_e d^3v \right). \quad (5)$$

Упростим уравнения (4), (5), используя неравенства (1) — (3) ⁴. Прежде всего используем неравенство (3) и учтем, что характерный размер неоднородности, возникающей при движении тела, есть R_0 , а характерные потенциалы $\sim T_e/e$. При этом левая часть (5) имеет порядок T_e/eR_0^2 , а правая $4\pi e (N_e - N_i)$. Составим их отношение

$$\frac{T_e}{4\pi e^2 N R_0^2} \sim \left(\frac{D}{R_0} \right)^2. \quad (6)$$

Это значит, что в (5) при условии (3) можно вообще пренебречь левой частью и написать вместо (5) условие квазинейтральности $N_e = N_i$, или

$$\int f d^3v = \int f_e d^3v. \quad (7)$$

К этому, однако, необходимы некоторые замечания. Дело в том, что квазинейтральность заведомо нарушается в непосредственной близости к поверхности тела. Вблизи поверхности имеется экранирующий слой толщиной порядка дебаевского радиуса, распределение потенциала в котором зависит от граничных условий на теле, от потенциала тела. В силу условия (3) толщина этого слоя, вообще говоря, мала. Существенно, однако, что в области позади тела плазма сильно разрежена, так что дебаевский радиус здесь может быть значительно больше, чем в окружающем пространстве. Здесь в «области максимального разрежения» ^{1, 2} отклонения от квазинейтральности значительны. Оценим размер этой области l позади диска радиуса R_0 , обтекаемого потоком плазмы. Минимальная плотность на оси z позади диска имеет порядок (при $T_e = T_i$)

$$\frac{N_{\min}}{N} \sim \sqrt{b} \left(b + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \exp \left(-\frac{\pi b}{\sqrt{2}} \right)$$

(см. в гл. IX формулу (73a)). Поэтому размер l определен соотношением

$$l \sim \frac{D}{b^{1/4} \left(b + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right)^{1/2}} \exp \left(\frac{\pi b}{2\sqrt{2}} \right), \quad D = \left(\frac{T_e}{4\pi e^2 N_0} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что в условиях ионосферы $l \sim 0,5R_0$. Мы видим, что максимальное значение l гораздо больше, чем D , но все же меньше, чем R_0 . Это означает, что в большей части возмущенной зоны отклонения от квазинейтральности невелики, хотя размеры области максимального разрежения оказываются довольно значительными *).

Переход от (5) к (7) приводит не только к существенному упрощению вычислений. При таком переходе из уравнений исчезает электрический заряд e . Действительно, если ввести вместо ϕ безразмерный потенциал то

$$\psi = \frac{e\phi}{T_e}, \quad (8)$$

уравнение не будет содержать e . Это существенно меняет размерностный характер уравнений, так как вместе с e исчезает и естественный параметр размерности длины — дебаевский радиус **). В задаче остаются лишь параметры, характеризующие размеры тела. Это, в частности, приводит к тому, что картина обтекания тела подобной формы при заданной скорости v_0 оказывается подобной. Кроме того, относительная концентрация N/N_0 (где N_0 — концентрация невозмущенной плазмы) оказывается независимой от N_0 .

Отметим также, что размерностная структура уравнений (4), (7) оказывается той же, что и уравнений гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости. Это указывает на возможность сходства с гидродинамикой в характере основных явлений.

Используем теперь условие (2) — медленность движения тела по сравнению со скоростью электронов. В реальных условиях поверхность тела обычно обладает отрицательным потенциалом ϕ_0 . Если

$$\exp \left(\frac{e\phi_0}{T_e} \right) \ll 1,$$

то электронный ток на теле мал и слабо нарушает равновесность электронного газа. При этом электроны будут находиться в равновесии во всех областях плазмы, где потенциал отрицателен и отсутствуют потенциальные ямы. (В области, где имеются потенциальные ямы, часть электронов не может попасть без столкновений.) Фактически это относится ко всей возмущенной области позади тела, где плотность электронов, таким образом, дается формулой Больцмана

$$N_e = N_0 \exp \left(\frac{e\phi}{T_e} \right). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем прямо уравнение, выражающее ϕ через f :

$$\phi = \frac{T_e}{e} \ln \left(\frac{\int f d^3v}{N_0} \right). \quad (10)$$

*) Случай, когда размер области максимального разрежения сравним с R_0 , рассматривался в ² (стр. 127). Следует вместе с тем отметить, что расчет N_{\min} производился в этой работе без учета влияния электрического поля на движение ионов, что приводило к большим величинам разрежения и заметно увеличивало размеры области максимального разрежения.

**) Исчезновение e из уравнений не означает, конечно, пренебрежения возникающими при движении электрическими полями. Напротив, переход от (5) к (7) формально соответствует пределу $e \rightarrow \infty$.

Упростим, наконец, уравнение (4), используя «гиперзвуковой» характер движения тела, что выражается неравенством (1). Если выбрать ось z по направлению набегающего потока, то уравнение (4) запишется в виде

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{e}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{e}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} = 0,$$

где \mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1 — проекции векторов \mathbf{r} , \mathbf{v} на плоскость, перпендикулярную оси z . При условии (1) возмущенная область оказывается вытянутой вдоль оси z . Если ее поперечный размер $\sim R_0$, то продольный размер — порядка bR_0 . Поэтому $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} \right| \gg \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ и членом с $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ можно пренебречь. Кроме того, в системе отсчета, связанной с телом, $v_z \approx v_0$, т. е. можно пренебречь тепловым разбросом ионов в направлении z . Окончательно получим

$$v_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{e}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение вообще не содержит v_z . Поэтому можно вместо f ввести в качестве неизвестной функции $\int f dv_z$.

Перейдем сразу к безразмерным переменным. Положим *)

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{2T_e}{M}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}_1 = R_0 \boldsymbol{\rho}, \quad z = tR_0 b, \quad b = \left(\frac{Mv_0^2}{2T_e} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

$$\int f dv_z = \frac{MN_0}{2\pi T_e} g(t, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}), \quad \psi = \frac{e\Phi}{T_e}.$$

Подставляя (12) в (11) и (7), получим систему уравнений, в которой сделаны все возможные упрощения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} &= 0, \\ \psi &= \ln \int_{-\infty}^{\infty} \int g d^2 u. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Перейдем к формулировке граничных условий для системы (13). Мы будем предполагать, что поверхность тела такова, что все попавшие на нее ионы рекомбинируют, т. е. отлетают в виде нейтральных атомов. Это с достаточной точностью соответствует обычным условиям на металлической поверхности⁵. При этом на поверхности тела должно выполняться условие отсутствия отраженных ионов

$$f = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{n} \mathbf{v} > 0 \quad (14)$$

(\mathbf{n} — нормаль к поверхности тела). Отметим прежде всего, что отсутствие отраженных частиц и пренебрежение разбросом скоростей в направлении z в (13) приводят к тому, что возмущение впереди тела вообще отсутствует. Если поместить начало отсчета в самой передней точке тела, то это означает

$$g = \exp \left(-\frac{Mv_i^2}{2T_i} \right) = \exp(-\beta u^2) \quad \text{при} \quad t < 0, \quad (15)$$

$$\beta = \frac{T_e}{T_i}.$$

*) Мы вводим в определение безразмерной скорости ионов \mathbf{u} температуру электронов T_e , имея в виду, что в наших условиях $T_e \gg T_i$. Вообще в это определение следует вводить большую из величин T_e и T_i , так как именно большая из температур определяет характерные особенности движения.

Граничное условие (14) переписывается при этом в безразмерных переменных (12) в виде условия на контуре сечения тела

$$g = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{n}_1 \mathbf{u} > -n_z b,$$

где \mathbf{n}_1 — нормаль к контуру сечения тела в плоскости $t = \text{const}$. Учитывая, что $n_z b = \text{ctg } \alpha$, где α — угол между нормалью \mathbf{n} к поверхности и осью t (в координатах ρ, t), окончательно получаем

$$g = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{n}_1 \mathbf{u} > -\text{ctg } \alpha. \quad (16)$$

Сечение, разумеется, меняется с изменением t . Например, контуры сечения сферического тела — окружности радиуса $r(t) = \{1 - b^2 [t - (1/b)]^2\}^{1/2}$. Кроме того, на больших расстояниях от тела возмущения должны убывать:

$$g \rightarrow \exp(-\beta u^2) \quad \text{при} \quad |\rho|, t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Важное упрощение граничных условий для не сильно вытянутых тел (т. е. тел, продольный размер которых порядка поперечного) связано с тем, что в координатах ρ, t тело сплющивается в $b = (Mv_0^2/2T_e)^{1/2}$ раз. Отношение его продольного размера к поперечному в переменных ρ, t порядка $1/b$. Поэтому при $b \gg 1$ само тело можно заменить пластинкой, совпадающей с максимальным поперечным сечением тела. Совмещая, кроме того, начало отсчета $t = 0$ с плоскостью максимального сечения S , переписываем граничные условия (15), (16) при $t \rightarrow +0$ в виде

$$\left. \begin{aligned} g &= 0, \text{ если } R_0 \rho \text{ лежит в } S; \\ g &= \exp(-\beta u^2), \text{ если } R_0 \rho \text{ лежит вне } S. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Физический смысл уравнений (13) с граничным условием (18) ясен: они определяют, как ионы заполняют во времени t в плоскости ρ пустую область, равную максимальному сечению тела S . Так и должно быть при больших значениях числа Маха $b \gg 1$: быстро пролетевшее тело поглощает все ионы в цилиндрической области с поперечным размером, равным максимальному сечению тела, затем эта область заполняется плазмой *).

Следует иметь в виду, что разрывный характер граничных условий (18) приводит к сингулярности в последнем члене уравнения (13) при $t = 0$ в точках ρ_0 , лежащих на контуре максимального сечения тела. Рассмотрим поэтому особо окрестность точек сингулярности. Положим $\xi = \mathbf{n}_1 (\rho_0 - \rho)$ (где \mathbf{n}_1 — нормаль к сечению S в точке контура ρ_0) и рассмотрим малые ξ и t :

$$|\xi| \ll 1, \quad t \ll 1. \quad (19)$$

При выполнении условия (19) можно пренебречь кривизной контура вблизи точки ρ_0 . Кроме того, ионы, огибающие другой край тела, не успевают попасть в точку наблюдения. В задаче тогда отсутствует какой-либо характерный пространственный размер. В этом случае решение уравнений (13) может зависеть только от отношения ξ/t , т. е. движение является автомодельным. Полагая

$$\left. \begin{aligned} g_a(\tau, u_\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau, u_\xi, u_\eta) du_\eta, \\ \tau &= \frac{\xi}{t}, \quad u_\xi = \mathbf{u} \mathbf{n}_1, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

*) Отметим, что решение, найденное с граничными условиями (18), справедливо лишь на достаточном расстоянии от поверхности тела, точнее при $t \gg b^{-2/3}$. Точное распределение вблизи поверхности тела можно найти, лишь используя граничные условия (16).

получаем из (13) для функции g_a следующее уравнение ⁴:

$$(u_\xi - \tau) \frac{\partial g_a}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_a}{\partial u_\xi} \frac{d}{d\tau} \left(\ln \int_{-\infty}^{\infty} g_a du_\xi \right) = 0. \quad (21)$$

Граничное условие (18) для функции g_a переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow -\infty, \quad g_a &\rightarrow \exp(-\beta u^2) \quad (\beta = T_e/T_i), \\ \tau \rightarrow +\infty, \quad g_a &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (21) с граничным условием (22) не содержит уже никаких сингулярностей. Решение уравнения (21), которое будет получено в следующей главе, описывает распределение ионов вблизи края тела. Оно представляет собой, таким образом, «правило обхода» для сингулярности, возникающей в уравнении (13), и играет особую роль при анализе характера возмущения плазмы в ближней к телу области ($t \ll 1$). Граничное условие (18) при $t \rightarrow +0$ переписывается в виде

$$g(\rho, u) = \exp(-\beta u_\eta^2) g_a(\tau, -u_\xi), \quad (23)$$

где $\tau = n_1(\rho_0 - \rho)/t$, ρ_0 — точка контура максимального сечения, n_1 — нормаль к контуру в точке ρ_0 , u_ξ — скорость в направлении нормали, u_η — скорость в тангенциальном направлении. Функция $g_a(\tau, u_\xi)$ определена уравнениями (21), (22).

Решение системы уравнений (13) с граничным условием (16) является универсальной функцией от ρ, u, t и β . Вследствие этого формула (12) после перехода в ней к размерным величинам выражает закон подобия при движении: подобны картины обтекания тел, контуры которых в переменных ρ, t одинаковы. При этом, например, истинные длины тел относятся, как их скорости.

Для быстро движущихся и не слишком сильно вытянутых тел справедливы граничные условия (18). В этом случае подобны картины обтекания тел, имеющих подобные максимальные сечения. Например, если максимальное сечение тела — круг радиуса R_0 , то, учитывая цилиндрическую симметрию задачи, приходим из (12) к следующему выражению для функции распределения ионов:

$$f = N_0 \left(\frac{M}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{Mv_z^2}{2T_i} \right) g \left(v_1 \sqrt{\frac{M}{2T_e}}, \frac{r_1}{R_0}, \frac{z}{R_0} \sqrt{\frac{2T_e}{Mv_0^2}}; \frac{T_e}{T_i} \right).$$

Эта формула и выражает правило подобия в рассматриваемом случае. концентрация частиц в возмущенной зоне может быть тогда представлена в виде

$$N(z, \theta) = N_0 f_1 \left(\frac{z}{R_0} \operatorname{tg} \theta, \frac{z}{R_0} \sqrt{\frac{2T_e}{Mv_0^2}}; \frac{T_e}{T_i} \right)$$

($\operatorname{tg} \theta = r_1/z$). В частности, на больших расстояниях позади тела ($z \gg R_0 (Mv_0^2/2T_e)^{1/2}$) функция f_1 , как показано в ², § 15, имеет вид

$$f_1 = 1 - \frac{\pi R_0^2}{z^2} \frac{Mv_0^2}{2T_e} f_2 \left(\sqrt{\frac{Mv_0^2}{2T_e}} \operatorname{tg} \theta; \frac{T_e}{T_i} \right).$$

Вид функции f_2 для $T_e/T_i = 1$ найден в ^{6,7}.

Отметим, что установленные законы подобия аналогичны существующим в гиперзвуковой аэродинамике ⁸. Это неудивительно, если вспомнить отмечавшееся ранее размерностное сходство соответствующих уравнений.

III. ОБТЕКАНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим обтекание бесконечной полуплоскости. Направим ось y параллельно краю полуплоскости, ось ρ — ортогонально к нему. Очевидно, что функция распределения $g(t, \rho, u)$ не зависит от y :

$$g(t, \rho, u) = g_1(t, \rho, u) \exp(-\beta u^2). \quad (24)$$

Учитывая, кроме того, что в задаче отсутствует какой-либо характерный пространственный размер, заключаем, что функция g_1 может зависеть только от отношения ρ/t , т. е. движение в рассматриваемом случае является автомодельным. Функция g_1 , следовательно, тождественно совпадает с функцией $g_a(\tau, u_\xi)$, рассмотренной в предыдущей главе ($\tau = \rho/t$, $u_\xi = u$). Она описывается автомодельным уравнением (21) с граничными условиями (22).

Прежде чем переходить к исследованию уравнения (21) в общем виде⁹, рассмотрим сначала два предельных случая, соответствующие различным значениям отношения температур $\beta = T_e/T_i$.

1. Пусть сначала

$$T_i \gg T_e, \quad \beta \ll 1. \quad (25)$$

В этом случае, как видно из (10), потенциал ϕ мал и в кинетическом уравнении можно пренебречь членом, содержащим ϕ . Введя безразмерные переменные

$$u = \sqrt{\frac{M}{2T_i}} v_\rho, \quad \tau = \frac{\rho}{t} = \frac{\rho}{z} \sqrt{\frac{Mv_0^2}{2T_i}}, \quad t = z \sqrt{\frac{2T_i}{Mv_0^2}}$$

(обозначения (12), (20) неудобны при $T_e \rightarrow 0$; см. сноску на стр. 6), получим уравнения и граничные условия в виде

$$\left. \begin{aligned} (u - \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} &= 0, \\ g &\rightarrow \exp(-u^2), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad g \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Это означает, что $\frac{\partial g}{\partial \tau}$ отлично от нуля только при $u = \tau$. Поэтому

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = A(u) \delta(u - \tau). \quad (27)$$

Проинтегрируем это равенство по $d\tau$ от $-\infty$ до $+\infty$ и используем (26). В результате найдем

$$A(u) = g|_{\tau \rightarrow +\infty} - g|_{\tau \rightarrow -\infty} = -\exp(-u^2).$$

Если теперь проинтегрировать (27) по τ от $-\infty$ до τ и использовать найденное значение $A(u)$, то получим*)

$$g(u) = \begin{cases} \exp(-u^2) & \text{при } \tau < u, \\ 0 & \text{при } \tau > u. \end{cases} \quad (28)$$

Соответственно плотность частиц задается формулой

$$\frac{N_n(\tau)}{N_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{\infty} \exp(-u^2) du = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\tau)], \quad (29)$$

*) Движение ионов в рассматриваемом случае тождественно движению нейтральных частиц, поскольку действие на ионы электрического поля при выполнении условия (25) пренебрежимо мало. Поэтому формулу (28) можно легко получить, непосредственно исходя из геометрической картины свободного движения частиц.

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей. Приведем также асимптотическую формулу для $N_n(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ (т. е. вблизи самой плоскости)

$$\frac{N_n(\tau)}{N_0} = \frac{\exp(-\tau^2)}{2\sqrt{\pi\tau}}, \quad \tau \gg 1. \quad (30)$$

2. Рассмотрим теперь другой предельный случай

$$T_i \ll T_e, \quad \beta \gg 1.$$

В этом случае тепловая скорость ионов оказывается меньшей, чем упорядоченная скорость, приобретаемая ими в электрическом поле. Поэтому нет необходимости пользоваться кинетическим уравнением. Достаточно написать уравнение прямо для этой упорядоченной скорости \mathbf{v} . Такое уравнение имеет вид уравнения гидродинамики, в котором градиент давления заменяется силой, действующей со стороны электрического поля. В стационарном случае*)

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{e}{M} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = -\frac{T_e}{M} \frac{\nabla N}{N}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}N) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Производя те же упрощения, что и при выводе (13), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{2N} \frac{\partial N}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho}(\bar{u}N) &= 0, \quad \bar{u} = v_p \sqrt{\frac{M}{2T_e}}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Наконец, переходя к переменной τ , имеем

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u} - \tau) \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\tau} &= 0, \\ (\bar{u} - \tau) \frac{dN}{d\tau} + N \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Система (33) имеет два решения: одно — тривиальное $N = \text{const}$, $\bar{u} = \text{const}$ и второе

$$\begin{aligned} (\bar{u} - \tau)^2 &= \frac{1}{2}, \\ \bar{u} &= \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N = C \exp(-\sqrt{2}\tau), \end{aligned} \quad (34)$$

где C — произвольная постоянная (ср. ¹¹, стр. 443).

Непрерывное решение, удовлетворяющее граничным условиям (22) ($N = N_0$, $\bar{u} = 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0, \quad N = N_0 \quad \text{при} \quad \tau < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{u} &= \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N = N_0 \exp(-\sqrt{2}\tau - 1) \quad \text{при} \quad \tau > -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Электрическое поле, возникающее при обтекании, имеет вид

$$E = \frac{v_0 \sqrt{MT_e}}{ez \sqrt{2}} F, \quad F = -\frac{d \ln N}{d\tau} = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}, & \tau > -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (36)$$

*) Отметим, что система (31) совпадает с системой уравнения для изотермического движения идеального газа с температурой T_e .

Линия $\tau = -1/\sqrt{2}$ является линией слабого разрыва, разделяющей области покоящегося и движущегося газа. На этой линии испытывают разрыв первые производные от \bar{u} и N . Разрыв в напряженности электрического поля означает, что на этой линии имеется экранирующий электрический слой. В действительности, разумеется, этот слой имеет конечную толщину $\sim D^{12}$.

Отметим, что асимптотически при больших τ (35) приводит к гораздо большим значениям N , чем (30) ($N \sim \exp(-\tau/\sqrt{2})$ вместо $N_n \sim \sim \exp(-\tau^2)$). Это, как мы увидим далее, общий результат при конечном β , связанный с сильным влиянием электрического поля на движение ионов: имеет место ускорение части ионов электрическим полем. (То же видно ниже из рис. 2, б, где график для N_n проведен штриховой линией.)

Перейдем к исследованию уравнения (21) в случае произвольных значений $\beta \sim 1$. Уравнение (21) первого порядка. Как известно, нахождение функции $g_a(u, \tau)$ сводится в этом случае к нахождению характеристик уравнения, т. е. кривых, на которых функция g_a имеет постоянное значение. Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{F(\tau)}{u - \tau}, \quad (37)$$

где

$$F(\tau) = -\beta \frac{d}{d\tau} \left(\ln \int_{-\infty}^{\infty} g_a du \right).$$

При $\tau \rightarrow -\infty$ $F \rightarrow 0$ и характеристики имеют вид прямых $u = \text{const}$, причем на каждой прямой функция распределения имеет значение $\exp(-\beta u^2)$. Чтобы определить значение g в точке u, τ , необходимо найти характеристику, которая проходит через эту точку. Значение g в точке u, τ будет тогда равно $\exp(-\beta u_0^2)$, где u_0 — ордината той прямой $u = u_0$, на которую выходит эта характеристика при $\tau \rightarrow -\infty$. Исследуем качественно ход характеристик в плоскости u, τ . Прежде всего очевидно, что $F > 0$, так как концентрация плазмы убывает с увеличением τ . Это означает, что значение $du/d\tau$ вдоль всех характеристик при $u > \tau$ больше нуля, т. е. скорость u вдоль характеристики монотонно возрастает с ростом τ .

Очень важно, что ни одна из характеристик не может пересечь прямую $u = \tau$. Действительно, вблизи точки $\tau = \tau_0$, в которой $u = \tau$, решение уравнения (37) имеет вид

$$(u - \tau)^2 = F(\tau_0)(\tau - \tau_0).$$

Обе ветви этой кривой направлены в сторону больших τ . Поэтому, учитывая монотонность $u(\tau)$ вдоль характеристик при $u > \tau$, заключаем, что характеристика, пересекающая прямую $u = \tau$, не может относиться к семейству характеристик, выходящих из области $\tau \rightarrow -\infty$, где заведомо $u > \tau$.

Проведенное исследование показывает, что в нашей задаче функция распределения g_a равна нулю при $u < \tau$. Действительно, при больших отрицательных τ функция g_a максвелловская и частиц с $u < \tau$ нет из-за экспоненциального убывания этой функции при $u \rightarrow \pm \infty$. В дальнейшем же характеристики не пересекут прямую $u = \tau$, так что частиц с $u < \tau$ не появится. Этот факт имеет простой физический смысл. Действительно, в начальный момент $t = 0$ все частицы находятся вне полуплоскости (т. е. при $\rho < 0$). Поэтому в точке $\rho/t = \tau$ могут появиться лишь частицы, имеющие скорость $u > \rho/t$. Это тем более справедливо, если учесть еще влияние электрического поля, так как оно лишь увеличивает скорость ионов u .

Отметим далее, что максимальное значение функции распределения при любом τ равно единице. Это следует из того, что характеристика, на которой $g_a = 1$, имеется на плоскости u, τ при любых τ . Действительно,

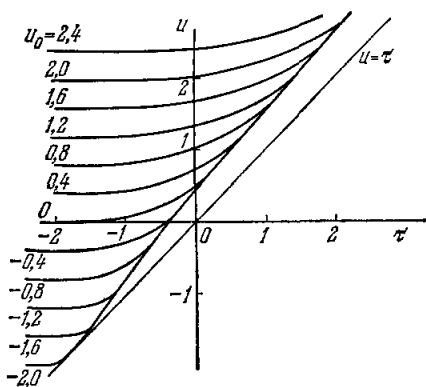


Рис. 1. Обтекание полуплоскости: ход характеристик в плоскости u, τ для $\beta = T_e/T_i = 1$.

но, отсутствие этой характеристики при некотором τ означало бы, что эта характеристика при каком-то конечном τ повернула назад, что невозможно ввиду монотонности $u(\tau)$. Это свойство позволяет сделать важное заключение об асимптотическом поведении $g_a(u, \tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Действительно, по порядку величины концентрация

$$n(\tau) = \frac{N}{N_0} \sim g_{\max} \Delta u \sim \Delta u, \quad (38)$$

где Δu — ширина кривой функции распределения. Но при $\tau \rightarrow \infty$ $n(\tau) \rightarrow 0$, а следовательно, и $\Delta u \rightarrow 0$. Иными словами, по мере увеличения τ ионы делаются все более монохроматическими, их температура па-

дает. Это позволяет для определения асимптотического поведения g_a и n воспользоваться прямо гидродинамическими формулами (34), (35),

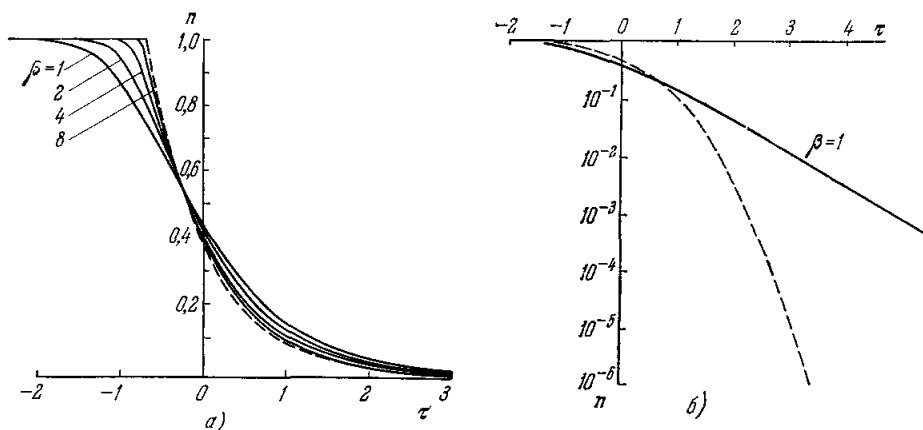


Рис. 2. Обтекание полуплоскости: а) зависимость концентрации $n = N/N_0$ от τ ; б) то же в логарифмическом масштабе ($\beta = 1$).

согласно которым средняя скорость ионов должна быть равна

$$\bar{u} = \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Это означает, что при $\tau \rightarrow +\infty$ все характеристики должны сгущаться вокруг прямой

$$\bar{u} = \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рис. 1 иллюстрирует ход характеристик для $\beta = T_e/T_i = 1$. Асимптотическое поведение концентрации определяется формулой (34):

$$n = C \exp(-\sqrt{2}\tau), \quad (39)$$

где постоянная C должна определяться из сшивания с численным решением. Сразу укажем, что при $T_e = T_i$ ($\beta = 1$) $C \approx 0,71$; при $T_e \gg T_i$, согласно (35), $C = e^{-1} \approx 0,373$. (Кривая $n(\tau)$ для $\beta = \infty$ показана на рис. 2, a штриховой линией.) Для определения $n(\tau)$ при всех τ характеристики искались численно⁹. Решение велось шагами по τ . После каждого

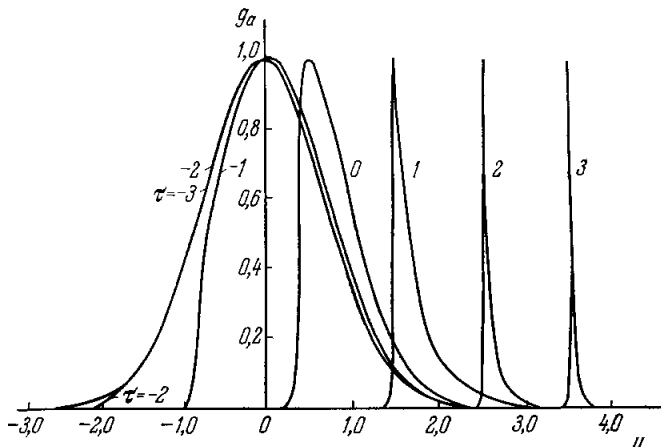


Рис. 3. Обтекание полуплоскости: функция распределения $g_a(u)$ для различных значений τ .

шага производилось вычисление $n(\tau)$ и $F(\tau)$. Полученное значение F использовалось для вычисления приращения Δu на следующем шаге:

$$\Delta u = u_{k+1} - u_k = \frac{1}{2} \frac{F(\tau_k)}{u_k - \tau_k} \Delta \tau.$$

Полученные значения $n(\tau)$ при различных β приведены на рис. 2. На рис. 3 построены графики функции распределения $g_a(u)$ при различных значениях τ (для случая $\beta = 1$). Из рисунка видно, что в области сильного разрежения ($\rho/t = \tau \gg 1$) распределение ионов по скоростям приобретает иглообразный характер. Эффективный разброс ионов по скоростям Δu или эффективная температура ионов T_i эфф, как видно из (38) и (39), экспоненциально резко убывают с ростом τ :

$$T_{i \text{ эфф}} \sim (\Delta u)^2 \sim \exp(-2\sqrt{2}\tau). \quad (40)$$

Это существенно сказывается на устойчивости возмущенной зоны за движущимся телом (см. гл. XI). Ход безразмерной силы F и потенциала ψ представлен на рис. 4. На рис. 5, a в переменных ρ, t построены поверхности постоянных значений концентрации при обтекании полуплоскости.

Произведенные вычисления требуют уточнения при больших τ . Дело в том, что до сих пор мы везде (в том числе при переходе от (31) к (32)) полагали $v_z = v_0$ и пренебрегали производными по z . Легко понять,

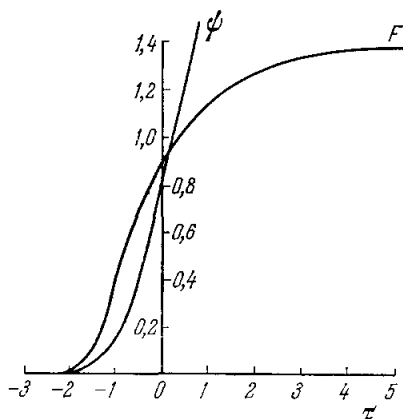


Рис. 4. Обтекание полуплоскости: зависимость от τ безразмерного потенциала $\psi = -e\phi/T_e$ и напряженности электрического поля F .

что это приближение перестает годиться при $x \sim z$, т. е. при

$$\tau \gtrsim b. \quad (41)$$

Действительно, при таких τ потенциальная энергия ионов $e\varphi$ делается порядка $Mv_0^2/2$, поэтому значение v_z существенно изменяется полем. Производные же по z возрастают с ростом τ и также делаются существенными в области (41). Важно, однако, что при условии (41) заведомо $\tau \gg 1$.

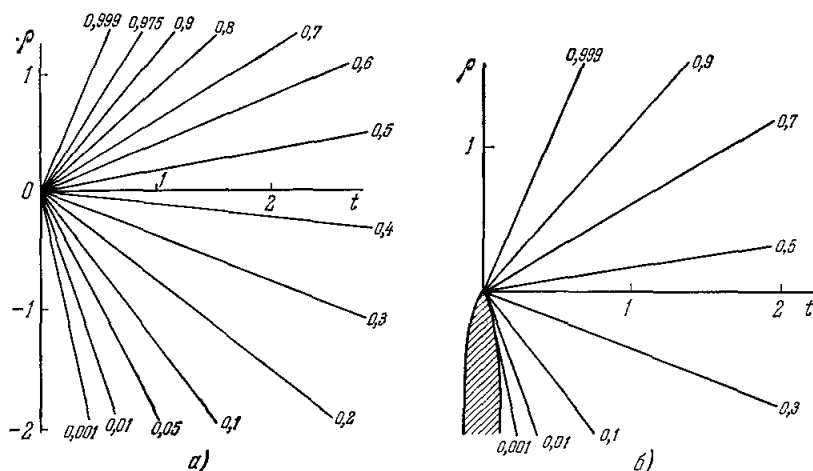


Рис. 5. Поверхности постоянной концентрации ионов.

Значения $n = N/N_0$ указаны на рисунках. а) Обтекание полуплоскости ($\beta = T_e/T_i = 1$); б) обтекание закругленного края тела ($\beta = 1$, $b = \sqrt{Mv_0^2/2T_e} = 8$).

Поэтому ионы являются монохроматическими. Это позволяет воспользоваться уравнениями гидродинамики (31), которые для безразмерных величин u и ψ можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} (u\nabla)u + \frac{1}{2}\nabla\psi &= 0, \\ \operatorname{div} u + u\nabla\psi &= 0, \\ \psi &= \ln n, \quad n = \frac{N}{N_0}. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения легко решаются в полярных координатах (ср. ¹¹, § 101). Введем азимутальный угол φ , отсчитываемый от оси z , соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau}{b} = -\frac{\rho}{tb} = \frac{x}{z}.$$

Все величины будут по-прежнему являться функциями только от τ или, что то же самое, от φ .

Из первого уравнения следует соотношение, выражающее потенциальность скорости u :

$$\frac{du_r}{d\varphi} = u_\varphi,$$

и уравнение Бернулли

$$\psi + u_\varphi^2 + u_r^2 = \psi_0,$$

где ψ_0 — произвольная постоянная.

Уравнение непрерывности в компонентах u_r , u_φ имеет вид

$$u_r + \frac{du_\varphi}{d\varphi} + u_\varphi \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

Используя предыдущие равенства, его можно привести к форме

$$\frac{d\psi}{d\varphi} \left(u_{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \right) = 0,$$

откуда

$$u_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, интегрируя уравнение для u_r , имеем

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi + \varphi_0)$$

(φ_0 — другая произвольная постоянная). В результате

$$\ln n = \psi = \psi_0 - \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)^2 - \frac{1}{2} = \psi_0 - \frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{1}{2} - \varphi\varphi_0 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

При условии

$$\tau \ll b, \quad \varphi \ll 1$$

это выражение должно переходить в (39), откуда

$$\varphi_0 = \sqrt{2} b, \quad \psi_0 - \frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{1}{2} = \ln C(\beta).$$

Окончательно получаем выражение для концентрации ионов

$$n = C(\beta) \exp \left(-\sqrt{2} b \varphi - \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (42)$$

Отметим две важные особенности полученных формул. Во-первых, вблизи плоскости продольная скорость ионов

$$v_z \approx -\sqrt{\frac{2T_e}{M}} u_{\varphi} = -\sqrt{\frac{T_e}{M}}.$$

Электрическое поле меняет даже знак продольной скорости. Поэтому в конце концов все ионы попадают на обратную поверхность полуплоскости. Далее, на этой поверхности концентрация ионов остается конечной и равной

$$n_{\min} = C \exp \left(-\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi b}{\sqrt{2}} \right).$$

Разумеется, на достаточно близком расстоянии от края полуплоскости при больших b перестает годиться квазинейтральное приближение (7).

IV. ОБТЕКАНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПЛАЗМОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ СМЕСЬ ИОНОВ

В значительной области ионосферной плазмы на высотах от 400 до 1500 км имеются ионы разных масс (в основном кислорода и водорода, меньше — гелия³). Фактический интерес поэтому представляет рассмотрение обтекания тел потоком плазмы, содержащей смесь ионов. Автомодельные уравнения для задачи об обтекании полуплоскости без труда можно написать и для этого случая. При этом, разумеется, вместо уравнения (24) записывается система уравнений для функций распределения каждого сорта ионов. Например, в случае ионов двух сортов с массами M_1

и M_2 имеем

$$\begin{aligned} (u_1 - \tau) \frac{\partial g_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \frac{d}{d\tau} \left[\ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1 du_1 + \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_2 du_2 \right) \right] &= 0, \\ (u_2 - \tau) \frac{\partial g_2}{\partial \tau} - \frac{M_1}{2M_2} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \frac{d}{d\tau} \left[\ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1 du_1 + \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_2 du_2 \right) \right] &= 0; \end{aligned} \quad (43)$$

здесь $u_1 = v_1 / \sqrt{2T_e/M_1}$, $u_2 = v_2 / \sqrt{2T_e/M_1}$. Граничные условия при $\tau \rightarrow \infty$:

$$g_1 \rightarrow \exp(-\beta u_1^2), \quad g_2 \rightarrow \alpha \exp\left(-\beta u_2^2 \frac{M_1}{M_2}\right).$$

Решение уравнений (43) зависит теперь не только от $\beta = T_e/T_i$, но и от отношений масс M_1/M_2 и начальных концентраций $\alpha = N_{20}/N_{10}$.

Проанализируем асимптотическое поведение решения при больших значениях τ . Для этого, как и в гл. III, воспользуемся гидродинамическими уравнениями

$$\begin{aligned} (u_1 - \tau) \frac{\partial N_1}{\partial \tau} + N_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= 0, \quad (u_1 - \tau) \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{1}{2(N_1 + N_2)} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \tau} + \frac{\partial N_2}{\partial \tau} \right) = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} (u_2 - \tau) \frac{\partial N_2}{\partial \tau} + N_2 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} &= 0, \quad (u_2 - \tau) \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{M_1}{2M_2(N_1 + N_2)} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \tau} + \frac{\partial N_2}{\partial \tau} \right) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Примем для определенности, что $M_2 > M_1$. При больших значениях τ остаются в основном более легкие частицы, независимо от соотношения их начальных концентраций. Принимая поэтому, что $N_2 \ll N_1$, находим из (44), что концентрация и скорость легких частиц при $\tau \gg 1$ по-прежнему описываются формулами (34). Для тяжелых частиц из (45) получаем

$$N_2 = C \exp\left(-V^2 \frac{M_2}{M_1} \tau\right), \quad u_2 = \tau + \sqrt{\frac{M_1}{2M_2}}. \quad (46)$$

Отсюда видно, что при $M_2 \gg M_1$ концентрация тяжелых ионов убывает с ростом τ очень резко. В этом случае, даже если начальная концентрация тяжелых частиц была много больше, чем легких, $N_{20} \gg N_{10}$, с ростом τ она убывает согласно автомодельному решению (35) только для $N_2 \sim N_1$, т. е. до

$$\tau_k \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln(N_{20}/N_{10})}{\sqrt{M_2/M_1} - 1}.$$

При больших значениях τ кривая концентрации тяжелых частиц резко обрывается; остаются практически только легкие частицы. В частности, в ионосфере для ионов кислорода и водорода отношение масс $M_2/M_1 = 16$. В этом случае концентрация водорода за сферическим спутником вблизи его поверхности оказывается существенно больше концентрации кислорода, даже если ионы водорода составляли менее 5% в невозмущенной плазме.

Отметим, что гидродинамические уравнения (44), (45) имеют интеграл

$$N_1(u_2 - \tau)^2 \left[(u_1 - \tau)^2 - \frac{1}{2} \right] + N_2(u_1 - \tau)^2 \left[(u_2 - \tau)^2 - \frac{M_1}{2M_2} \right] = 0.$$

Из этой формулы следует, что место слабого разрыва в гидродинамическом решении таково:

$$\tau_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{M_1}{M_2} \frac{N_{20}}{N_0} + \frac{N_{10}}{N_0}}, \quad N_0 = N_{10} + N_{20}.$$

При $\tau < \tau_0$ плазма не возмущена. Отсюда видно, что и место разрыва сильно смещается уже при наличии малых примесей легкого газа.

V. ОБТЕКАНИЕ КЛИНА

До сих пор мы говорили об обтекании полуплоскости, стоящей перпендикулярно набегающему потоку. Полученные результаты, однако, сразу же дают решение задачи об обтекании полуплоскости с любым углом атаки и об обтекании клина.

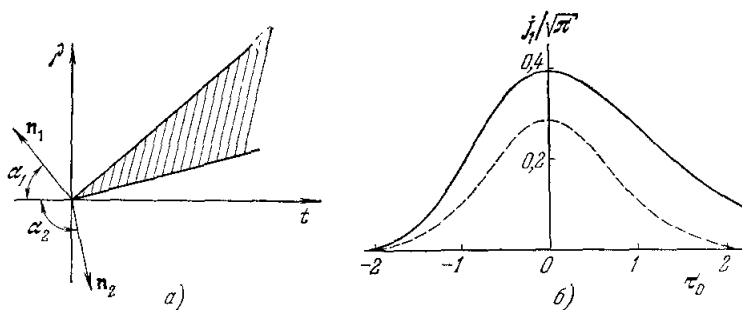


Рис. 6. Обтекание клина: а) схема углов; б) плотность потока ионов в зависимости от τ_0 .

Действительно, рассмотрим, например, область 1 около клина ($\rho > 0$) (рис. 6, а). Пусть угол между нормалью n_1 к верхней грани клина и вектором v_0 есть α_1 . Тогда уравнение верхней грани клина в переменных ρ , t имеет вид

$$\frac{\rho}{t} = -b \operatorname{ctg} \alpha_1 = \tau_0, \quad b = \sqrt{\frac{M v_0^2}{2 T_e}}.$$

Согласно (18) граничное условие на поверхности: $g = 0$ при $u < \tau_0$. Но это условие автоматически выполняется для функции g_a при любых $\tau = \rho/t$. Поэтому распределение концентрации в области 1 при $\tau < \tau_0$ дается кривыми $n(\tau)$, приведенными на рис. 2. То же относится к области 2 ($\rho < 0$) с заменой α_1 на α_2 .

При обтекании клина интерес представляет также поток на его поверхность. Поток на грань 1 дается, как легко понять, выражением

$$j = N_0 v_0 n(\tau_0) \cos \alpha_1 + N_0 \sqrt{\frac{2 T_e}{M \pi}} j_1(\tau_0) \sin \alpha_1, \quad (47)$$

где

$$j_1(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u g(u, \tau_0) du.$$

График $j_1/\sqrt{\pi}$ при $\beta = 1$ приведен на рис. 6, б вместе с соответствующей кривой для нейтрального газа (штриховая линия). Мы видим, в частности, что для полуплоскости, движущейся параллельно своей поверхности, электрическое поле при $T_e = T_i$ увеличивает поток на поверхность в 1,4 раза *). Поток на грань 2 получается заменой α_1 на α_2 .

VI. ОБТЕКАНИЕ ЗАКРУГЛЕННОГО КРАЯ ТЕЛА

Выше изучалось обтекание полуплоскости и клина, т. е. тел, обладающих острым краем. В настоящей главе будет рассмотрено возмущение плазмы закругленным краем тела ¹⁰.

Рассмотрим для простоты плоскую задачу, т. е. обтекание цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси y . Контур тела в плоскости ρ, t может быть произволен. Как и ранее, примем тело полубесконечным, т. е. неограниченным, например, в направлении оси $\rho < 0$. Отметим, однако, что получаемые при этом результаты справедливы и для ограниченного тела вблизи его поверхности, когда несущественны частицы, обогнувшие другой край тела.

Оказывается, что решение поставленной задачи выражается через ту же функцию $g_a(\tau, u)$, найденную в гл. III. Параметр τ , однако, уже не равен ρ/t , а будет более сложной функцией от ρ/t :

$$\tau = \tau(\rho, t).$$

Подставляя τ в (13), получим

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = 0.$$

Если теперь положить

$$u = -u_\tau, \quad \tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} / \frac{\partial \tau}{\partial \rho},$$

то уравнение для g будет совпадать с (21), так что действительно

$$g = g_a(\tau, -u).$$

С другой стороны,

$$\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)_\rho / \left(\frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right)_t = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_\tau.$$

Интегрируя это равенство, получаем искомую связь τ с ρ и t

$$-\rho = \tau t + p(\tau), \quad (48)$$

где $p(\tau)$ — произвольная функция, которую надо определить из граничных условий.

Уравнение (48) при каждом τ определяет прямую в плоскости ρ, t , на которой функция распределения равна $g_a(\tau, -u)$. При $p = 0$ все прямые пересекаются в одной точке. В этом случае $\tau = -\rho/t$ и движение является автомодельным, т. е. мы возвращаемся к формулам гл. III. При $p \neq 0$ эти прямые, вообще говоря, не пересекаются в одной точке.

Граничные условия на поверхности тела, согласно (16), имеют вид

$$g = 0 \quad \text{при} \quad u > \frac{d\rho_0(t)}{dt},$$

*) Заметим, что для вычисления $j_1(\tau_0)$ нет необходимости знать функцию распределения. Действительно, интегрируя уравнение (21) по du , получаем $\frac{dj_1}{d\tau} -$

$$-\tau \frac{dn}{d\tau} = 0, \quad \text{или} \quad j_1(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\tau_0} \tau \frac{dn}{d\tau} d\tau = \tau_0 n(\tau_0) - \int_{-\infty}^{\tau_0} n(\tau) d\tau.$$

где $\rho = \rho_0(t)$ — уравнение контура тела в плоскости ρ, t . Функция g_a обладает свойством

$$g_a = 0 \quad \text{при} \quad u_{\xi} < \tau.$$

Поэтому граничное условие будет выполнено, если равенство

$$-\frac{d\rho_0}{dt} = \tau$$

будет соблюдено на поверхности, т. е. при

$$-\rho_0(t) = \tau t + p(\tau).$$

Последние два равенства выражают в параметрическом виде (параметр t) функцию $p(\tau)$ через уравнение границы $\rho_0(t)$. После этого уравнение (48) определяет в каждой точке ρ и t значение τ , а следовательно, и $g_a(\tau)$.

Указанную процедуру очень просто произвести геометрически. Для этого достаточно в каждой точке контура $\rho_0(t)$ провести касательную в сторону $t > 0$ (см. рис. 5, б). На этих касательных функция распределения имеет значения $g_a(\tau, -u)$, где τ — тангенс угла наклона касательной к оси t . На рис. 5, б изображены линии постоянной концентрации ионов при обтекании кругового цилиндра ($b = 8, \beta = 1$). В этом случае

$$p(\tau) = - \left[\left(1 + \frac{\tau^2}{b^2} \right)^{1/2} - 1 \right].$$

Отсюда видно, что при $t \gg b^{-2/3} \tau \approx -\rho/t$. Тот же результат мы получим, заменив тело бесконечно тонкой пластинкой. Это означает, что на достаточно большом расстоянии от поверхности позади тела его точная форма несущественна, а важно лишь максимальное поперечное сечение (ср. рис. 5, а и б). Мы получили, таким образом, область применимости граничного условия (18), указанную в примечании на стр. 7.

Отметим, что найденное в этом разделе решение кинетического уравнения аналогично римановскому решению для простой волны в обычной гидродинамике (см., например, ¹¹, § 94).

VII. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим обтекание бесконечной в направлении оси y пластинки шириной $2R_0$. Поток плазмы ортогонален к плоскости пластинки, толщину ее считаем пренебрежимо малой. Распределение ионов в возмущенной зоне за пластинкой описывается уравнением, непосредственно следующим из (13) в двумерном случае:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \rho} \left(\ln \int_{-\infty}^{\infty} g \, du \right) = 0; \quad (49)$$

здесь g — безразмерная функция распределения ионов. Функция $g = g(t, \rho, u)$, где $u = v_x / \sqrt{2T_e/M}$, $\rho = x/R_0$, $t = (z/R_0) \sqrt{2T_e/Mv_0^2}$. Ось z по-прежнему направлена параллельно скорости набегающего потока, ось x — ортогонально к v_0 и к оси пластинки.

Граничные условия к уравнению (49) имеют вид (23) при $t \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} g(t, \rho, u) &= g_a \left(\frac{1-\rho}{t}, -u \right) \quad \text{при} \quad \rho \approx 1, \\ g(t, \rho, u) &= g_a \left(\frac{1+\rho}{t}, u \right) \quad \text{при} \quad \rho \approx -1, \end{aligned} \quad (50)$$

где $g_a(\tau, u)$ — решение автомодельного уравнения, рассмотренное в гл. III. Заметим, что достаточно рассматривать задачу только при положительных значениях ρ , так как

$$g(t, -\rho, -u) = g(t, \rho, u). \quad (51)$$

Характеристики уравнения (49) определены условиями

$$\frac{d\rho}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\ln \int g du \right). \quad (52)$$

Переходя к решению уравнения (49), учтем, что в ближней к телу области (при малых значениях t) главную роль играет возмущение краями

тела $\rho = 1$ и $\rho = -1$, описываемое автомодельным решением. Удобно поэтому записать функцию g в виде

$$g(t, \rho, u) = g_a \left(\frac{1-\rho}{t}, -u \right) + g_a \left(\frac{1+\rho}{t}, u \right) + g_1(t, \rho, u), \quad (53)$$

где $g_a(\tau, u)$ — автомодельное решение, полученное выше, g_1 — поправочная функция, описывающая взаимное влияние двух потоков. Согласно граничному условию (50) функция $g_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Анализ, проведенный в ¹⁴, по-

Рис. 7. Поверхности постоянной концентрации при обтекании пластинки.

Значения $n = N/N_0$ указаны на рисунке ($\beta = 1$).

казывает, что последнее слагаемое в (53) и при любых значениях t мало по сравнению с суммой двух первых. Поэтому при решении уравнения (49) естественно воспользоваться методом итераций. Иначе говоря, можно в первом приближении g^I пренебречь функцией g_1 . Вычислив тогда $\ln \int g^I du$, подставим его в (52). Уравнения характеристик (52) интегрировались затем численно, шагами по t , с использованием граничных условий (50). Таким образом, находилась следующая итерация g^{II} и т. д. Практически оказывается достаточным вычислить вторую итерацию *).

Результаты расчета, проведенного в ¹⁴ для $\beta = 1$ ($T_e = T_i$), представлены на рис. 7. Сплошные кривые здесь являются кривыми постоянной концентрации ионов.

Функция распределения ионов g в возмущенной зоне за пластинкой представлена на рис. 8. Видно, что она носит двугорбый характер. Это отражает факт столкновения двух потоков, идущих от разных краев пластинки.

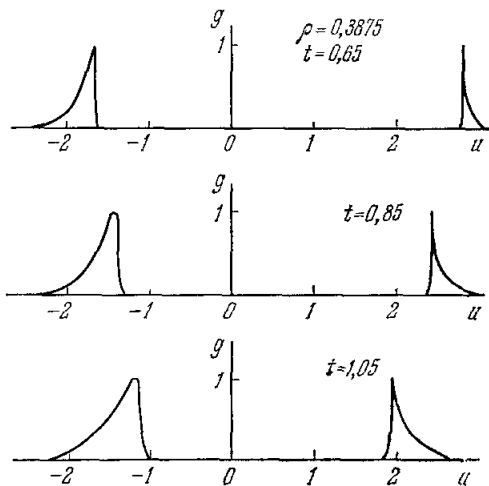


Рис. 8. Функция распределения ионов $g(u)$ за пластинкой ($\beta = 1$).

*) Можно, не пользуясь итерациями, интегрировать численно уравнения (52), определяя $\ln \int g du$ по предыдущему шагу (как это делалось, например, при отыскании автомодельного решения). В рассмотренном здесь случае, однако, из-за плохой устойчивости задачи решение, получаемое этим методом, раскачивается. Раскачку можно подавить с помощью специальных операций сглаживания. Получаемое тогда решение с достаточной точностью совпадает с найденным с помощью итераций ¹⁵.

VIII. ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА

Рассмотрим обтекание бесконечного цилиндра радиуса R_0 . Поток плазмы движется в направлении, ортогональном к оси цилиндра, со скоростью v_0 . Распределение ионов в возмущенной зоне за цилиндром описывается уравнением (49). По-прежнему справедливо соотношение (51). Поэтому можно рассматривать лишь значения $\rho > 0$. Граничные условия (16) имеют вид

$$g(t, \rho, u) = 0$$

при $\rho = \sqrt{1 - b^2 t^2}$, $u < 0$,

$$g(t, \rho, u) = e^{-\beta u^2}$$

при $t = 0$, $\rho > 1$,

$$g(t, \rho, u) = g(t, \rho, -u)$$

при $\rho = 0$.

Последнее условие следует из соотношения симметрии (51).

Уравнения характеристик по-прежнему имеют вид (52). Они интегрировались численно, шагами по t . Результаты расчета, проведенного в ¹⁵, для $\beta = 1$ ($T_e = T_i$) и $b = 2,50$ приведены на рис. 9, где представлены поверхности постоянной концентрации ионов. На рис. 10 приведено распределение относительной концентрации ионов на оси за цилиндром (кривая 2) и за пластинкой (кривая 1).

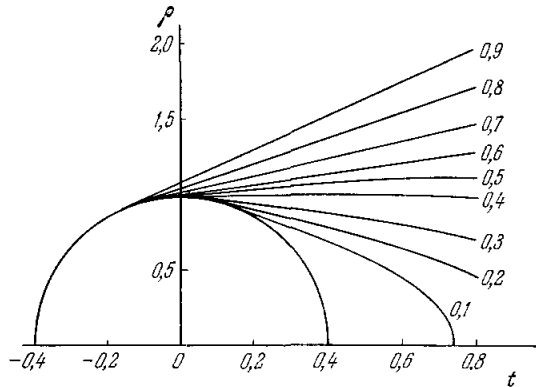


Рис. 9. Поверхности постоянной концентрации при обтекании цилиндра ($\beta = 1$, $b = \sqrt{Mv_0^2/2T_e} = 2,5$).

Значения $n = N/N_0$ указаны на рисунке.

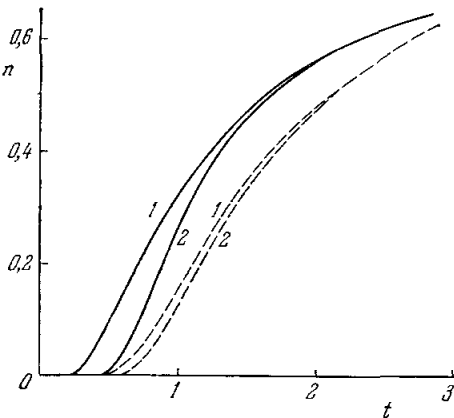


Рис. 10. Зависимость $n = N/N_0$ от t при $\beta = 1$ на оси $\rho = 0$ позади пластинки (1) и цилиндра (кривая 2, $b = \sqrt{Mv_0^2/2T_e} = 2,5$).

Используя результаты, полученные в гл. VI, нетрудно найти аналитическое выражение, описывающее распределение ионов в ближней окрестности цилиндра при $t \ll 1$. Как и в случае пластинки, при малых t функция распределения равна просто сумме функций распределения частиц, огибающих противоположные края тела (см. формулу (53)). Пусть координаты рассматриваемой точки в цилиндрической системе координат в плоскости ρ, z есть r и θ . Проведем из этой точки касательные

к поверхности цилиндра. Углы наклона касательных к оси z равны

$$\varphi_1 = b \left[-\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right], \quad \varphi_2 = b \left[\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right].$$

Угол θ отсчитывается от направления скорости тела v_0 . Как было показано в гл. VI, функция распределения ионов, огибающих край тела, постоянна на каждой касательной и равна $f_a(\tau, u)$. Соответственно концентрация ионов выражается через автомодельную концентрацию n_a :

$$n(r, \theta) = n_a(\varphi_1) + K n_a(\varphi_2);$$

$$K = 1 \text{ при } \varphi_1/b \leq \pi/2, \quad K = 0 \text{ при } \varphi_1/b > \pi/2.$$

Это выражение хорошо согласуется с результатом численных расчетов, приведенных на рис. 9. В области вблизи тела, где концентрация n экспоненциально мала, формула принимает особенно простой вид

$$\begin{aligned} n(r, \theta) = C(\beta) \left[\exp \left\{ -\sqrt{2} b \left[-\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right] \right\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[-\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right]^2 \right\} + K \exp \left\{ -\sqrt{2} b \left[\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) + \theta \right]^2 \right\} \right]; \quad (54) \end{aligned}$$

$$K = 1 \text{ при } \theta - \arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad K = 0 \text{ при } \theta - \arcsin \left(\frac{R_0}{r} \right) > \frac{\pi}{2}.$$

(Мы записали формулу (54) с учетом изменения продольной скорости ионов согласно (42).)

IX. ОБТЕКАНИЕ ДИСКА

Рассмотрим теперь задачу об обтекании круглого диска радиуса R_0 потоком плазмы, движущимся перпендикулярно плоскости диска. Как ясно из результатов гл. II, эта задача в действительности имеет весьма общее значение. Таким диском можно приближенно заменить любое тело вращения, если его длина R_z не слишком велика, $R_z \sqrt{2T_e/Mv_0^2} \ll R_0$. Результаты, полученные для диска, будут справедливы и для такого тела на достаточном расстоянии от него. В частности, к задаче о диске сводится картина обтекания тела вращения с плоской задней стенкой.

Ввиду осевой симметрии задачи нам будет необходимо переписать уравнение (13) в цилиндрических координатах ρ , φ , u_ρ и u_φ (u_ρ — проекция скорости \mathbf{u} на направление ρ , u_φ — проекция \mathbf{u} на перпендикулярное к ρ направление).

При этом функция распределения фактически не будет зависеть от φ , а вместо u_φ следует ввести переменную

$$m = u_\varphi \rho,$$

имеющую смысл безразмерной проекции момента импульса иона на ось z . При этом m является интегралом движения и будет входить в уравнение лишь в качестве параметра.

Для преобразования уравнения (13) к новым переменным заметим, что оно имеет вид

$$\frac{dg}{dt} = 0,$$

причем производные от \mathbf{u} и ρ по t определяются уравнениями Гамильтона с гамильтоновой функцией

$$\mathcal{H} = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \psi(\rho) = \frac{1}{2} \left[u_\rho^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + \psi(\rho) \right].$$

Соответствующие уравнения для $\dot{\rho}$ и \dot{u}_ρ имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_\rho} = u_\rho, \quad \frac{du_\rho}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (55)$$

Дифференцируя g и учитывая (55), получим окончательно уравнение в новых переменных

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u_\rho \frac{\partial g}{\partial \rho} + \left(\frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial g}{\partial u_\rho} = 0. \quad (56)$$

Отметим, что (55) являются уравнениями характеристик для (56). Потенциал ψ определяется соотношением

$$\psi = \ln n, \quad n(\rho, t) = \frac{\beta}{\pi \rho} \int g du_\rho dm. \quad (57)$$

Граничные условия для (56), согласно (23), имеют вид

$$t \rightarrow 0, \quad |1 - \rho| \ll 1, \quad g \rightarrow \exp(-\beta m^2) g_a \left(\frac{1 - \rho}{t}, -u_\rho \right), \quad (58)$$

где $g_a(\tau, u)$ — решение автомодельного уравнения, полученное в гл. III. При $t, \rho \rightarrow \infty$ $g \rightarrow \exp[-\beta(u_\rho^2 + u_\psi^2)] = \exp\left[-\beta\left(u_\rho^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)\right]$. Решение уравнения (56) при произвольных значениях ρ и t в настоящее время еще не получено. Мы здесь приведем результаты для достаточно малых значений t :

$$t = \frac{z}{R_0} \sqrt{\frac{2T_e}{Mv_0^2}} \ll 1. \quad (59)$$

Отметим, что для быстро движущегося тела область (59) оказывается достаточно большой, причем (как видно уже из результатов гл. VI) именно в ней оказывается существенным влияние электрического поля на движение ионов. При условии (59) решение удастся провести для всех ρ . Приходится, однако, отдельно рассматривать три области:

- 1) $|1 - \rho| \ll 1$,
- 2) $1 - \rho \gg t, \rho \gg 1$,
- 3) $\rho \ll \sqrt{t}$.

Эти три области при условии (59) перекрываются (области 1) и 2) при $1 \gg 1 - \rho \gg t$, области 2) и 3) при $\sqrt{t} \gg \rho \gg t$). Поэтому, получив решение в каждой области, мы полностью решим задачу.

В области 1) решение, согласно (58), выражается через решение автомодельного уравнения g_a . При достаточно больших $\tau = (1 - \rho)/t$ функция распределения ионов по скорости u_ρ монохроматизируется согласно (40). Поэтому

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta m^2) n \delta(u_\rho - \bar{u}), \quad n = C(\beta) \exp\left(-\sqrt{2} \frac{1 - \rho}{t}\right), \quad \bar{u} = -\left(\frac{1 - \rho}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad (60)$$

здесь константа $C(\beta)$ определяется асимптотикой функции g_a (см. (39)).

В областях 2) и 3) начинает сказываться цилиндрический характер задачи. Это проявляется в наличии в кинетическом уравнении (56) «центробежной силы» m^2/ρ^3 и множителя $1/\rho$ в интеграле (57) для n . Эти члены не могут изменить δ -образный характер функции распределения,

но изменяют ее зависимость от ρ , t и m . В соответствии с этим будем в этих областях искать g в виде

$$g = h(t, \rho, m) \delta(u_\rho - \bar{u}(\rho, t, m)) \quad (61)$$

(точнее говоря, в области 3) из-за появления ионов, отраженных от «центробежного потенциала», функция распределения имеет вид суммы двух членов вида (61)).

Подставляя (61) в (56) и интегрируя по du_ρ , получаем «уравнение непрерывности» для h

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u})}{\partial \rho} = 0. \quad (62)$$

Далее, умножим (56) на u_ρ и также проинтегрируем. В результате получим второе уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \rho} (h\bar{u}^2) - \left(\frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) h = 0,$$

или, преобразуя его с учетом (62),

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^3} = 0. \quad (63)$$

Потенциал ψ связан с h формулой

$$\psi = \ln n, \quad n = \frac{\beta}{\pi \rho} \int_{-\infty}^{\infty} h \, dm. \quad (64)$$

Рассмотрим теперь область 2). Легко понять, что в этой области центробежная сила m^2/ρ^3 незначительна. Это связано с тем, что скорость \bar{u} по порядку величины равна $(1 - \rho)/t$ (это будет показано далее; см. (67)). Поэтому кинетическая энергия $\bar{u}^2/2$ ионов при $\rho \gg t$ много больше центробежного потенциала m^2/ρ^3 . Если пренебречь в (63) центробежной энергией, уравнения перестают зависеть от m . Поэтому зависимость g от m будет такой же, как и у функции (60), в которую (61) должна переходить при условии $\rho \rightarrow 1$. Иными словами,

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta m^2) \rho n \delta(u_\rho - \bar{u}) \quad (65)$$

(согласно (57) n — концентрация ионов). Для n получается система уравнений, которая, как и должно быть, совпадает с уравнениями изотермической гидродинамики в полярных координатах;

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho n \bar{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} &= -\frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (66)$$

Представляя $\ln n$ в виде ряда по степеням t

$$\ln n = \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \dots$$

и аналогично для \bar{u} , легко убеждаемся, что с точностью до членов порядка t решение имеет вид

$$n = \frac{C(\beta)}{\rho} \exp\left(-\sqrt{2} \frac{1-\rho}{t}\right), \quad \bar{u} = -\left(\frac{1-\rho}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (67)$$

отличаясь от (60) лишь множителем $1/\rho$ в n . (Постоянные в решении выбраны так, чтобы при $\rho \rightarrow 1$ (67) переходило в (60).)

Отметим также, что, умножив функцию (58) на $1/\rho$, мы получим решение, которое автоматически будет пригодно и в области 1), и в области 2). Это совершенно естественно, так как формула (67) учитывает просто геометрическое сжатие контура начального круга при движении частиц к оси цилиндра. С другой стороны, производя оценку различных членов в уравнениях (66) с учетом конкретного вида формул (67), можно убедиться в том, что во всей области 2) электрическое поле не влияет на движение ионов. Поэтому те же формулы можно было бы получить, рассматривая свободное движение ионов и требуя, чтобы решение переходило в автомодельное на границе. В этом смысле можно вместе рассматривать области 2) и 1).

Решение в области 3) при малых ρ и t можно найти путем разложения в ряды искомых функций $\ln h$ и \bar{u} . Опуская вычисления, приведем здесь лишь результат расчета:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{1-\rho}{t} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{\rho^2}} \right), \\ h_1 &= \frac{\sqrt{\pi} C(\beta)}{\sqrt{\beta}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - m^2 t^2}} \exp \left[-\frac{\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t} \sqrt{2(\rho^2 - m^2 t^2)} - m^2 \beta \right] \\ &\quad \text{при } m^2 t^2 < \rho^2, \\ \bar{u}_2 &= \frac{1+\rho}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{\rho^2}} \right), \\ h_2 &= \frac{\sqrt{\pi} C(\beta)}{\sqrt{\beta}} \exp \left[-\frac{\sqrt{2}}{t} - \frac{1}{t} \sqrt{2(\rho^2 - m^2 t^2)} - m^2 \beta \right] \\ &\quad \text{при } m^2 t^2 < \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

($h_1 = h_2 = 0$ при $m^2 t^2 > \rho^2$); здесь \bar{u}_1 , h_1 и \bar{u}_2 , h_2 соответственно описывают два потока, один из которых идет к центру, а другой — от центра диска. Второй поток создается частицами, идущими от противоположного края диска; при $\rho \gg t$, как ясно непосредственно из формул (68), концентрация ионов во втором потоке экспоненциально мала по сравнению с концентрацией в первом потоке. Поэтому вдали от центра диска (в областях 1) и 2)) второй поток можно не учитывать. Функция распределения g предстает, таким образом, в виде суммы двух членов, определяемых формулами (61), (68). Интегрируя ее согласно (64), находим концентрацию ионов

$$\left. \begin{aligned} n &= 2\sqrt{\pi\beta} C(\beta) \frac{1}{t} \exp(-\sqrt{2}/t) I(\rho/t), \\ I(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-\beta \zeta^2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \zeta \cos \theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

График функции $2\sqrt{\pi\beta} I(\zeta)$ для различных значений β представлен на рис. 11. При больших значениях $\zeta = \rho/t \gg 1/\sqrt{\beta}$

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}\zeta} \exp(\sqrt{2}\zeta)$$

и формула (69) для n совпадает с (67). Тепловой разброс по моментам m при $\rho \gg t$ несуществен. При $\zeta \ll 1/\sqrt{\beta}$

$$I(\zeta) = 1 - (\beta - 1) \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{8} \left(\frac{3}{2} \beta^2 - \beta + \frac{1}{2} \right). \quad (70)$$

Отсюда видно, что на оси за диском ($\rho \rightarrow 0$) концентрация ионов принимает конечное значение, зависящее от t и β и определяемое тепловым движением ионов.

Поверхности постоянной концентрации ионов в ближней области позади диска, определенные формулами (60), (67), (69), представлены на рис. 12.

Из рис. 11, 12 и формул (69), (70) видно, что при $\beta \leq 1$ концентрация ионов n монотонно растет с ростом ρ . При $\beta > 1$ возникает уплотнение вблизи оси $\rho = 0$; величина его нара-

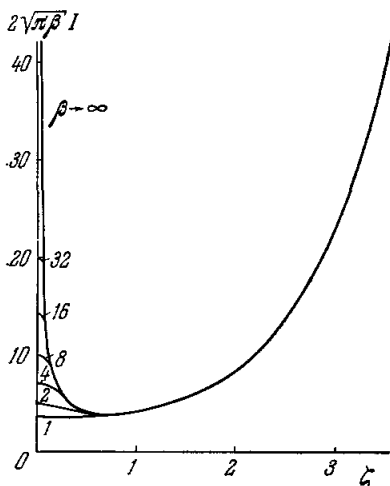


Рис. 11. Обтекание диска: зависимость $2\sqrt{\pi\beta}I$ от ζ .

оказывает существенное влияние на движение ионов только в области 1), близкой к границе диска: $|1 - \rho| \ll 1$. Это вполне понятно. Действительно,

важно, что, как показывает проведенный расчет, при малых значениях $t \ll 1$ электрическое поле $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ оказывает существенное влияние на движение ионов только в области 1), близкой к границе диска: $|1 - \rho| \ll 1$. Это вполне понятно. Действительно,

Важно, что, как показывает проведенный расчет, при малых значениях $t \ll 1$ электрическое поле $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$

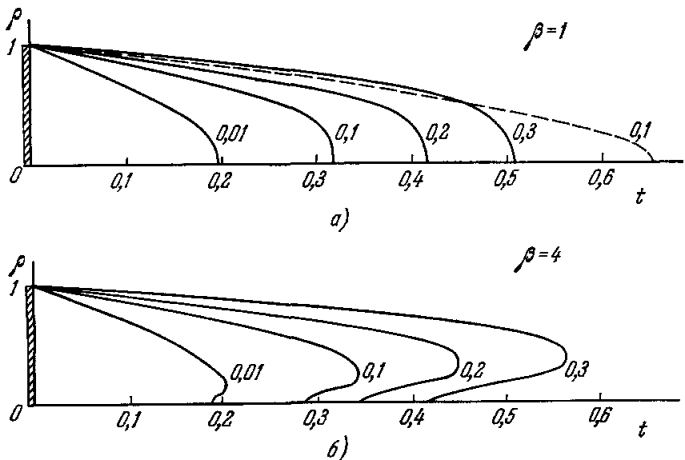


Рис. 12. Поверхности постоянной концентрации ионов при обтекании диска. а) $\beta = T_e/T_i = 1$; б) $\beta = 4$. Значения $n = N/N_0$ указаны на рисунках.

конечная сила не может за малое время $t \rightarrow 0$ заметно повлиять на скорость, а следовательно, и на концентрацию ионов. Поэтому при $t \rightarrow 0$ электрическое поле может быть существенно лишь в той области, где $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$

велико, т. е. в области сингулярности вблизи границы тела. Но действие поля в этой области уже учтено в автомодельном решении при переходе от граничных условий (18) к условиям (23). Таким образом, при вычислении функции распределения и концентрации ионов в ближней области позади тела ($t \ll 1$) можно рассматривать ионы как свободно летящие частицы, удовлетворяющие условию (23) при $t \rightarrow +0$. Это позволяет весьма просто найти функцию распределения ионов при $t \ll 1$ позади тела произвольного сечения. Действительно, для свободно летящих частиц, как известно (см. 2, § 5),

$$f(t, \rho, u) = f_0(0, \rho - ut, u), \quad (71)$$

где $f_0(0, \rho_0, u)$ — начальная функция распределения. Она определена в нашем случае граничным условием (23). Используя его, получаем из (71)

$$g(t, \rho, u) = g_a \left(\frac{n_1(\rho_0 - \rho)}{t}, -u_\xi \right) \exp(-\beta u_\eta^2),$$

где $\rho_0(s)$ — точка на контуре тела, n_1 — нормаль к контуру в точке $\rho_0(s)$; u_ξ , u_η — компоненты скорости в направлении нормали и касательной к контуру в точке ρ_0 . Интегрируя функцию распределения по скорости u , можно определить концентрацию ионов. Учитывая монохроматизацию функции g_a (65), нетрудно проинтегрировать по du_ξ . Переходя, кроме того, от интегрирования по du_η к интегрированию по длине контура ds , получаем в области позади тела ($\rho_\xi/t > 1$)

$$n(\rho, t) = \frac{C(\beta) V \bar{\beta}}{\sqrt{\pi} t} \oint ds \exp \left(-V \sqrt{2} \frac{\rho_\xi}{t} - \beta \frac{\rho_\eta^2}{t^2} \right), \quad (72)$$

где ρ_ξ и ρ_η — компоненты вектора $\rho_0 - \rho$ по нормали n_1 и касательной к контуру сечения тела в точке сечения $\rho_0(s)$, ds — элемент длины контура. В частности, если сечение тела — круг радиуса 1, то $\rho_\xi = 1 - \rho \cos \theta$, $\rho_\eta = \rho \sin \theta$, $ds = d\theta$ и формула (72) переходит в (69).

Выше не учитывалось изменение под действием электрического поля продольной компоненты скорости ионов v_z . Как показано в конце гл. III, оно существенно в ближней к телу области. Используя формулу (42) и повторяя проведенные выше рассуждения, получаем для концентрации за диском

$$\begin{aligned} n(\rho, z) = & \frac{V \bar{\beta} C(\beta)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1 - \rho \cos \theta}{[z^2 + (1 - \rho \cos \theta)^2]^{1/2}} \left\{ b + \frac{z}{\sqrt{2}(1 - \rho \cos \theta)} + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \rho \cos \theta}{z} \right) \left. \right\} \exp \left\{ -V \sqrt{2} b \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \rho \cos \theta}{z} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1 - \rho \cos \theta}{z} \right) - \frac{\beta \rho^2 \sin^2 \theta (1 - \rho \cos \theta)^2}{z^2 + (1 - \rho \cos \theta)^2} \left[b + \right. \\ & \left. \left. + \frac{z}{\sqrt{2}(1 - \rho \cos \theta)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1 - \rho \cos \theta}{z} \right) \right] \right\}. \quad (73) \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с (69) при условии

$$\left| \frac{1 - \rho \cos \theta}{z} \right| \ll 1.$$

На оси позади диска ($\rho = 0$) получаем

$$n(0, z) = \frac{2\sqrt{\pi\beta} C(\beta)}{\sqrt{z^2 + 1}} \left[b + \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z}\right) \right] \times \\ \times \exp \left[-\sqrt{2} b \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (73a)$$

Вблизи поверхности диска формула (73) приводит, в отличие от (69), к конечным значениям концентрации ионов.

Х. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДВИЖЕНИЕ ИОНОВ

Выше были приведены результаты расчета распределения ионов в окрестности различных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком разреженной плазмы (полуплоскости, клина, пластинки, цилиндра, диска). Чтобы понять, какое влияние оказывает на движение ионов электрическое поле, необходимо сравнить эти результаты с расчетом концентрации нейтральных частиц, на которые электрическое поле не действует. Выражения, описывающие распределение нейтральных частиц, нетрудно получить при произвольной форме поверхности и скорости движения тела (см. ², гл. II). В ^{1, 2} они использовались в качестве приближенных выражений для концентрации ионов.

Рассмотрим вначале случай однотемпературной плазмы $\beta = 1$ ($T_e = T_i$). Концентрация нейтральных частиц с $T = T_i = T_e$ за полуплоскостью задается выражением (29). Она приведена штриховой линией на рис. 2, б. Из рисунка видно, что при отрицательных или небольших положительных значениях $\tau = \rho/t < 0,5$ распределение ионов и нейтралов близки друг к другу, концентрации различаются не более чем на 10%. В области же сильного разрежения при $\tau \gg 1$ различие между ними очень велико. Это хорошо видно из рис. 2, б и из сравнения асимптотических формул (30) и (39). Таким образом, при обтекании полуплоскости электрическое поле оказывает определяющее влияние на распределение ионов в области сильного разрежения $N \ll N_0$. В области же, где концентрация плазмы значительна, $N > 0,2N_0$, влияние электрического поля в общем мало существенно. К такому же выводу приходим и из сравнения распределения ионов и нейтралов за пластинкой, цилиндром; это же видно из рис. 7 и 10, на которых штриховые кривые изображают распределение нейтральных частиц. В области сильного разрежения за осесимметричным телом (например, за сферой или диском) различие между ионами и нейтрами столь же велико. Однако в этом случае и в не сильно разреженной зоне ($N > 0,2N_0$) отклонения распределения ионов от распределения нейтралов более значительны (см. рис. 12).

С ростом отношения T_e/T_i роль электрического поля существенно возрастает. Собственно при $T_e \gg T_i$, чтобы получать схожие результаты, необходимо рассматривать нейтралы с температурой T_e , что уже выражает сильное влияние электрического поля. Кроме того, при $T_e/T_i \gg 1$ под воздействием поля возникают новые особенности в распределении ионов; это видно из рис. 11 и 12, б: возрастание концентрации ионов вблизи оси и усиление возмущения на конусе Маха вызвано исключительно влиянием электрического поля.

ХІ. ОБТЕКАНИЕ СИЛЬНО ВЫТЯНУТЫХ ТЕЛ

Рассмотрим теперь обтекание сильно вытянутых в направлении своего движения тел, т. е. тел, продольный размер которых более чем в b раз превосходит поперечный.

Пример такого тела — тонкая пластинка шириной z_0 , расположенная параллельно набегающему потоку. Направим ось z параллельно

поток, ось x — ортогонально к плоскости пластинки. Размер пластинки в направлении оси y предполагается бесконечным. Распределение нейтральных молекул при $b \gg 1$ определяется формулами

$$n_n = \frac{N_n}{N_0} = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\rho}{t} \right) \right], & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\rho}{t-1} \right) - \Phi \left(\frac{\rho}{t} \right) \right], & t \geq 1; \end{cases} \quad (74)$$

здесь

$$t = \frac{z}{z_0}, \quad \rho = \frac{x}{z_0} b. \quad (75)$$

На рис. 13 представлены контуры постоянной концентрации в плоскости ρ, t , определенные формулой (74). На рис. 14 приведено изменение концентрации в зависимости от ρ при разных значениях t . Из рисунков видно, что минимум концентрации достигается теперь не в области позади тела, $\rho = 0$, а под углом $\rho/t \sim 1$. Это видно и из асимптотических формул. Действительно, на больших расстояниях от тела, $t \gg 1$, возмущение концентрации, согласно (55), можно представить в виде

$$\frac{\delta N}{N_0} = \frac{N - N_0}{N_0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi} t} \frac{\rho}{t} \exp [-(\rho/t)^2]. \quad (76)$$

Отсюда следует, что максимум возмущения достигается на прямой

$$(\rho/t)_m = 1/\sqrt{2}, \quad \text{т. е. } x = z \sqrt{T/M v_0^2}.$$

Влияние электрического поля на движение ионов в случае обтекаемого тела при $T_i \sim T_e$ нигде не оказывается определяющим, так как

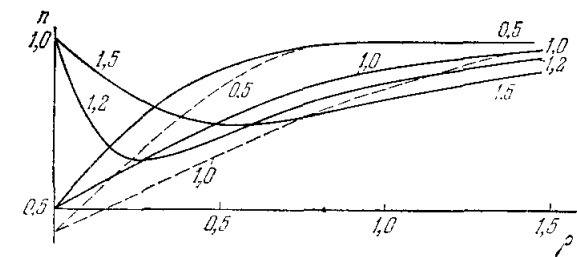


Рис. 14. Обтекание пластинки, плоскость которой параллельна набегающему потоку: зависимость $n = N/N_0$ от ρ для различных значений t , указанных на рисунке.

тат расчета зависимости n от ρ при $t = 0,5$ и $t = 1$ (для $T_e = T_i$), проведенного с учетом влияния электрического поля. Видно, что отличие от нейтральных кривых невелико. Положение максимума возмущения на больших расстояниях позади тела при учете электрического поля для $T_e = T_i$ определяется формулой $(\rho/t)_m = 1,4$ ¹³. Для $T_e/T \gg 1$ $(\rho/t)_m = 1/\sqrt{2}$, как и для нейтрального газа.

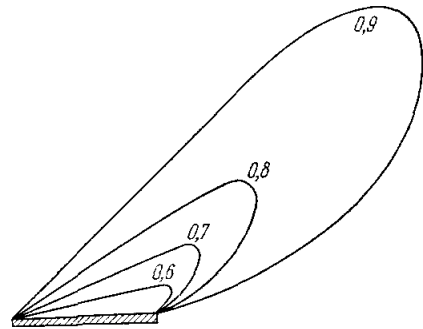


Рис. 13. Поверхности постоянной концентрации при обтекании пластинки, плоскость которой параллельна набегающему потоку. Значения $n = N/N_0$ указаны на рисунке.

ХИ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СЛЕДЕ ТЕЛА

Выше было показано, что на небольших расстояниях позади обтекаемого сверхзвуковым потоком плазмы тела образуются два вторичных потока плазмы, движущихся навстречу друг другу. Эффективная температура ионов в этих потоках $T_{i \text{ эфф}}$ экспоненциально мала (см. (40), рис. 3 и 8); температура электронов такая же, как и в невозмущенной плазме. Следовательно, $T_e \gg T_{i \text{ эфф}}$. Можно поэтому ожидать неустойчивости в этой области, аналогичной пучковой неустойчивости в разнотемпературной плазме¹⁶.

Для исследования вопроса об устойчивости необходимо рассмотреть произвольные малые возмущения основного решения и определить, как они изменяются во времени. В общем случае такая задача весьма сложна. Мы рассмотрим лишь наиболее интересный класс возмущений основного решения. А именно, учтем, что в системе координат, связанной с основным потоком плазмы, позади тела сталкиваются два вторичных потока, движущихся в направлении оси x , ортогональном к скорости основного потока. Естественно поэтому искать неустойчивость плазмы по отношению к продольным волнам, также распространяющимся в направлении x . Поскольку возмущенная область в направлении x имеет размер R_0 , возмущения с длиной волны, большей чем R_0 , устойчивы. Рассмотрим поэтому лишь волны, длина которых много меньше R_0 :

$$kR_0 \gg 1. \quad (77)$$

Далее, из-за движения основного потока возмущения, возникшие вблизи тела, т. е. при малых z , с течением времени сносятся в область больших значений z . Иначе говоря, условия, в которых развиваются колебания плазмы, меняются со временем. Мы рассмотрим здесь лишь колебания, частота которых достаточно велика: $\omega t_0 \gg 1$, где t_0 — время, характеризующее изменение параметров плазмы. Учитывая, что наиболее быстро изменяется концентрация частиц:

$$N \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{z}}{t}\right) \sim \exp\left(-\frac{R_0 v_0}{z \sqrt{T_e/M}}\right),$$

находим, что

$$t_0 = \frac{N}{v_0 \left| \frac{\partial N}{\partial z} \right|} \sim \frac{z^2 \sqrt{T_e/M}}{R_0 v_0^2}.$$

Следовательно, указанное условие имеет вид

$$\frac{\omega z^2 \sqrt{T_e/M}}{R_0 v_0^2} \gg 1. \quad (78)$$

При выполнении условий (77) и (78) при анализе устойчивости плазму можно считать локально однородной и квазистационарной. Иначе говоря, критерии устойчивости в данной точке возмущенной области и в данный момент времени такие же, как и в однородной стационарной плазме с теми же значениями характерных параметров. Необходимо поэтому сначала исследовать устойчивость однородной стационарной плазмы. Для решения этого вопроса достаточно рассмотреть дисперсионное уравнение и определить показатель затухания волн γ . Если $\gamma > 0$, то волны затухают и плазма устойчива. Если же $\gamma < 0$, то малые отклонения от равновесного состояния увеличиваются и система неустойчива. Дисперсионное уравнение для ионно-звуковых волн в бесстолкновительной плазме, как известно,

имеет вид

$$-\frac{4\pi e^2 N}{k^2 T_e} + \frac{4\pi e^2}{kM} \int_C du \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{1}{\omega - i\gamma + \mathbf{k}u} = 1, \quad (79)$$

где f_i — функция распределения ионов в направлении скорости \mathbf{u} ; \mathbf{k} , ω и γ — волновой вектор, частота и показатель затухания рассматриваемых волн, C — контур интегрирования в комплексной плоскости переменной u , указанный Ландау¹⁷. В интересующем нас случае ионы представляют собой два потока с разными плотностями и эффективными температурами. Принимая для простоты распределение ионов максвелловским в каждом потоке, приходим вместо (79) к следующему дисперсионному уравнению:

$$(kD_2)^2 + \frac{T_2}{T_e} \left(\frac{N_1}{N_2} + 1 \right) + 1 - J \left(\frac{\omega - kv_2 - i\gamma}{kv_{T2}} \right) + \frac{T_2 N_1}{T_1 N_2} \left[1 - J \left(\frac{\omega - kv_1 - i\gamma}{kv_{T2}} \right) \right] = 0; \quad (80)$$

здесь $D_2 = (T_2/4\pi e^2 N_2)^{1/2}$ — дебаевский радиус для второго потока; N_1 , v_1 , v_{T1} и T_1 — концентрация, направленная и тепловая ($v_{T1} = \sqrt{T_1/M}$) скорости и температура в одном потоке ионов, а N_2 , v_2 , v_{T2} и T_2 — те же величины во втором потоке; наконец, $J(z)$ — функция комплексного переменного z , определенная соотношением

$$J(z) = z \exp(-z^2/2) \int_{i\infty}^z \exp(\tau^2/2) d\tau = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} z \Phi(z/\sqrt{2}),$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятностей, таблицы значений которого приведены в¹⁸.

Граница области неустойчивости определяется, естественно, условием

$$\gamma = 0. \quad (81)$$

При выполнении условия (81) функции J входят в уравнение (80) лишь как функции действительного аргумента. В этом случае

$$J(a) = ae^{-a^2/2} \int_0^a \exp(\tau^2/2) d\tau - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \exp(-a^2/2) = F_1(a) - iF_2(a). \quad (82)$$

Подставляя выражение (82) в уравнение (80) при $\gamma = 0$, имеем

$$1 - F_1 \left(\frac{\omega - kv_2}{v_{T2}} \right) + \frac{T_2 N_1}{T_1 N_2} \left[1 - F_1 \left(\frac{\omega - kv_1}{kv_{T1}} \right) \right] + \frac{T_2}{T_e} \left(\frac{N_1}{N_2} + 1 \right) + (kD_2)^2 = 0, \quad (83)$$

$$F_2 \left(\frac{\omega - kv_2}{kv_{T2}} \right) + \frac{T_2 N_1}{T_1 N_2} F_2 \left(\frac{\omega - kv_1}{kv_{T1}} \right) = 0. \quad (84)$$

Поскольку все входящие сюда параметры зависят лишь от ρ и t , одно из уравнений (83), (84) определяет фазовую скорость волн $\omega/k = v_\phi(\rho, t)$, а второе устанавливает связь значений ρ и t , при которых $\gamma = 0$, т. е. определяет границу области неустойчивости.

Рассмотрим область позади пластинки; вблизи нее $\rho < 1$, $t \leq 1$. Для определенности примем, что $\rho \geq 0$ и что величины N_1 , v_1 , T_1 характеризуют поток, идущий от границы $\rho = 1$, а N_2 , v_2 , T_2 — от противоположной границы $\rho = -1$. Рассмотрим сначала уравнение (84). Учтем,

что температуры ионов T_1 и T_2 при $t \ll 1$ экспоненциально малы (по сравнению с T_e), а скорости v_1 и v_2 больше, чем $\sqrt{T_e/M}$. Следовательно, отношения v_2/v_{T2} и v_1/v_{T1} — экспоненциально большие величины, причем всюду, кроме точки $\rho = 0$: $v_2/v_{T2} \gg v_1/v_{T1}$, так как $T_2 \ll T_1$. Решение уравнения (84) естественно искать тогда в виде

$$\omega = kv_2(1 + \Delta), \quad (85)$$

где $\Delta \ll 1$. Подставляя (85) в (84), находим

$$\Delta = \sqrt{\frac{MT_2}{T_e T_1}} (v_1 + v_2) = \sqrt{\frac{2T_2}{T_1}} (u_1 + u_2), \quad (86)$$

где $u_1 = v_1/\sqrt{2T_e/M}$, $u_2 = v_2/\sqrt{2T_e/M}$ — безразмерные скорости (они определены формулами (34)). Подставляя теперь выражения (85), (86) в уравнение (83) и полагая в нем $kD \rightarrow 0$, приходим к соотношению

$$2 \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right) (u_1 + u_2)^2 = \frac{T_1^{\frac{1}{2}}}{T_2}. \quad (87)$$

Для значений ρ и t , удовлетворяющих соотношению (87), показатель затухания ионно-звуковых волн $\gamma = 0$. Соотношение (87) определяет, следовательно, границу области устойчивости плазмы за пластинкой; она изображена на рис. 15; область плазмы выше кривой на рис. 15 неустойчива *).

Рис. 15. Граница области устойчивости при обтекании пластинки ($\beta = 1$).

На рис. 15 приведены результаты для однотемпературной плазмы. С увеличением отношения T_e/T_i область неустойчивости расширяется; ее инкременты возрастают. Отметим также, что здесь рассматривалась неустойчивость за пластинкой. Роль неустойчивости ослабевает с увеличением эффективной длины тела (в переменных ρ , t).

XIII. ПОТЕНЦИАЛ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Обтекание тел плазмой рассмотрено выше в предположении, что их поверхность имеет значительный отрицательный потенциал. Такой потенциал действительно устанавливается на теле в отсутствие магнитного поля и электронной эмиссии. В самом деле, тепловые электроны обычно поглощаются при столкновении с поверхностью тела, а ионы нейтрализуются⁵. Потоки ионов и электронов, падающих на поверхность тела, должны быть поэтому равны друг другу. Но если последнее движется со скоростью $v_0 \ll \sqrt{T_e/m}$, то поток ионов на незаряженное тело меньше потока электронов. Поверхность тела приобретает поэтому значительный отрицательный заряд, отражающий большую часть электронов.

При наличии эмиссии электронов с поверхности тела потенциал возрастает и может изменить знак. В реальных условиях ионосферы и магнитосферы эмиссия может вызываться фотоэффектом¹⁹⁻²¹, нагревом поверхности²², воздействием корпускулярных потоков^{21, 23}; возможна и искусственная эмиссия быстрых или тепловых электронов.

*) Функция распределения ионов принималась при расчете равной суммы двух автомоделных решений (формула (53) при $g_1 = 0$).

При движении проводящего тела в магнитном поле важную роль может играть поляризация, возникающая вследствие действия силы Лоренца. В этом случае возникает некоторое неоднородное распределение потенциала на поверхности движущегося тела. Впервые на это явление указали Д. Берд и Ф. Джонсон²⁰; в дальнейшем его изучали в теоретических работах и на опыте в лабораторных условиях^{24, 25} и в ионосфере^{34, 52}. Рассмотрим здесь этот вопрос подробнее.

Пусть сферическое тело радиуса R_0 движется со скоростью v_0 в направлении, ортогональном к магнитному полю \mathbf{H} . Примем, как обычно, что $R_0 \gg D$ и $b = (Mv_0^2/2T_e)^{1/2} \gg 1$ (D — дебаевский радиус). Определим распределение потенциала электрического поля φ на поверхности проводящего тела. В связанной с телом системе координат направим ось z по $-\mathbf{v}_0$, ось x — по \mathbf{H} . Тогда

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{v_0}{c} Hy = \frac{v_0}{c} H(y - y_0). \quad (88)$$

Постоянная $y_0 = -c\varphi_0/v_0H$ определяется из условия равенства полных потоков на тело электронов и ионов (предполагается, как обычно, что электроны поглощаются поверхностью, а ионы полностью на ней рекомбинируют). При не слишком больших размерах тела $R_0 \ll v_0/\Omega_{Hi}$ поток ионов не зависит от потенциала поверхности:

$$J_i = N_0 v_0 \pi R_0^2. \quad (89)$$

Плотность потока электронов, если пренебречь воздействием на них электрического поля, проникающего в глубину плазмы, равна

$$j = \begin{cases} j_0 \exp(e\varphi/T_e) & \text{при } \varphi \leq 0, \\ j_0 & \text{при } \varphi > 0; \end{cases} \quad (90)$$

здесь $j_0 = N_0 \sqrt{T_e/2\pi m}$ — плотность теплового потока электронов на незагрязненную поверхность (см.², стр. 356). Полный поток электронов

$$J_e = \int j ds = 2 \int_{-R_0}^{R_0} \sqrt{R_0^2 - y^2} j(y) dy. \quad (91)$$

В последнем выражении учтено, что поток электронов, согласно (88) и (90), зависит только от y и что электроны, как и ионы, попадают лишь на лобовую поверхность тела (в силу условия $b \gg 1$ ^{1, 2}). Подставляя теперь выражения (90) в (91), находим

$$J_e = 2R_0^2 j_0 \left[P\left(\alpha, \frac{y_0}{R_0}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{y_0}{R_0}\right) - \frac{1}{2} \frac{y_0}{R_0} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{R_0^2}} \right], \quad (92)$$

$$P\left(\alpha, \frac{y_0}{R_0}\right) = \int_{1-(v_0/R_0)}^2 \sqrt{x(2-x)} \exp(-\alpha x) dx;$$

здесь α — характерный безразмерный параметр:

$$\alpha = \frac{ev_0 H R_0}{c T_e}. \quad (93)$$

Приравнивая полные потоки электронов (92) и ионов (89), определяем y_0 . Естественно, что область положительных потенциалов на теле имеется, если только $y_0 < R_0$. Радиус тела R_{0c} , при котором впервые появляется положительный потенциал, определен условием $y_0 = R_{0c}$. Из (92), (89)

в этом случае получаем

$$\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{mv_0^2}{T_e} \right)^{1/2} = \int_0^2 \sqrt{x(2-x)} \exp(-\alpha x) dx. \quad (94)$$

Учтем, что слева стоит малая величина. Равенство (94) возможно поэтому только при $\alpha \gg 1$. Переходя тогда под интегралом к новой переменной $\tau = \alpha x$, можем заменить верхний предел интегрирования по τ на ∞ .

С точностью до малых членов (порядка $1/4\alpha$) интеграл равен $\pi^{1/2}/2^{1/2}\alpha^{3/2}$. Следовательно,

$$R_{0c} = \frac{cT_e^{4/3}}{\pi^{2/3}m^{1/2}v_0^{5/3}eH}. \quad (95)$$

В условиях ионосферы величина $R_{0c} \sim 0,5-5$ м.

При больших значениях $R_0 \gg R_{0c}$ член $P(\alpha, y_0/R_0)$ в выражении (92) несуществен. Для y_0 тогда получаем

$$y_0 = R_0 \left[1 - \frac{3^{2/3}\pi}{2} \left(\frac{mv_0^2}{T_e} \right)^{1/3} \right].$$

Рис. 16. Потенциал на поверхности шара, движущегося в магнитном поле.

Таким образом, при $R_0 \gg R_{0c}$ часть тела с координатами $y_0 \leq y \leq R_0$ находится при положительном по отношению к плазме потенциале. Эта область показана штриховкой на рис. 16. Двойной штриховкой показана область, на которой в основном поглощаются электроны. Ионы при $R_0 \ll v_0/\Omega_{Hi}$ попадают на всю лобовую поверхность, при $R_0 \gg v_0/\Omega_{Hi}$ — только на ее незаштрихованную область.

Аналогичный расчет для цилиндра, ось которого ортогональна к магнитному полю, движущегося со скоростью v_0 , ортогональной к оси и к \mathbf{H} , дает

$$L_{0c} = \frac{cT_e^{3/2}}{\sqrt{2\pi}m^{1/2}ev_0^2H};$$

здесь L_{0c} — длина цилиндра, при которой на краю тела появляется положительный потенциал. При $L \gg L_{0c}$ область положительных потенциалов составляет от всей длины цилиндра L часть, равную pL , где

$$p = \frac{N_0 v_0}{j_0} = \sqrt{\frac{2\pi m v_0^2}{T_e}}.$$

Мы видим, таким образом, что на телах большого размера, движущихся в магнитном поле, благодаря поляризации образуется область положительных потенциалов. Это приводит к возникновению интересных особенностей при обтекании таких тел плазмой. Действительно, в том случае, когда на поверхности тела значительный отрицательный потенциал, оно взаимодействует в основном с ионами плазмы. Именно этот случай рассматривался выше (см. также ^{1, 2}). Концентрация электронов в окрестности тела изменена лишь постольку, поскольку возмущена концентрация ионов. Ионы движутся медленнее тела. В плазме образуется сильно вытянутый и медленно расширяющийся с удалением от тела след.

Можно ожидать, что картина возмущения, вызываемого областями положительного потенциала, существенно иная. Действительно, электроны плазмы движутся вдоль силовых линий магнитного поля много

быстрее тела. Все они поглощаются в областях поверхности, имеющих положительный потенциал. От этих областей поэтому вдоль силовых линий магнитного поля должны отходить возмущенные зоны, обедненные электронами. Здесь возникает электрическое поле, вызывающее соответствующее возмущение и среди ионов. Размер возмущенной зоны в направлении силовых линий магнитного поля в v_{Te}/v_0 раз больше размера тела (v_{Te} — тепловая скорость электронов). Таким образом, при обтекании большого тела $R_0 > R_{0c}$, помимо обычного следа, возникающего за основной отрицательно заряженной частью тела, должны образовываться у положительно заряженной части тела тонкие «крылья», вытянутые вдоль \mathbf{H} и отличающиеся по своей структуре от основного следа. Эффект усиливается для тел, эмиттирующих электроны.

XIV. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ ДЕБАЕВСКОГО РАДИУСА

Ранее мы исходили из уравнения квазинейтральности плазмы (7), которое заменяло уравнение Пуассона. Такое приближение соответствует пределу $R_0/D \rightarrow \infty$, т. е. справедливо в условиях, когда характерный размер возмущенной области велик по сравнению с дебаевским радиусом. В ряде проблем это приближение, однако, недостаточно.

Прежде всего приближение квазинейтральности неприменимо, если размер тела меньше или порядка дебаевского радиуса.

Далее, конечность дебаевского радиуса существенна при рассмотрении прилегающего к поверхности тела двойного слоя, в котором квазинейтральность нарушена. Размер этого слоя возрастает позади тела, где концентрация частиц мала. Он растет также при увеличении потенциала тела. Особенно существенны эффекты, связанные с отклонением от квазинейтральности в случае, если потенциал тела очень велик:

$$|\varphi_0| \gtrsim \frac{T_e}{e} \left(\frac{R_0}{D} \right)^{4/3}.$$

В этом случае двойной слой может стать порядка размера тела.

Исследование всех этих случаев требует фактического решения уравнения Пуассона. Тонкий двойной слой у поверхности тела можно рассчитать аналитически. Соответствующие результаты изложены в ², § 14, и ²⁶. В остальных случаях необходимо численное интегрирование уравнения Пуассона. В последние годы таким расчетам уделялось значительное внимание. Мы кратко опишем некоторые из соответствующих работ, ограничиваясь в основном постановкой задачи и результатами. Описание численной процедуры выходит за рамки настоящего обзора.

1. Обтекание тела с размерами порядка дебаевского радиуса потоком холодных ионов

М. В. Масленников и Ю. С. Сигов²⁷ произвели совместное численное интегрирование уравнений движения ионов и уравнения Пуассона. Корректное решение такой задачи представляет большие трудности, связанные с плохой устойчивостью уравнения Пуассона. В ²⁷ эти трудности были преодолены с помощью специального вычислительного приема и получены надежные результаты. Распределение электронов в этой работе предполагалось бальцмановским, а тепловым движением ионов пренебрегалось ($T_i = 0$). Результаты расчета — поверхности постоянных значений потенциала $\psi = e\varphi/T_e$ при $R_0 = D$ и потенциала поверхности $\varphi_0 = 0$ — приведены на рис. 17. Обращает на себя внимание осциллирующая зависи-

мость потенциала от расстояния. Можно думать, что наличие таких осцилляций обусловлено пренебрежением тепловым движением ионов:

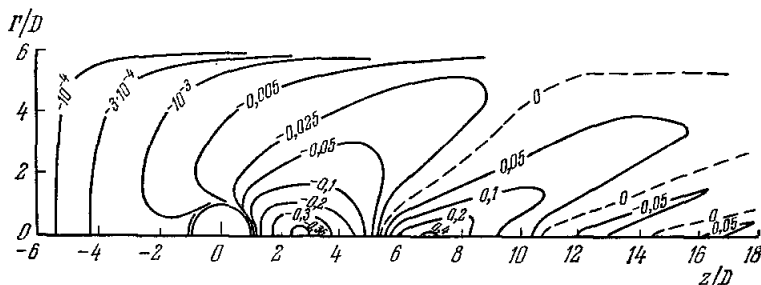


Рис. 17. Поверхности постоянного потенциала при обтекании сферы радиуса $R_0 = D$.

Значения $\psi = e\phi/T_e$ указаны на рисунке.

в отсутствие теплового движения ионно-акустические волны распространяются без затухания Ландау, что способствует появлению осцилляций. Тепловое движение при $T_i \sim T_e$ должно приводить к их размыванию.

2. Итерационное решение задачи обтекания пластинки с размерами порядка дебаевского радиуса

Дж. Тейлор²⁸ разработал итерационную процедуру для совместного решения уравнения Пуассона и кинетического уравнения. В качестве нулевого приближения берется функция распределения ионов в отсут-

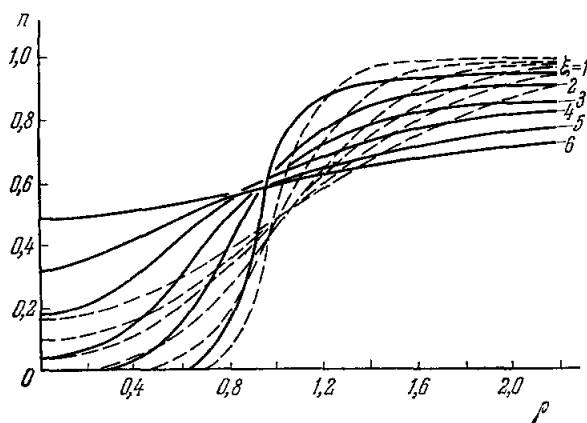


Рис. 18. Зависимость концентрации $n = N/N_0$ от $\rho = x/R_0$ при обтекании пластинки.

ствии электрического поля. Поэтому итерации проводят по электрическому полю. Следует подчеркнуть, что тем самым учитывается тепловое движение ионов, и рассматриваемая модель является вполне реалистической. С другой стороны, как видно из приведенного выше в гл. IX обсуждения, распределение нейтральных частиц является хорошим приближением для распределения ионов только в области не слишком большого разрежения. Вследствие этого итерации плохо сходятся вблизи тела. На рис. 18 изображена зависимость $n = N/N_0$ от $\rho = x/R_0$ при фиксированных $\xi = z/R_0$. Тело представляет собой пластинку толщиной (в направлении оси z) $0,6D$ и шириной (в направлении оси x) $2R_0 = 3D$. Число Маха $b = 6$, потенциал на теле $e\phi_0/T_e = -2,75$. На рисунке показано нулевое приближение (штриховые линии) и первое приближение (сплошные линии). При большом потенциале на теле ($e\phi_0/T_e = -14$) зависимость N/N_0 от ρ делается немонотонной, что качественно соответствует результатам²⁷ для холодных ионов.

3. Обтекание сильно заряженного тела

Задача обтекания тела, заряженного настолько сильно, что $|\epsilon\phi_0| \gg \gg Mv_0^2$, решалась Э. Уокером²⁹. В этой работе не рассматривалось тело какой-либо конкретной формы. Вместо этого фактически предполагалось, что все частицы, пересекающие некоторую граничную эквипотенциальную

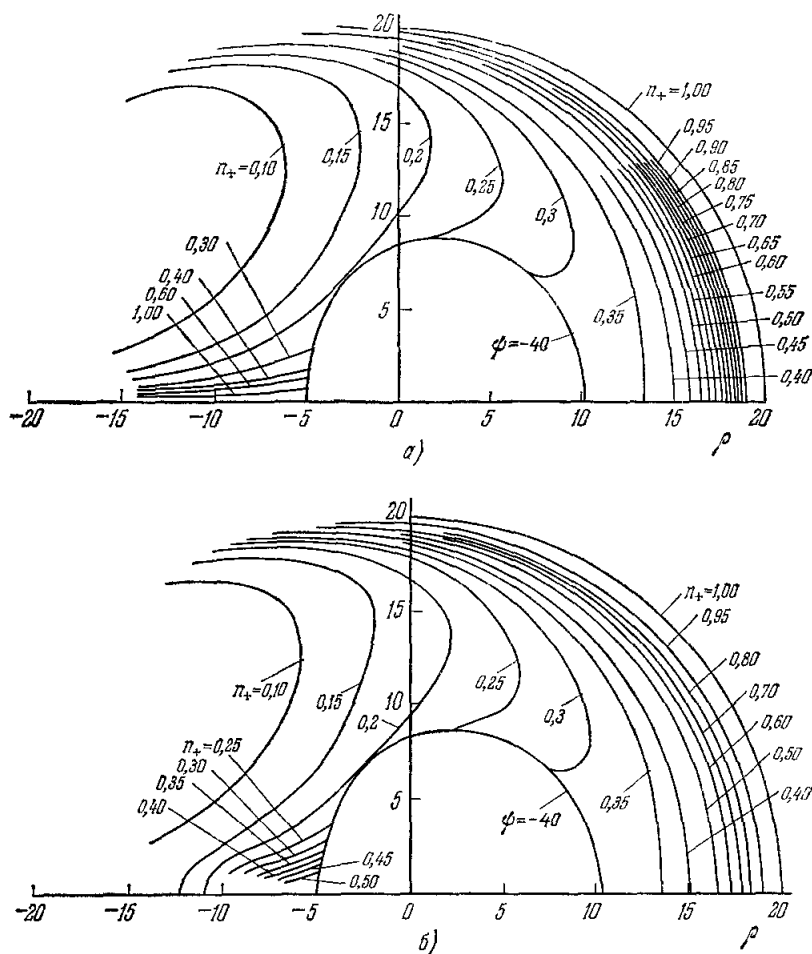


Рис. 19. Поверхности постоянной концентрации ионов $n_+ = N_i/N_0$ в окрестности сильно заряженного тела.

а) $\beta = T_e/T_i = \infty$; б) $\beta = 1$.

поверхность, втягиваются полем и поглощаются телом. Физическая основа такого приближения состоит в том, что при очень большом потенциале размер области, где нарушена квазинейтральность и имеются сильные поля, становится много больше размера тела *). В этом случае конкретная форма тела может быть несущественна.

*) Аналогичным методом задача решалась для сильно заряженного покоящегося тела Дж. Лэнгмюром и К. Блоджетт³⁰ (см. также², § 39). Как следует из этой работы, размер сильно возмущенной полем области много больше радиуса тела R_0 , если $|\phi_0| \gg (T_e/e) (R_0/D)^{4/3}$.

Задача решалась численно путем совместного решения уравнения Пуассона и уравнения движения ионов. К недостаткам расчета относится использование автором плохо обоснованного условия для потенциала на невозмущенной границе плазмы и произвольный выбор самой этой границы. Мы не будем подробно обсуждать этот вопрос.

На рис. 19 показаны поверхности постоянной концентрации ионов $n_+ = N_i/N_0$, вычисленные в ²⁹. Они построены для $b = 5,8$. На рисунках показана также эквипотенциальная поверхность для

$$\psi = \frac{2e\varphi_0}{MV_0^2} = -40.$$

На границе невозмущенной плазмы (полусфере $\rho = 20$) ψ принимается равным $-0,004$. Единицей длины на рисунках служит

$$D_0 = DV\bar{b} = \sqrt{\frac{Mv_0^2}{8\pi N_0 e^2}}.$$

Рис. 19, а построен для холодных ионов, рис. 19, б — для равнотемпературной плазмы. Из рисунков видно, что в рассматриваемом случае очень сильного потенциала спереди и по бокам тела тепловое движение ионов мало существенно. Напротив, позади тела (вблизи оси z) различие между кривыми на рис. 19, а и б велико даже в качественном отношении.

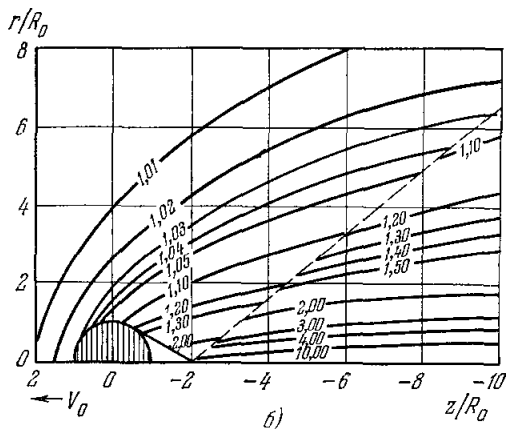
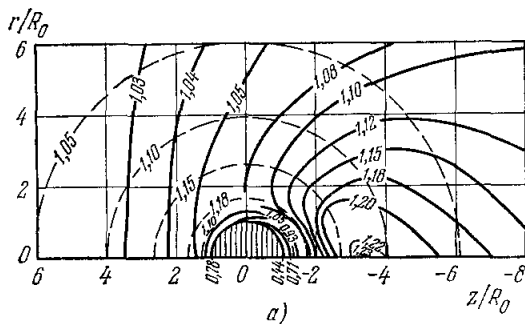


Рис. 20. Поверхности постоянной концентрации ионов $n_+ = N_i/N_0$ в окрестности малого тела с $R_0 \ll D$.

при выполнении условий (96) при рассмотрении возмущений в окрестности тела при $r < D$ электрическое поле можно считать кулоновским. Это существенно упрощает расчет и позволяет получить в квадратурах выражения для концентрации и потоков частиц в окрестности тела.

Результат численного табулирования распределения ионов представлен на рис. 20. На рис. 20, а ($\varphi_0 = -T/e$, $v_0 = \sqrt{2T/M}$) изображены

4. Обтекание тел малого размера

А. М. Москаленко и В. С. Князюк^{31, 32} рассмотрели обтекание сферических тел, радиус которых много меньше дебаевского радиуса в невозмущенной плазме. В этом случае в окрестности тела электрическое поле кулоновское. Если, кроме того, потенциал поверхности φ_0 не слишком велик:

$$|\varphi_0| \ll \frac{T_e}{e} \frac{D}{R_0}, \quad D \gg R_0, \quad (96)$$

в области $r > D$ (где кулоновское поле искажено за счет дебаевской экранировки) электрическое поле слабое ($\varphi \sim \varphi_0 (R_0/r) \ll T/e$) и мало влияет на движение частиц. Точный вид поля при $r > D$ поэтому мало существен. Таким образом,

поверхности постоянных значений плотности ионов (цифры на кривых дают значения $n = N_i/N_0$). Штриховой кривой показано распределение ионов в окрестности покоящегося тела при том же потенциале поверхности. Видно, что невозмущенная область впереди движущегося тела ближе к его поверхности. Позади тела, вблизи поверхности, имеется небольшая зона разрежения, за ней — область повышения концентрации. Максимум концентрации ионов достигается на оси позади тела на некотором расстоянии (порядка $2,5R_0$) от его поверхности. Увеличение концентрации ионов в этой области является следствием собирающего действия электрического поля. Качественно эти результаты аналогичны полученным Уокером²⁹.

На рис. 20, б приведено распределение ионов позади тела, полученное в пренебрежении их тепловым движением. Потенциал поверхности $\phi_0 = -Mv_0^2/2e$. Сплошные кривые — поверхности равной концентрации ионов.

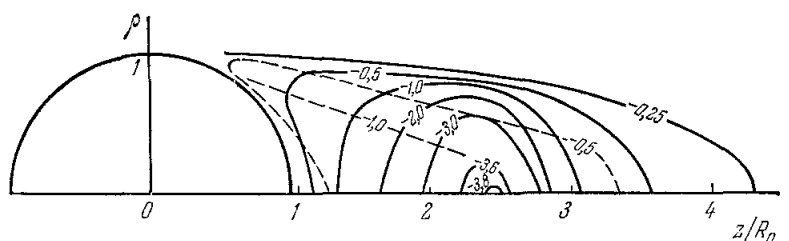


Рис. 21. Поверхности постоянного потенциала за сферой радиуса $R_0 = 50D$.

Штриховая кривая разделяет области, куда попадают ионы, облетевшие тело с другой стороны, и куда они не попадают, поглощаясь на поверхности тела. В той области, куда такие ионы попадают, концентрация больше. В результате возникает разрыв в распределении концентрации ионов. Вблизи тела имеется область с равной нулю концентрацией ионов (на рисунке она ограничена тонкой сплошной линией). При учете теплового движения линии разрыва размываются.

В^{31, 32} найдено также распределение потока частиц на поверхности тела. С увеличением потенциала поверхности распределение потока частиц по поверхности становится все более симметричным. Интересно, что при больших значениях ϕ_0 полный поток ионов на поверхность движущегося тела уменьшается с увеличением его скорости.

5. Поток ионов на поверхность движущейся пластинки

Выше был определен поток ионов на пластинку, когда ширина ее z_0 много больше дебаевского радиуса, $z_0 \gg D$. В этом случае при не слишком высоких потенциалах поля на поверхности пластинки ϕ_0 плотность потока не зависит от ϕ_0 и определяется выражением (47), приведенным в гл. V. Важно, однако, что при больших значениях $b \gg 1$ плотность потока сильно падает по мере увеличения угла между нормалью к пластине \mathbf{n} и направлением скорости \mathbf{v}_0 . При углах, близких к $\pi/2$, даже при не слишком больших потенциалах ϕ_0 на величину потока может существенно повлиять наличие заряженного двойного слоя.

Вычисление потока (с учетом двойного слоя) для случая, когда толщина двойного слоя меньше ширины пластинки, в пренебрежении тепловым движением ионов проведено в работе¹⁴. Показано, что поток ионов

на поверхность пластинки I_i в зависимости от угла θ между \mathbf{n} и \mathbf{v}_0 описывается формулой

$$\frac{I_i}{N_0 v_0 S} = \cos \theta + \frac{2 \sin \theta}{3} \frac{DN_0^{1/2} j(\tau)}{z_0 v_0 N_a^{3/2}(\tau)} \left[\left(1 + \frac{2e |\varphi_0| N_a^2(\tau)}{M j^2(\tau)} \right)^{1/2} - 1 \right]^{3/2}, \quad (97)$$

$$\tau = -b \operatorname{ctg} \theta.$$

Концентрация $N_a(\tau)$ определена в гл. III, поток $j(\tau)$ задается формулой (47) для $\alpha_1 = \theta$. Второй член в формуле (97) дает ту часть потока, которая связана с конечной толщиной двойного слоя. Видно, что при

больших значениях θ роль этого члена становится существенной и даже определяющей. Результат расчета зависимости I/I_0 от θ для $b = 2,5$, $z_0/D = 17,7$, $-e\varphi_0/T_e = 35$ приведен на рис. 22. Штриховая кривая на рисунке дает плотность потока без учета влияния электрического поля двойного слоя.

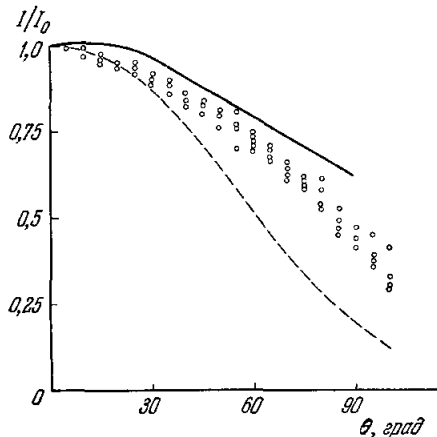


Рис. 22. Поток ионов на плоский зонд в зависимости от угла θ между нормалью к поверхности зонда и направлением его движения.

6. Обтекание шара однотемпературной плазмой

После того как настоящий обзор был подготовлен к печати, нам стала известна интересная работа В. Лиу и Г. Джью³⁸, в которой производилось совместное численное решение уравнений движения ионов и уравнения Пуассона для случая $T_e = T_i$. Решение велось итерациями,

причем за нулевое приближение принималось распределение потенциала, полученное в¹, в пренебрежении влиянием электрического поля на движение ионов. Результаты расчета для шара (причем, по-видимому, $R_0/D = 50$) показывают, что отклонения от квазинейтральности слабо влияют на распределение ионов, но приводят, как это и должно быть, к заметному изменению распределения потенциала при $z \sim R_0$. Полученные эквипотенциальные кривые приведены на рис. 21. Числа вблизи соответствующих кривых показывают значение величины $e\varphi/T \ln(50^2)$. Штриховой линией показаны эквипотенциалы, полученные при приближенном решении уравнения Пуассона и в пренебрежении влиянием электрического поля на движение ионов. Представляло бы интерес произвести более детальное сопоставление результатов³⁸ с полученными выше (см. рис. 12) результатами для диска. Такое сравнение затрудняется, однако, недостаточно подробным характером публикации³⁸.

XV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗОНЫ В ОКРЕСТНОСТИ РАКЕТ И СПУТНИКОВ В ИОНОСФЕРЕ

Экспериментальные исследования возмущений, вызываемых в ионосфере спутником или ракетой, представляют значительный интерес. Получение и обработка соответствующих данных представляют, однако, трудную задачу. Действительно, диагностика разреженной плазмы сложна и в обычных лабораторных условиях. К этим трудностям добавляется то,

что измерения производятся на движущемся в ионосфере объекте. Информацию необходимо накопить и передать на большое расстояние. Важно также, что тело обычно совершает сложное движение в пространстве. Положение измерительного прибора относительно направления движения тела меняется во времени. Поэтому необходима очень тщательная обработка результатов наблюдений, учитывающая точное положение прибора относительно направления движения тела в тот момент времени, когда производилось измерение. Число работ, в которых такая подробная обработка данных наблюдения произведена, невелико^{33-36, 39, 40}.

При сравнении результатов эксперимента и теории следует иметь в виду, что форма поверхности тел с учетом размещенной на них аппаратуры обычно весьма сложна. Кроме того, условия в ионосфере сильно меняются с высотой, а также в зависимости от времени суток, географической широты и т. д. Соответственно меняются и безразмерные параметры, характеризующие особенности обтекания тел.

1. Измерения на ракете

В работе К. Нормана и А. Уиллмора³³ произведено измерение потока ионов на поверхности высотной ракеты. Ракета стартовала в Южной Австралии (Вумера) в ночное время. Измерения производились при движении ракеты на высотах от 280 до 500 км. Скорость ее при этом изменялась соответственно от 3,0 до 2,2 км/сек. Помимо общего движения, ракета вращалась вокруг оси с угловой скоростью 0,218 рад/сек и совершала гироскопическое движение с углом раствора конуса 89,8° и угловой скоростью $\Omega = 0,144$ рад/сек. Благодаря этому составляющая скорости в направлении, ортогональном к оси ракеты, непрерывно изменялась по величине.

На поверхности ракеты в той области, где ее практически можно считать цилиндром, были расположены четыре зонда, смещенные друг относительно друга на одинаковый угол $\theta = 90^\circ$ в плоскости, ортогональной к оси цилиндра. Зонды представляли собой плоские диски радиуса 5 см. Они находились под постоянным потенциалом — 3,2 в по отношению к поверхности ракеты. Измерялся полный ток ионов на зонд. Величина измеренного потока ионов в зависимости от угла θ между положением зонда и направлением скорости ракеты (точнее, ее компоненты в плоскости, ортогональной к оси цилиндра) представлена на рис. 22 (кружки); здесь I_0 — максимальный поток, возникающий тогда, когда $\theta = 0$.

Сравним результаты эксперимента и расчета. На высотах от 300 до 500 км в ночное время можно принять, что основную массу составляют ионы кислорода O^+ с $M = 16$ (в единицах массы протона). Температура ионов близка к температуре электронов и меняется от 900 до 1500° К (см. ³). Следовательно, величина $b = (Mv_0^2/2T_e)^{1/2}$ изменялась от 3,2 на высоте 280 км до 1,8 на высоте 500 км. Среднее значение $b \approx 2,5$. Отношение I/I_0 для потока ионов на поверхность цилиндра, вычисленное по формуле (47) при $b = 2,5$, представлено на рис. 22 штриховой линией. Видно, что при больших углах $\theta > 50-60^\circ$ измеренное на опыте значение I/I_0 существенно выше. Естественно предположить, что увеличение потока ионов при больших углах θ , наблюдаемое на опыте, связано с влиянием на движение ионов электрического поля зондов.

Действительно, в эксперименте использовались неэкранированные зонды. Потенциал их относительно поверхности тела — 3,2 в, относительно плазмы $\phi_0 = -(3,5-4)$ в. Следовательно, в условиях опыта отношение $-e\phi_0/T_e \approx 30-40$. Концентрация плазмы, измеренная в тех же опытах, изменялась в пределах $(1-2,4) \cdot 10^5$ см⁻³. Среднее значение $N_0 \approx 2 \cdot 10^5$ см⁻³.

Следовательно, дебаевский радиус $D \approx 0,5$ см и для зонда отношение $(R_0/D) \approx 10$. Видно, что $-e\phi_0/T_e \sim (R_0/D)^{4/3}$. В этих условиях, как следует из сказанного в гл. XIV, п. 5, поток ионов на зонд при больших углах θ должен значительно возрасти вследствие собирающего действия электрического поля зонда. Результат расчета отношения I/I_0 по формуле (97), т. е. с учетом собирания ионов полем зонда, представлен на рис. 22 сплошной кривой (для $-e\phi_0/T_e = 35$, $z_0/D = \sqrt{\pi R_0^2/D} \approx 17,7$, $b = 2,5$). Согласие теории с экспериментом можно считать удовлетворительным.

В работе ³³ произведено также измерение зависимости потока ионов на зонд, расположенный позади тела ($\theta \sim 180^\circ$), от скорости тела. Сравнение этих результатов с теорией, проведенное в ¹⁶, показало хорошее соответствие. Однако при этом расчете, как и подчеркивалось в ¹⁶, использовалось весьма грубое приближение: цилиндрическая поверхность заменялась ее поперечным сечением — пластинкой (что справедливо лишь при достаточном удалении от поверхности; см. гл. VIII); кроме того, не учитывалось собирание ионов полем зонда. Результаты, полученные нами, позволяют уточнить расчет. Распределение ионов позади цилиндра описывается формулой (54). Расчет по формуле (54) для тех же значений параметров, что и в ¹⁶, показывает, что концентрация ионов у поверхности цилиндра при $\theta = 180^\circ$ в 10—20 раз меньше. С другой стороны, учет собирания ионов полем зонда приводит к увеличению потока в 6—10 раз. Таким образом, уточненная теория приводит к значениям $I(\theta = 180^\circ)/I_0$, которые в 1,5—3 раза меньше полученных по приближенной формуле в ¹⁶. Результат при этом зависит от радиуса ракеты, не указанного в ³³. Кроме того, концентрация и поток ионов очень быстро растут при отклонении зонда от положения строго на оси позади тела (например, при изменении угла θ на 10° концентрация возрастает в 2—3 раза). При измерениях это положение не было достаточно точно выдержано. Поэтому детальное сравнение этих измерений с уточненной теорией представляется нецелесообразным.

2. Измерения на спутнике «Ариэль-1»

В работах П. Боуэна, Р. Бойда, А. Уиллмора, К. Хендерсона и У. Самира ³⁴⁻³⁶ производилось измерение плотности потока ионов и электронов в окрестности спутника «Ариэль-1». При движении спутника его высота относительно поверхности Земли изменялась от 390 до 1210 км, наклон орбиты 54° . Период обращения спутника вокруг Земли 101 мин. Кроме того, спутник вращался вокруг некоторой своей оси, совершая 35 оборотов в минуту. Направление оси вращения оставалось почти неизменным в пространстве, угол же между ней и скоростью спутника изменялся в процессе орбитального движения. Благодаря этому периодически изменялось расположение зондов по отношению к направлению движения тела.

Два зонда измеряли ток электронов. Один из зондов (зонд 1) был расположен на поверхности спутника. Форма спутника близка к шару радиуса $R_0 = 30$ см. Зонд 2 был расположен на специальной штанге и находился на расстоянии $5R_0$ от центра. Отношение потока на зонд 1 j_1 к потоку на зонд 2 j_2 изображено на рис. 23, а. По оси абсцисс отложен угол θ , характеризующий положение зонда 1 по отношению к направлению движения спутника (результаты, изображенные на рис. 23, а, суммарные по пяти дням измерений, помеченным соответственными значками \times , \circ , Δ , \bullet , $+$).

При сравнении результатов эксперимента с теорией учтем, что отношение потоков электронов приблизительно равно отношению концентраций ($j_1/j_2 = N_1/N_2$). Концентрация N_1 равна концентрации ионов на границе

двойного слоя. Концентрацию N_2 естественно принять невозмущенной, т. е. равной N_0 . Значение $b = (Mv_0^2/2T_e)^{1/2}$ для области, где двигался спутник, менялось от $b \approx 6$ (ночью в перигее) до $b \approx 1,5$ (в апогее). Среднее значение b , согласно ³⁶, равно $\bar{b} = 3,75$. Сплошная кривая

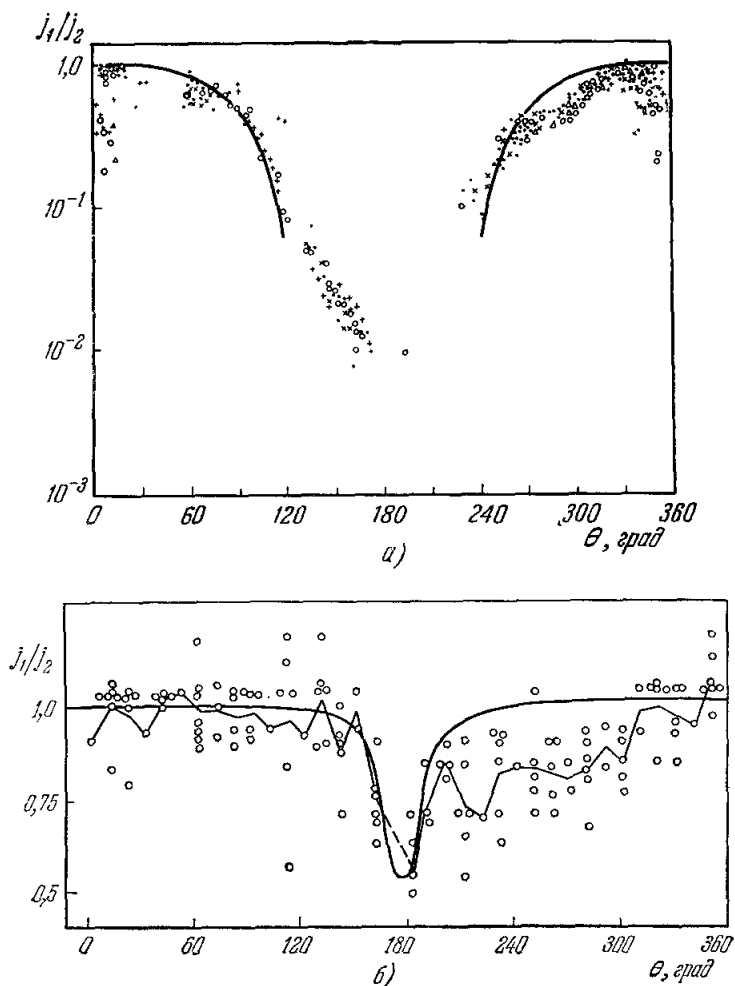


Рис. 23. Концентрация электронов и ионов $n = N/N_0$ в зависимости от угла θ между направлением движения тела и радиусом-вектором, проведенным в рассматриваемую точку.

Кружки — результат измерения j_1/j_2 : а) вблизи поверхности; б) на расстоянии $5R_0$.

на рис. 23, а — результат расчета концентрации ионов по формуле (54) ($\arcsin(R_0/z) = \pi/2$), которая справедлива вблизи поверхности сферы не слишком близко к ее оси, примерно при $\theta \leq 120^\circ$ (а также, разумеется, при $\theta \geq 240^\circ$). Согласие теории с опытом в этой области удовлетворительное. При углах $\theta > 120^\circ$ становится заметным размер экранирующего слоя. Здесь начинается область максимального разрежения. Обсуждение измерений в этой области целесообразнее произвести в следующем разделе, где приводятся результаты экспериментальной работы ³⁹, содержащей более подробные данные.

На рис. 23, б приведены результаты измерения потока электронов с помощью зонда 2, расположенного на расстоянии $5R_0$ от центра, в зависимости от угла θ между направлением на зонд и направлением движения тела. Виден значительный разброс экспериментальных точек. Тонкая кривая — усредненный результат эксперимента. Жирная кривая — результат расчета концентрации ионов для $b = 3,75$ по формулам нейтрального газа (т. е. в пренебрежении влиянием электрического поля на движение ионов)^{2, 37}. Эти формулы должны быть в рассматриваемом случае достаточно точны, так как $t = z/R_0 b \approx 1,2$, а на столь больших расстояниях, как указывалось в гл. IX, учет влияния электрического поля приводит лишь к сравнительно небольшому изменению концентрации ионов. Из рис. 23, б видно определенное соответствие результатов измерений и расчета: положение и ширина основного минимума, а также значение концентрации в нем находятся в согласии с теорией*). Следует отметить, что значительный вклад в возмущение на расстоянии $5R_0$ от центра спутника, кроме основного тела спутника, вносили еще несколько элементов, расположенных вблизи него³⁶. Возможно, что это и является причиной сложной и сильно флуктуирующей картины экспериментальных точек, приведенных на рис. 23. Существенно также, что рассмотрение лишь среднего значения числа Маха является очень грубым приближением. В действительности величина b сильно меняется с высотой из-за изменения ионного состава и температуры ионосферы. Это сильно сказывается на структуре возмущенной зоны. Для более точного сравнения теории и эксперимента необходимо поэтому, чтобы измерения на различных высотах были проделаны отдельно и сопровождалась, по возможности, полными данными о структуре невозмущенной ионосферы: относительной концентрации различных ионов (O^+ , H^+ , He^+), температуре электронов и ионов, концентрации электронов.

В³⁴ наблюдались также осцилляции потоков частиц на зонды, которые интерпретировались как результат колебаний в плазме. Осцилляции локализованы в области границы следа (внутри следа точность эксперимента недостаточна, чтобы установить факт наличия или отсутствия колебаний). Их частота меняется от 2,7 до 3,7 кГц. Неустойчивость, указанная в гл. XI, приводит к возбуждению в плазме колебаний с частотами $f \sim \Omega_0/2\pi = (e^2 N_0 / \pi M)^{1/2}$ (в системе координат спутника). При $N_0 = 10^5$, $M = 16$ получаем $f \approx 5$ кГц. Можно, таким образом, предполагать, что в этих экспериментах наблюдалась указанная выше ионно-звуковая неустойчивость плазмы в зоне следа тела.

3. Измерения на спутнике «Эксплорер-31»

В препринте У. Самира и Г. Ренна³⁹ приведены результаты измерений потока электронов на спутнике «Эксплорер-31» в декабре 1965 г. — январе 1966 г. Наклон орбиты 80° , высота над поверхностью Земли изменялась от 500 до 3000 км. Спутник имел форму восьмигранного параллелепипеда; приближенно его можно считать цилиндром высотой 1 м и радиусом $R_0 \sim 0,5$ м. Спутник вращался вокруг оси параллелепипеда, которая была стабилизирована ортогонально к орбите.

*) Содержащееся в работе³⁶ утверждение о значительном расхождении (в 5 раз) между результатами рассматриваемого эксперимента и формулами теории нейтрального приближения³⁷ является следствием недоразумения. По-видимому, авторы работы³⁶ сравнивали результаты расчета для $b = 8$ с результатами эксперимента для $b = 3,75$. При $b = 3,75$, $z = 5R_0$ из табл. 2 работы³⁷ получаем $N/N_0 = 0,53$, в согласии с экспериментом, в то время как при $b = 8$ значение N/N_0 действительно в 5—6 раз ниже.

Электронный зонд-диск радиусом 1 см был установлен на одной из боковых граней на расстоянии 20 см от нижнего края спутника. Измеренный зондом поток электронов в зависимости от угла θ между скоростью тела и направлением от оси к зонду представлен на рис. 24, а — д. По оси ординат здесь отложено отношение $j(\theta)/j_0$, где j_0 — максимальный поток, который возникает тогда, когда направление на зонд совпадает с направлением скорости тела ($\theta = 0$). Кружки — результат эксперимента. Измерения проводились на различных высотах h и в различное местное время t , указанные на рисунках. Одновременно с помощью ионного спектрометра

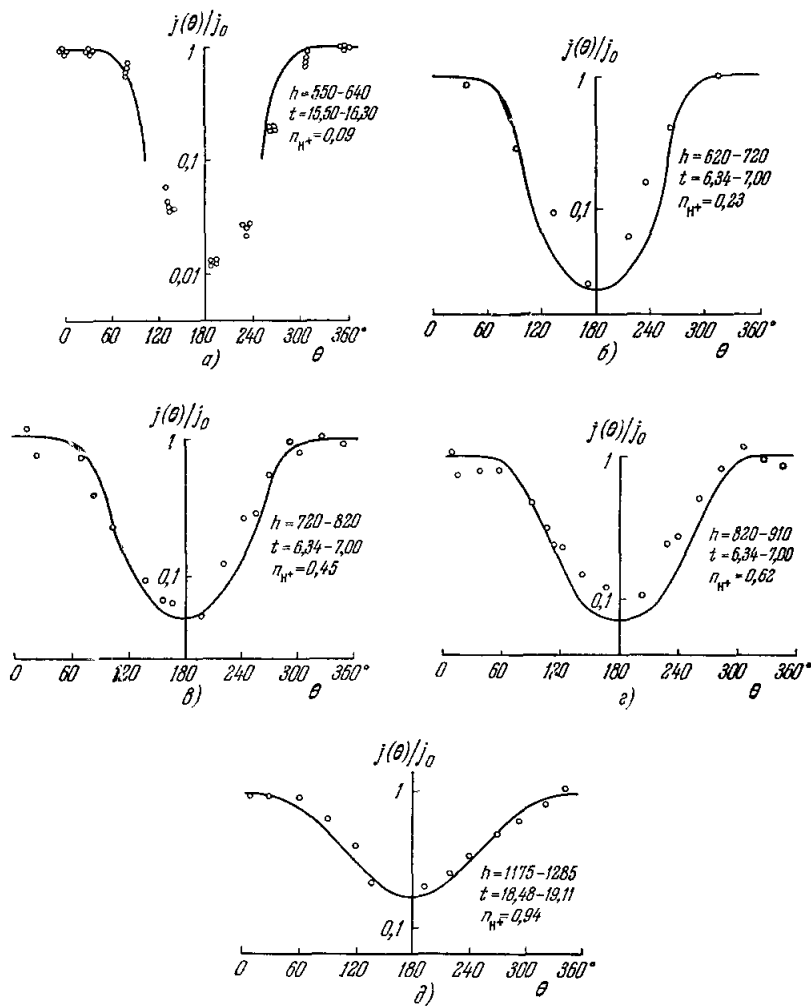


Рис. 24. Концентрация электронов и ионов $n = N/N_0$ в квазинейтральной области у поверхности тела в зависимости от угла θ .

Кружки — результат измерений j/j_0 .

измерялась средняя масса ионов \bar{M} . Принимая для простоты, что ионосферная плазма на рассматриваемых высотах содержит лишь ионы кислорода O^+ и водорода H^+ , можно по значению \bar{M} определить относительную концентрацию этих ионов: $n_{H^+} = (16 - \bar{M})/15$; $n_{O^+} = 1 - n_{H^+}$. Среднее значение n_{H^+} также указано на рисунках.

На высоте $h \leq 600$ км ионы кислорода составляют подавляющее большинство. В этом случае всюду, кроме области очень сильного разрежения, влиянием малой примеси водорода можно пренебречь. Сплошная кривая на рис. 24, а изображает концентрацию ионов кислорода $N(\theta)/N_0$, рассчитанную по формуле (54) ($T_e = 2000^\circ$, $b_{O^+} = 5,3$, $\arcsin(R_0/z) = \pi/2$). Согласие теоретических кривых с опытом вне области максимального разрежения ($\theta < 120^\circ$) удовлетворительное (аналогичные измерения на спутнике «Ариэль-1» приведены на рис. 23, а).

При углах $\theta > 120^\circ$, как уже отмечалось выше, становится заметным размер экранирующего слоя. Здесь начинается область максимального разрежения. При сравнении результатов измерений с теорией в области максимального разрежения необходимо учитывать следующие обстоя-

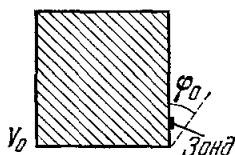


Рис. 25. Расположение зонда позади тела. Штриховая линия — граница квазинейтральной области в окрестности зонда.

тельства. Прежде всего, концентрация ионов в области максимального разрежения значительно меньше концентрации электронов^{37, 2, 38}. Они сравниваются лишь на границе этой области. Следовательно, поток электронов, измеряемый зондом в области $\theta > 120^\circ$, соответствует концентрации плазмы на границе области максимального разрежения, существенно удаленной от поверхности тела. Рассмотрим, например, случай, когда зонд находится строго позади спутника ($\theta = 180^\circ$). Этот случай изображен на рис. 25 (вид сбоку). Граница области максимального разрежения в окрестности зонда показана на рисунке

пунктиром. Ее можно характеризовать углом φ_0 . Приближенный расчет показывает, что для рассматриваемых здесь условий угол $\varphi_0 \sim 35-50^\circ$. В среднем можно принимать его равным 45° .

Далее, в области максимального разрежения сильно возрастает относительная концентрация ионов водорода. Учтем, что при $T_e \sim 1500-3000^\circ$ К, $v_0 = 7,6 \cdot 10^5$ см/сек для кислорода $b_{O^+} \sim 4,5-6$, а для водорода $b_{H^+} \sim 1,1-1,5$. Из результатов гл. IV следует тогда, что если в невозмущенной ионосферной плазме $n_{H^+} > (0,01-0,05)$, в области максимального разрежения ионы водорода составляют большинство. Поэтому во всех рассматриваемых в этом разделе случаях структура области максимального разрежения определяется ионами водорода. Это подтверждается данными Самира и Ренна. Действительно, температура электронов на высотах 600—900 км меняется в среднем от 2000 до 3000° К. Соответственно число Маха для ионов водорода $b_{H^+} = 1,3-1,1$. Мы видим, что параметр b_{H^+} меняется незначительно. Гораздо сильнее изменяется относительная концентрация ионов водорода n_{H^+} : от 3—5% до 60%. Следовательно, в указанной области высот измеряемое на опыте отношение $j(\theta = 180^\circ)/j_0$ должно расти пропорционально концентрации ионов водорода n_{H^+} . Это соотношение, как видно из рис. 26, действительно выполняется.

Важно, что значение числа Маха для ионов водорода невелико: $b_{H^+} \sim 1-1,5$. В этом случае из результатов, полученных в гл. III и X, следует, что влияние электрического поля на движение ионов в квазинейтральной плазме мало существенно и его можно в первом приближе-

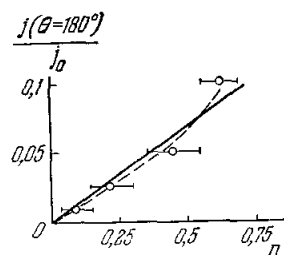


Рис. 26. Зависимость концентрации электронов и ионов $n = N/N_0$ на границе квазинейтральной области от концентрации ионов водорода $n = N_{H^+}/N_0$ (кривые).

Кружки — результат измерений $j(\theta = 180^\circ)/j_0$.

нии не учитывать. Кроме того, при не слишком малых значениях $n_{H^+} \gtrsim 20\%$ электрическое поле оказывает незначительное влияние и на тяжелые ионы кислорода (см. гл. IV, формула (46)). Поэтому для расчета концентрации плазмы при $n_{H^+} \gtrsim 20\%$ можно использовать формулы нейтрального приближения². Учитывая, что в этом приближении различные ионные компоненты плазмы независимы, получаем, что на границе области максимального разрежения концентрация плазмы равна

$$\frac{N(\theta)}{N_0} = n_{O^+} \frac{1 + \Phi(b_{O^+} \cos \varphi_0 \cos \theta)}{1 + \Phi(b_{O^+} \cos \varphi_0)} + n_{H^+} \frac{1 + \Phi(b_{H^+} \cos \varphi_0 \cos \theta)}{1 + \Phi(b_{H^+} \cos \varphi_0)}; \quad (98)$$

здесь $\Phi(z)$ — интеграл вероятностей, φ_0 — угол, характеризующий положение границы области максимального разрежения (см. рис. 25). Формула (98) описывает в нейтральном приближении распределение ионов на поверхности тела вращения с углом φ_0 между осью и образующей. Строго говоря, следовало бы учесть, что угол φ_0 уменьшается с уменьшением θ . Поэтому, например, на лобовой поверхности тела $\varphi_0 \sim 0$. Однако это изменение φ_0 приводит лишь к незначительному изменению концентрации $N(\theta)$, лежащему в пределах точности формулы (98). Поэтому можно считать угол φ_0 константой, определенной для $\theta = 180^\circ$. В нашем случае, как указывалось выше, среднее значение $\varphi_0 \sim 45^\circ$ *).

Результат расчета отношения $N(\theta)/N_0$ для $\varphi_0 = 45^\circ$ представлен сплошными кривыми на рис. 24, б — д, где принималось, что $T_e = 2000^\circ \text{ K}$ $v_0 = 7,6 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$; для рис. 24, д: $T_e = 3000^\circ \text{ K}$ $v_0 = 7,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$. Видно достаточно хорошее согласие с экспериментом. Прямая на рис. 26 построена по формуле (98) для $\theta = 180^\circ$ ($T_e = 2500^\circ \text{ K}$ $v_0 = 7,6 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$). Штриховая кривая учитывает изменение температуры электронов и скорости v_0 (предполагалось, что T_e линейно растет от 2000° K на высоте 600 км до 3000° K на высоте 1000 км).

Физический институт им. П. Н. Лебедева

АН СССР

Институт физических проблем

АН СССР

Московский физико-технический институт

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, УФН 79 (2), 233 (1963).
2. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, М., «Наука», 1964.
3. W. E. Gordon, F. Region and Magnetosphere, Report on XV Assembly of URSI, Munich, 1966.
4. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, 817 (1964).
5. М. Каминский, Атомные и ионные столкновения на поверхности металла, М., «Мир», 1967.
6. Ю. М. Панченко, Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, 256 (1964).
7. В. В. Васильков, ЖЭТФ 50, 1124 (1966).
8. Г. Г. Черный, Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью, М., Физматгиз, 1959.

*) Разумеется, проведенное в рассмотрении справедливо лишь для не слишком сильно заряженного тела. Точнее, необходимо выполнение условия $|\varphi_0| \ll (T_e/e) (R_0/D)^{4/3}$ (где φ_0 — потенциал поверхности тела, R_0 — его характерный размер, $D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 N_0}$ — дебаевский радиус в невозмущенной плазме). На высотах $h \sim 2000\text{--}3000 \text{ км}$ это условие уже не выполняется.

9. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 49, 647 (1965).
10. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 56, 1777 (1969).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
12. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 54, 891 (1966).
13. Н. И. Будько, Геомагнетизм и аэрономия 6, 1008 (1966).
14. А. В. Гуревич, В. В. Смирнова, Геомагнетизм и аэрономия 9 (6) (1969).
15. В. В. Смирнова, Геомагнетизм и аэрономия 9 (6) (1969).
16. A. V. Gurevich, L. P. Pitae vsky, Phys. Rev. Lett. 15, 346 (1965).
17. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
18. В. Н. Фаддеева, Н. М. Терентьев, Таблицы интеграла вероятностей, М., Гостехиздат, 1954.
19. В. Г. Курт, В. И. Мороз, Искусственные спутники Земли 7, 78 (1961).
20. D. B. Beard, F. S. Johnson, J. Geophys. Res. 66, 4113 (1961).
21. E. C. Whipple, Jr., Preprint X-615, 65-296, Goddard Space Flight Center, 1965.
22. В. В. Смирнова, Геомагнетизм и аэрономия 6, 276 (1966).
23. Л. Джаффе, Дж. Риттенхауз, в сб. «Ракетная техника», № 3, 7 (1962).
24. F. J. F. Osborne, M. P. Bachynski, M. A. Kasha, Preprint 6-2-6, URSI Spring Meeting, Washington, 1965.
25. M. A. Kasha, F. J. F. Osborne, T. W. Johnston, I. P. Shkarofsky, Proc. 2nd Symposium on Interaction of Space Vehicales with Ionized Atmosphere, Miami, 1965.
26. А. В. Гуревич, Космические исследования 2, 68 (1964).
27. М. В. Масленников, Ю. С. Сигов, ДАН СССР 9, 1063 (1965).
28. J. C. Taylor, Planet. and Space Sci. 15, 155, 463 (1967).
29. E. C. Walker, в сб. «Interaction of Space Vehicles with an Ionised Atmosphere (S. F. Singer, Ed.), Pergamon Press, N. Y., 1965.
30. J. Langmir, K. Blodgett, Phys. Rev. 22, 347 (1923); 24, 49 (1924).
31. А. М. Москаленко, Геомагнетизм и аэрономия 4, 260 (1964); 11, 383 (1965).
32. В. С. Князюк, А. М. Москаленко, Геомагнетизм и аэрономия, 6, 997 (1966).
33. K. Norman, A. P. Willmore, Planet. and Space Sci. 13, 1 (1965).
34. P. I. Bowen, R. L. F. Boyd, C. L. Henderson, A. P. Willmore, Proc. Roy. Soc. A281, 514 (1964).
35. U. Samir, A. P. Willmore, Planet. and Space Sci. 13, 285 (1965).
36. C. L. Henderson, U. Samir, Planet. and Space Sci. 15, 1499 (1967).
37. А. В. Гуревич, Искусственные спутники Земли 10 (7), 101 (1961).
38. V. Liu, H. Jew, Rarefied Gas Dynamics (C. L. Brundin, Ed.), N. Y. 1967, стр. 1703.
39. U. Samir, G. L. Wrenn, The Dependence of Charge and Potential Distribution around Spacecraft on Ionic Composition. Preprint, 1969.
40. В. Н. Боровенко, Космические исследования 5, 58 (1967).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Обзоры

41. R. E. Bourdeau, Space Sci. Rev. 1, 716 (1962/63).
42. Я. Л. Альперт, Space Sci. Rev. 4, 373 (1965).
- 42a. G. Fournier, Interactions diun satellite avec l'ionosphere et applications aux problemes de trainees et de nesures par sondes. Preprint O.N.E.R.A., Note Techn. Nr. 142 (1969).

Теоретические работы

43. S. H. Lam, M. Greenblatt, AIAA Journ. 3, 1850 (1965).
44. V. C. Liu, Nature 208, 883 (1965); 215, 127 (1967).
45. V. S. Pap, R. Vaglio-Laurin, AIAA Journ. 5, 1801 (1967).
46. В. В. Васюков, Геомагнетизм и аэрономия 6, 1104 (1966).
47. В. И. Карпман, ЖЭТФ 52, 1657 (1967).
48. D. J. Prager, M. L. Rasmussen, Preprint SUDAAR No. 299, 1967.
49. S. D. Drell, H. M. Foley, M. A. Ruderman, J. Geophys. Res. 70, 3131 (1965).
50. L. W. Parker, B. L. Murphy, J. Geophys. Res. 72, 1631 (1967).

Рассеяние радиоволн на следе тела

51. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Геомагнетизм и аэрономия 6, 842 (1966).
52. Ю. Р. Калинин, Геомагнетизм и аэрономия 5, 289 (1965).
53. S. Rand, F. Albini, AIAA Journ. 5, 1174 (1967).
54. Booker, J. Geophys. Res. 66, 1073 (1961).
55. В. В. Васильков, Геомагнетизм и аэрономия 8, 778 (1968).

Измерения в ионосфере

56. И. М. Имянитов, Г. Л. Гдалевич, Я. М. Шварц, Искусственные спутники Земли 17, 67 (1963).
57. R. E. Bourdeau, J. Donlly, Proc. Roy. Soc. A281, 487 (1964).
58. F. L. Scarf, G. M. Crook, R. W. Fredirics, J. Geophys. Res., 70, 3045 (1965); Radio Sci. 1, 939 (1965).
59. R. L. F. Boyd, Space Sci. Rev. 7, 230 (1967).
60. U. Fahlson, Space Sci. Rev. 7, 238 (1967).
61. В. В. Афонин, Т. К. Бреус, Г. Л. Гдалевич, Б. Н. Горожанкин, К. И. Грингауз, Р. Е. Рыбчинский, Н. М. Шютте, в сб. «Исследования космического пространства», М., «Наука», 1965, стр. 151.
62. К. И. Грингауз, Б. Н. Горожанкин, Н. М. Шютте, Г. Л. Гдалевич, ДАН СССР 151, 560 (1963).
63. N. Kawashima, K. Hiraо, Preprint JAERT No. 2551 (Japan), Ibaraki, 1966.
64. V. Fiala, L. R. O. Storey, Preprint GRI, NTR/32 (France), Saunt Mour des Foses, 1968.
65. G. W. Sharp, W. B. Hanson, D. D. McKibben, Techn. Rept. 6-90-63-53, 1963.

Лабораторные экспериментальные исследования

66. W. A. Clayden, Rarefied Gas Dynamics, Academic Press, 1964, стр. 435.
67. W. A. Clayden, C. V. Hurdle, Rarefied Gas Dynamics (G. L. Brundin Ed.), Academic Press, 1966, стр. 1717.
68. E. D. Knechtell, W. G. Pitts, AIAA Journ. 2, 1148 (1964).
69. F. J. F. Osborne, URSI Spring Meeting, Washington, Preprint 3-8-6, 1965.
70. P. F. Hall, R. F. Kemp, J. M. Sellen, AIAA Journ. 2, 1032 (1964).
71. P. J. Barret, Phys. Rev. Lett. 13, 742 (1964).
72. N. Kawashima, S. Mori, Phys. Fluids 9, 700 (1966).
73. N. Kawashima, S. Mori, AIAA Journ. 6, 110 (1968).
74. N. Kawashima, J. Geophys. Res. 20, 3203 (1965).
75. S. D. Hester, A. A. Sonin, Rarefield Gas Dynamics, Preprint, 1968.
76. В. В. Скворцов, Л. В. Носачев, Космические исследования 6, 228, 855 (1968).