

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Конденсаты Бозе – Эйнштейна в поле лазерного излучения

Л.П. Питаевский

Обсуждаются свойства конденсатов Бозе – Эйнштейна во внешнем потенциале, созданном световым полем лазеров. Рассмотрены конденсаты, помещенные в образованные стоячими световыми волнами периодические решетки, и конденсаты, удерживаемые в "оптических ловушках" вблизи фокуса бегущей волны. Описаны наблюдения перехода Мотта в периодической решетке, эксперименты с конденсатами в двойной потенциальной яме, позволяющие исследовать туннельную динамику фаз конденсатов, и эксперименты с атомами вблизи резонанса Фешбаха.

PACS numbers: 03.75.-b, 05.30.Jp, 32.80.Pj

Содержание

1. Введение (345).
 2. Атом в световом поле (346).
 3. Конденсат Бозе – Эйнштейна в одномерном периодическом потенциале. Основное состояние (346).
 4. Квазимпульс и поток массы (347).
 5. Плотность сверхтекучей части и дипольные колебания (350).
 6. Оптические ловушки (353).
 7. Туннельная динамика конденсата в двойной потенциальной яме (356).
 8. Нарушение когерентности квантовыми флуктуациями и переход Мотта (357).
 9. Резонанс Фешбаха (360).
 10. Заключение (363).
- Список литературы (363).

1. Введение

В предыдущем обзоре автора были изложены основные положения теории конденсации Бозе – Эйнштейна (БЭК) [1]. За время, прошедшее с момента экспериментального обнаружения этого удивительного явления, было поставлено много интересных экспериментов, принципиально важных для понимания квантовых процессов в системах, состоящих из многих частиц. Соответственно, большое развитие получила и теория.

В предлагаемой статье мы остановимся на одном круге явлений, исследованных в последнее время. Речь

идет о поведении конденсатов Бозе – Эйнштейна во внешнем поле, создаваемом световыми пучками от лазерных источников. Читатель должен иметь в виду, что, хотя работы по этому вопросу составляют лишь часть недавних работ по БЭК, их число все же очень велико. Я старался описать работы, имеющие более фундаментальный характер. Личные пристрастия автора, конечно, тоже играют роль.

Прежде всего я напомним некоторые положения теории БЭК. Конденсация Бозе – Эйнштейна означает, что макроскопически большое число атомов "сконденсировано" в одном квантовом состоянии. Рассмотрим оператор $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ уничтожения атомов в представлении вторичного квантования и выделим из него часть $\hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t)$, уничтожающую состояние, в котором происходит конденсация. Ввиду наличия большого числа бозонов в этом состоянии, можно заменить $\hat{\psi}_0(\mathbf{r}, t)$ на классическую функцию $\psi_0(\mathbf{r}, t)$, которую называют волновой функцией конденсата. Эта замена имеет глубокий физический смысл. Она аналогична переходу от квантовой электродинамики к классической теории электромагнитных явлений. Такой переход оправдан, если в одном и том же квантовом состоянии находится большое число фотонов. Тогда некоммутативность операторов электромагнитного поля незначительна и можно описывать поле классическими функциями $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, подчиняющимися уравнениям Максвелла. В нашем случае наличие большого числа атомов в конденсате Бозе – Эйнштейна позволяет ввести классическую функцию $\psi_0(\mathbf{r}, t)$. (В дальнейшем мы будем опускать индекс "0".)

Если газ в состоянии конденсации достаточно разрежен, он описывается приближением среднего поля, соответствующим первому приближению теории Боголюбова однородного неидеального бозе-газа [2]. В этом приближении все частицы находятся при $T = 0$ в конденсате, так что плотность газа равна

$$n(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (1)$$

Л.П. Питаевский. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН,
119334 Москва, ул. Косыгина 2, Российская Федерация
Dipartimento di Fisica, Università di Trento,
CNR-INFN BEC Center, I-38050 Povo, Trento, Italy
E-mail: lev@science.unitn.it

Статья поступила 13 декабря 2005 г.,
после доработки 23 января 2006 г.

Сама же функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению [3, 4]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Нелинейный член в этом уравнении описывает взаимодействие между атомами конденсата, причем постоянная взаимодействия g определяется длиной рассеяния a атомов в s -состоянии:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (3)$$

Энергия взаимодействия данного атома с остальными пропорциональна плотности атомов. Атом как бы движется в среднем поле, создаваемом другими атомами. Поэтому теорию, основанную на уравнении (2), условно называют теорией среднего поля.

Уравнение Гросса–Питаевского (2) для волновой функции конденсата $\psi(\mathbf{r}, t)$ играет роль, аналогичную уравнениям Максвелла в классической электродинамике. Можно сказать, что эта функция представляет собой классический предел волны де Бройля, в котором корпускулярные свойства материи не играют роли. Однако, в отличие от уравнений Максвелла, уравнение (2) содержит постоянную Планка $\hbar$. Причина такого различия кроется в разных соотношениях между энергией ϵ и импульсом p для фотонов и атомов, что приводит к различным соотношениям между частотой $\omega = \epsilon/\hbar$ и волновым вектором $k = p/\hbar$ соответствующих классических волн. Для фотонов уравнение $\epsilon = cp$ дает классическое дисперсионное соотношение $\omega = ck$, которое не содержит квантовой постоянной. Для атомов уравнение $\epsilon = p^2/2m$ дает вместо этого дисперсионное соотношение $\omega = \hbar k^2/2m$, которое содержит в явном виде квантовую постоянную $\hbar$. Это, в частности, означает, что явления интерференции для классических волн материи зависят от значения $\hbar$ (см., например, уравнение (54) ниже).

В стационарном состоянии волновая функция зависит от времени согласно уравнению Джозефсона

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right), \quad (4)$$

где постоянная μ имеет смысл химического потенциала для данного состояния. Уравнение (2) сводится тогда к виду

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu \right] \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5)$$

Математически строгий вывод уравнения (5) для разреженного газа был дан Либом, Сейрингером и Ингвансоном [5].

2. Атом в световом поле

Рассмотрим конденсат, находящийся в поле монохроматической световой волны. Электрическое поле волны можно записать как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.} \quad (6)$$

Средняя по времени сила, действующая на атом газа, равна

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha(\omega) \nabla \frac{\overline{E^2}}{2} = \alpha(\omega) \nabla |E_0|^2, \quad (7)$$

где $\alpha(\omega)$ — поляризуемость атома. Эта формула верна для частоты ω достаточно удаленной от линии поглощения атома ω_0 , так что $\alpha(\omega)$ вещественна. С другой стороны выгодно работать достаточно близко от ω_0 , где поляризуемость и, следовательно, сила велики. Таким образом, частота должна удовлетворять условиям

$$\omega_0 \gg |\omega - \omega_0| \gg \Gamma, \quad (8)$$

где Γ — ширина линии поглощения. Заметим, что конденсат Бозе–Эйнштейна является удобным объектом и в этом отношении, так как линии поглощения атомов в конденсате очень узки.

При условии (8) поляризуемость можно приближенно записать как

$$\alpha(\omega) \approx \frac{A}{\omega_0 - \omega}, \quad (9)$$

причем $A > 0$. Это означает, что при $\omega < \omega_0$ ("красная расстройка") атомы втягиваются в область сильного поля, а при $\omega > \omega_0$ ("синяя расстройка") выталкиваются из нее.

Силе (7) соответствует средняя потенциальная энергия атома в световом поле

$$U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) = -\alpha(\omega) |E_0|^2. \quad (10)$$

Одномерный периодический потенциал можно создать стоячей световой волной. В такой волне $|E_0|^2 \sim \sin^2(qz)$, где q — волновой вектор волны. Потенциальную энергию в этом случае принято записывать в виде

$$U_{\text{opt}}(z) = sE_r \sin^2(qz), \quad (11)$$

где E_r — так называемая "энергия отдачи" (m — масса атома)

$$E_r = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \quad (12)$$

и s — безразмерный параметр, пропорциональный интенсивности лазерного пучка. В большинстве реальных экспериментов $s < 20$. Потенциал (11) периодический с периодом $d = \pi/q$. Заметим, что период обратной решетки равен $2q$. Три взаимно перпендикулярных лазерных пучка создают трехмерную решетку:

$$U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) = sE_r [\sin^2(qx) + \sin^2(qy) + \sin^2(qz)]. \quad (13)$$

3. Конденсат Бозе–Эйнштейна в одномерном периодическом потенциале. Основное состояние

В этом разделе мы будем рассматривать для простоты главным образом одномерное движение конденсата в периодическом потенциале (11). Таким образом, мы примем, что волновая функция конденсата имеет вид $\psi(z) \exp(-i\mu t/\hbar)$. В эксперименте, разумеется, кроме

этого потенциала имеется еще удерживающий потенциал "ловушки". Размер конденсата, однако, как правило, велик по сравнению с периодом решетки d . Удерживающий потенциал мало меняется на этом периоде и во многих задачах им можно в первом приближении пренебречь. Тогда уравнение (5) для $\psi(z)$ сводится к уравнению

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + sE_r \sin^2(qz) + g|\psi(z)|^2 \right] \psi(z) = \mu\psi(z). \quad (14)$$

Как известно, квантово-механическое описание движения частицы в периодическом поле было развито Ф. Блохом много лет назад. В эксперименте, однако, мы до сих пор имели дело, главным образом, с электронами, т.е. фермионами, в периодической решетке кристалла.

Мы увидим, что поведение конденсата Бозе–Эйнштейна в периодическом поле обладает многими нетривиальными особенностями. К тому же искусственные "оптические" решетки выгодно отличаются от "натуральных" во многих отношениях. Их период макроскопически велик, что облегчает наблюдение, и может регулироваться так же, как и интенсивность периодического потенциала. Они практически не имеют дефектов. Наконец, легко создать одномерные и двумерные структуры, трудно осуществимые в твердых телах.

Неудивительно поэтому, что уже первые эксперименты над конденсатами в оптических решетках дали очень интересные результаты. Особо следует выделить обнаружение важного физического явления — перехода Мотта между сверхтекучей фазой бозе-атомов в решетке и диэлектрической фазой, в которой сверхтекучее течение невозможно (см. раздел 8 предлагаемого обзора).

Рассмотрим основное состояние системы. Волновая функция этого состояния — вещественная периодическая функция $\psi_0(z) = \psi_0(z+d)$. Ее можно разложить в ряд Фурье

$$\psi_0(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi^{(l)} \exp(i l 2 \pi q z), \quad \psi^{(l)} = \psi^{(-l)*}. \quad (15)$$

Согласно основным принципам квантовой механики выражение (15) представляет собой разложение основного состояния по состояниям со значениями импульса, равными $p_l = \hbar 2 \pi q l$. Это утверждение хорошо известно в теории электронов в кристаллической решетке, но там его нелегко проверить на опыте. В конденсате его можно проверить в прямом и элегантном эксперименте. Достаточно в некоторый момент времени быстро выключить удерживающий потенциал и периодический потенциал решетки. Тогда атомы с $l = 0$ останутся на месте, а атомы с импульсами p_l будут удаляться от них по закону¹

$$z_l(t) = \frac{\hbar 2 \pi q}{m} t. \quad (16)$$

¹ Этот результат, полученный путем упрощенного рассуждения, в действительности является частным случаем общей теоремы квантовой механики. Если размер системы после расширения много больше начального и взаимодействием атомов в процессе расширения можно пренебречь, то пространственное распределение плотности после расширения воспроизводит начальное импульсное распределение: $n(\mathbf{r}, t) = (m/t)^3 n^{(p)}(\mathbf{p} = m\mathbf{r}/t, 0)$ при $t \rightarrow \infty$, где $n^{(p)}(\mathbf{p}, t)$ — функция распределения в импульсном пространстве, нормированная условием $\int n^{(p)}(\mathbf{p}, t) d^3 p = N$.

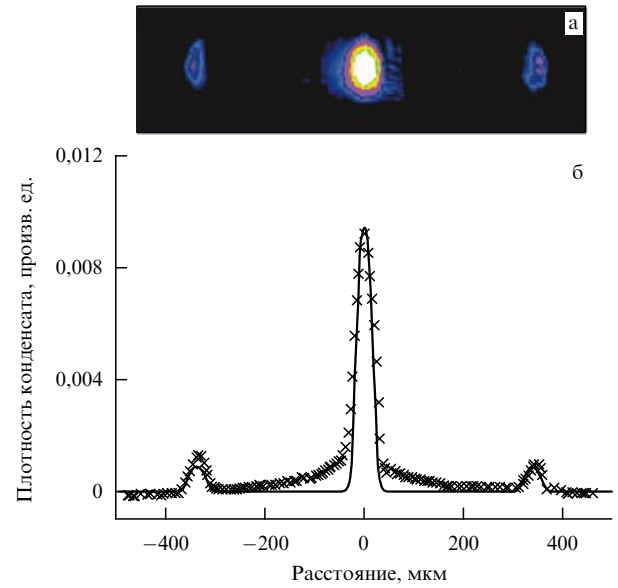


Рис. 1. (а) Теневое изображение конденсата, полученное через 10 с после его освобождения из оптической решетки. (б) Пространственное распределение плотности конденсата. Крестики — экспериментальные данные, соответствующие верхнему рисунку. Сплошная линия — предсказания теории [6]. Параметр $s = 5$.

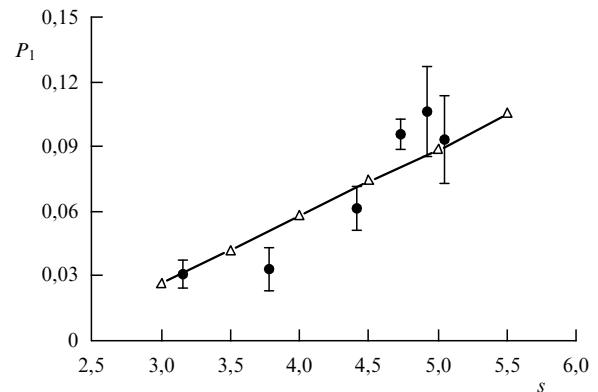


Рис. 2. Отношение населенностей первого дополнительного и центрального максимумов плотности. Заполненные кружки — экспериментальные данные, треугольники — теория [6].

На рисунке 1 показано пространственное распределение плотности конденсата, полученное в экспериментах [6]. Хорошо видна центральная группа атомов с $l = 0$ и "отщепившиеся" конденсаты с $l = \pm 1$. Отношения P_1 числа атомов с $l = 1$ к числу атомов в центральном пике равно согласно (15) $|\psi^{(1)}|^2/|\psi^{(0)}|^2$. Это отношение зависит от амплитуды периодического потенциала s и (ввиду наличия взаимодействия между атомами) от плотности газа. Сравнение измеренных [6] значений P_1 с вычисленными путем решения уравнения (14) показано на рис. 2.

4. Квазиимпульс и поток массы

Система бозонов в состоянии конденсации Бозе–Эйнштейна является сверхтекучей и может двигаться без трения относительно решетки. Решения уравнения (14), описывающие течение конденсата как целого, имеют вид

функций Блоха

$$\psi_{kr}(z) = \exp(ikz) u_{kr}(z). \quad (17)$$

Здесь, как обычно, $\hbar k$ — квазиимпульс, r — номер зоны, т.е. дискретный индекс, нумерующий решения при данном k , $u_{kr}(z)$ — комплексная периодическая функция z с периодом d . Заметим, что само существование решений вида (17) у нелинейного уравнения (14) является весьма нетривиальным и тесно связано с калибровочной инвариантностью этого уравнения. Химический потенциал, соответствующий решению (17), также является функцией k и r : $\mu = \mu_r(k)$. В дальнейшем мы обычно будем опускать индекс зоны r у всех величин. Интегрирование решения (17) дает энергию состояния. Мы будем рассматривать энергию, отнесенную к единице длины решетки:

$$E(k) = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\psi_k}{dz} \right|^2 + sE_r \sin^2(qz) |\psi_k(z)|^2 + \frac{g}{2} |\psi_k(z)|^4 \right] dz, \quad (18)$$

причем $\mu(k) = \partial E(k)/\partial n$, где $n = N/L$ — число атомов на единицу длины, L — длина решетки, N — полное число атомов. Вместо энергии $E(k)$ часто удобнее пользоваться энергией большого канонического ансамбля

$$E_\mu(k) = E(k) - \mu(k)n = E(k) - \mu(k) \int_0^L \frac{|\psi_k(z)|^2}{L} dz, \quad (19)$$

которая при $T = 0$ совпадает с термодинамическим потенциалом Ω , так что $n = -\partial E_\mu(k)/\partial \mu$. Для дальнейшего существенно, что уравнение (14) можно получить как условие минимума функционала E относительно ψ при постоянном n , или функционала E_μ при постоянном μ .

Как известно, значения волнового вектора k , отличающиеся на вектор обратной решетки $2q$, физически эквивалентны. Поэтому достаточно рассматривать только значения k , лежащие в первой зоне Бриллюэна $-q < k < q$. Иногда, однако, удобно позволить k принимать произвольные значения, рассматривая $E(k)$ (и $j(k)$ ниже) как периодические функции с периодом $2q$.

Волновые функции (17) описывают стационарные состояния системы. В этих состояниях конденсат движется, имеется поток массы. Его можно вычислить, используя общее выражение для потока, следующее из уравнения (2). Оно совпадает с обычным квантовомеханическим выражением для плотности потока массы из одночастичного уравнения Шрёдингера, нелинейный член здесь не играет роли. В одномерном случае:

$$j = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dz} - \psi^* \frac{d\psi}{dz} \right). \quad (20)$$

В стационарном состоянии поток j постоянен, не зависит от t и z . Для блоховской волновой функции (17) его можно вычислить, зная энергию $E(k)$ как функцию от k .

Для вывода соответствующей формулы заменим в уравнении (14) и соответственно в функционале энергии (19) оператор d/dz на $[(d/dz) - iA]$, где A — постоянный "вектор-потенциал". Тогда прямым дифференцирова-

нием легко проверить, что

$$-m \left[\frac{\partial E_\mu}{\partial \hbar A} \right]_{A=0, \mu} = \frac{i\hbar}{2L} \int_0^L \left[\psi \frac{d\psi^*}{dz} - \psi^* \frac{d\psi}{dz} \right] dz = j. \quad (21)$$

При этом существенно, что волновую функцию, которая сама зависит от A , дифференцировать не нужно, поскольку вариация функционала по ψ равна нулю в силу уравнения для ψ . Введение постоянной A не меняет периодичности уравнения, поэтому модифицированная волновая функция $\psi(z, A)$ имеет блоховский вид. Постоянную A можно, однако, исключить из уравнения калибровочным преобразованием

$$\psi = \exp(iAz) \psi'. \quad (22)$$

Таким образом, модифицированное уравнение имеет тот же закон дисперсии $E_\mu(k')$, где $\hbar k'$ — квазиимпульс, соответствующий функции ψ' . Равенство (22) означает, однако, что функция $\psi(z, A)$ обладает квазиимпульсом $\hbar k = \hbar(k' + A)$, так что $E_\mu(k, A) = E_\mu(k - A)$. С учетом этого соотношения формула (21) дает искомое выражение для потока:

$$j(k) = m \left(\frac{\partial E_\mu}{\hbar \partial k} \right)_\mu = m \left(\frac{\partial E}{\hbar \partial k} \right)_n. \quad (23)$$

Это уравнение играет важную роль в теории металлов. Его обычный вывод, однако, существенно использует линейность уравнения Шрёдингера. Кроме того, в линейной теории остается неясным, определяется ли поток функциями $E(k)$ или $\mu(k)$, так как в такой теории $E = n\mu$. Я поэтому привел другой вывод, основанный на калибровочной инвариантности уравнения Гросса–Питаевского (2). Этот вывод, разумеется, годится и для обычного уравнения Шрёдингера. Полезно переписать последнее равенство, введя "групповую скорость":

$$v_g(k) \equiv \frac{1}{\rho} j(k) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial E}{\partial \hbar k} \right)_n, \quad (24)$$

где $\rho = mn$ — средняя линейная плотность. Графики функций $E_r(k)$ для первых трех зон и групповой скорости $v_g(k)$ в первой зоне приведены на рис. 3 [7].

Уравнение (23) определяет поток массы в системе координат решетки. Если решетка движется со скоростью v_{lat} , то поток массы в лабораторной системе дается общей формулой преобразования Галилея:

$$j_{\text{lab}} = j(k) + \rho v_{\text{lat}}. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь поведение конденсата в условиях, когда кроме периодического поля, на конденсат действует слабая однородная сила F . В правую часть временного уравнения (2) нужно добавить тогда $-Fz\psi(z, t)$. Несмотря на малость F , этот член существенно меняет решение, так как неограниченно возрастает с увеличением z . Чтобы его скомпенсировать, будем искать решение (2) в виде блоховской функции (17), но с квазиимпульсом $\hbar k$, зависящим от времени. Тогда в левой части уравнения появится пропорциональный z член $-\hbar(dk/dt)z\psi(z, t)$. Пропорциональные z члены компенсируются, если

$$\frac{d\hbar k}{dt} = F. \quad (26)$$

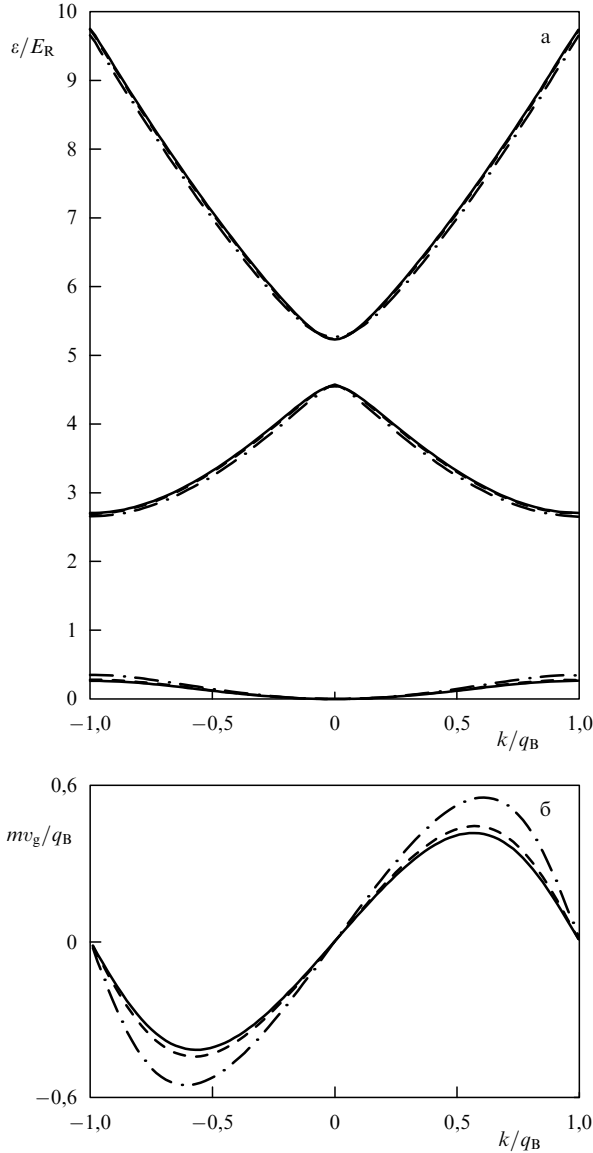


Рис. 3. (а) Зависимость энергии от квазиимпульса для трех первых зон в одномерной решетке Блоха с потенциалом (11), $s = 3$; (б) зависимость групповой скорости от квазиимпульса [7].

Заметим, что дифференцировать по времени периодическую часть функции Блоха (17) не нужно. Соответствующие члены не содержат z и пренебрежимы при малой F . Уравнение (26) снова имеет тот же вид, что и в обычной одночастичной теории.

Если сила F постоянна, уравнение (26) имеет простое решение

$$\hbar k = Ft. \quad (27)$$

Поскольку, однако, значения k , отличающиеся на целое кратное $2q$, физически эквивалентны, все наблюдаемые величины будут периодическими функциями времени с периодом

$$T_B = \frac{2q}{\hbar F}. \quad (28)$$

Поскольку величина q известна с большой точностью, наблюдение этих *блоховских колебаний* позволяет изме-

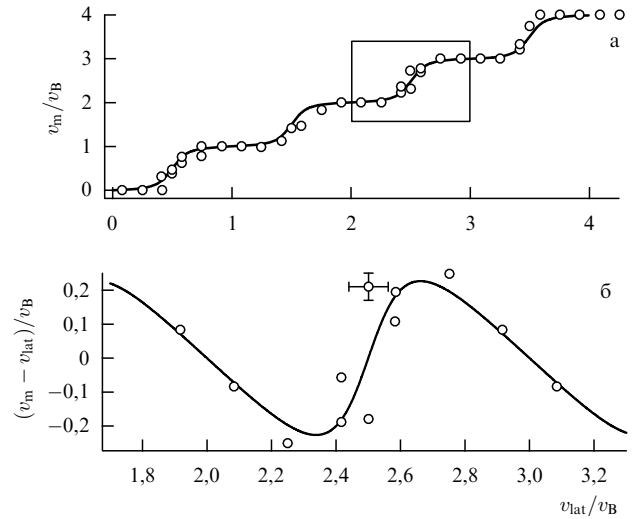


Рис. 4. Измеренные зависимости от скорости решетки v_{lat} : (а) средней скорости конденсата v_m и (б) средней скорости в системе координат решетки $v_m - v_{lat} = -v_g$. В единицах $v_B = 2\pi\hbar/md$ [10].

рять с большой точностью силу F [8, 9]. В экспериментах [8] наблюдалось периодическое изменение импульсного распределения атомов в решетке. Для такого типа измерений, однако, больше подходят поляризованные фермионы. Дело в том, что взаимодействие между атомами приводит к затуханию колебаний, а поляризованные холодные фермионы практически не взаимодействуют между собой.

Используя полученные уравнения, можно произвести прямое экспериментальное определение функции $v_g(k)$ [10]. В эксперименте решетка приводилась в движение. Для этого создавалась небольшая разность частот $\delta\omega$ между лазерными пучками, образующими стоячую волну. Решетка движется тогда с зависящей от времени скоростью $v_{lat}(t) = \delta\omega(t)/q$. В системе координат решетки на конденсат действует сила инерции $F = -m dv_{lat}/dt$. Согласно уравнению (26) конденсат к моменту времени t приобретает квазиимпульс

$$\hbar k = -mv_{lat}(t). \quad (29)$$

В этот момент поля решетки и ловушки выключаются и измеряется средняя скорость движения конденсата, равная согласно (25)

$$v_m \equiv \frac{j_{lab}}{\rho} = v_{lat} - v_g \left(\frac{mv_{lat}}{\hbar} \right). \quad (30)$$

Повторяя эксперимент для разных значений конечной скорости решетки v_{lat} , можно восстановить функцию $v_g(k)$. Результаты этих измерений приведены на рис. 4.

При малых значениях квазиимпульса функцию $E(k)$ можно разложить как

$$E(k) = E_0 + n \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \quad (31)$$

Величина m^* имеет смысл эффективной массы атомов конденсата в решетке. Соответственно

$$v_g(k) = \frac{\hbar}{m^*} k. \quad (32)$$

Нетрудно показать, используя квантово-механическую теорию возмущений, что $m^* > m$ в первой блоховской зоне. В разделе 5 мы увидим, что эффективная масса определяет плотность сверхтекучей части газа. Аналогичное разложение химического потенциала имеет вид:

$$\mu(k) = \mu_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}, \quad (33)$$

причем

$$\mu_0 = \frac{\partial E_0}{\partial n}, \quad \frac{1}{m_1} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{n}{m^*}. \quad (34)$$

5. Плотность сверхтекучей части и дипольные колебания

Согласно основным положениям теории сверхтекучести Ландау [11] однородная сверхтекучая жидкость является при $T = 0$ полностью сверхтекучей, $\rho_s = \rho$. Это не так для жидкости в неоднородных внешних условиях, например, при наличии примесей или, как в нашем случае, периодического поля решетки. Теперь $\rho_s < \rho$ и при $T = 0$. Ситуация, однако, отличается от той, которая имеет место при конечной температуре. Нормальная часть жидкости, плотность которой равна $\rho_n = \rho - \rho_s$, покоится относительно решетки и вводить скорость нормальной части не имеет смысла.

В теории Ландау сверхтекучая часть — это "то, что не может вращаться". Это приводит к следующему определению сверхтекучей плотности. Представим себе, что решетка "свернута" в кольцо большого радиуса R . Пусть кольцо медленно вращается с угловой скоростью Ω . Тогда угловой момент несверхтекучей жидкости был бы равен $M = \rho 2\pi R^2 \Omega$. Если жидкость сверхтекучая, то вращается только нормальная часть и угловой момент равен

$$M = \rho_n 2\pi R^2 \Omega = (\rho - \rho_s) 2\pi R^2 \Omega. \quad (35)$$

Именно таким образом была измерена сверхтекучая плотность в первых экспериментах Андроникашвили. В работе [12] этим способом была измерена ρ_s в пространственно-неоднородных системах — пленках сверхтекучего ^4He на подложке Вайкора. Для конденсата в оптической решетке такой эксперимент следует пока рассматривать как мысленный.

Для вывода нам нужна формула преобразования Галилея волновой функции. Пусть

$$\psi(z, t) = \psi_k(z) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right)$$

— волновая функция в системе координат решетки. Тогда волновая функция в лабораторной системе, в которой решетка движется со скоростью v_{lat} , равна

$$\psi_{\text{lab}}(z, t) = \exp\left(\frac{imv_{\text{lat}}z}{\hbar}\right) \psi(z - v_{\text{lat}}t, t) \exp\left(-\frac{imv_{\text{lat}}^2 t}{2\hbar}\right). \quad (36)$$

(См. [13], задача к § 17. Нетрудно проверить и непосредственно, что функция (36) удовлетворяет уравнению (2), если $\psi_k(z)$ является решением (14).)

Используя выражение (17) для ψ_k , находим

$$\psi_{\text{lab}}(z, t) = \exp\left[i\left(k + \frac{mv_{\text{lat}}}{\hbar}\right)z\right] u_k(z - v_{\text{lat}}t) \times \exp\left\{-\frac{i[\mu(k) + \hbar k v_{\text{lat}} + mv_{\text{lat}}^2/2]t}{\hbar}\right\}. \quad (37)$$

Пусть теперь решетка свернута в кольцо. Если радиус кольца R достаточно велик, мы можем использовать это уравнение, понимая z как координату вдоль кольца и заменив $v_{\text{lat}} = \Omega R$. Однозначность волновой функции требует теперь ее периодичности по z :

$$\psi_{\text{lab}}(z, t) = \psi_{\text{lab}}(z + 2\pi R, t). \quad (38)$$

Согласно уравнению (36) это означает, что

$$\left(k + \frac{mv_{\text{lat}}}{\hbar}\right) 2\pi R = 2\pi l, \quad l = 0, \pm 1, \dots \quad (39)$$

В отсутствии вращения $l = 0$. Следовательно, это условие должно выполняться и при медленном вращении. Это снова дает $\hbar k = -mv_{\text{lat}}$. Вычисляя поток массы согласно (25), находим при малой скорости вращения

$$j_{\text{lab}} = mnv_{\text{lat}} + \frac{m}{\hbar} \left[\frac{\partial E(k)}{\partial k} \right]_{k=-mv_{\text{lat}}/\hbar} \approx mnv_{\text{lat}} \left(1 - \frac{m}{m^*}\right), \quad (40)$$

так что угловой момент равен

$$M = j_{\text{lab}} 2\pi R = mn\Omega 2\pi R^2 \left(1 - \frac{m}{m^*}\right). \quad (41)$$

Сравнивая с (35), находим сверхтекучую плотность:

$$\rho_s = mn \frac{m}{m^*} = \rho \frac{m}{m^*}. \quad (42)$$

Вернемся в систему координат решетки. Знание ρ_s позволяет определить сверхтекучую скорость согласно $j = \rho_s v_s$. Таким образом,

$$v_s = \frac{\hbar}{m} k. \quad (43)$$

Выражение (42) для сверхтекучей плотности было получено другим способом в статьях [14] и [15], посвященных свойствам пленок сверхтекучего ^4He . Недавно, однако, появились работы, посвященные бозе-газу в одномерной решетке при наличии неупорядоченности, авторы которых придерживаются мнения, что в отсутствии взаимодействия $\rho_s = \rho$. Это очевидно противоречит выражению (42), поскольку $m^* \neq m$ и в отсутствии взаимодействия. Так, в работе [16] говорится, что $\rho_s/\rho = 1$ в отсутствии взаимодействия и неупорядоченности. Аналогично авторы [17] утверждают, что доля сверхтекучей части равна 1 для невзаимодействующей системы. Такое разногласие побудило меня привести более строгий, как мне кажется, вывод выражения для плотности сверхтекучей части. Мой результат, как уже упомянуто, совпадает с [14, 15]. Что касается разногласий с [16, 17], то они, по-видимому, являются просто результатом недоразумения. Авторы этих работ, как мне кажется, отождествили эффективную массу гамильтониана в модели Бозе–Хаббарда с физической массой свободной частицы.

Первое экспериментальное подтверждение формулы (42) для плотности сверхтекучей части было получено в экспериментах [18]. Авторы наблюдали колебания конденсата, находящегося в периодическом оптическом потенциале и гармоническом поле магнитной ловушки. Для описания этого явления нужно несколько развить изложенную теорию.

Волновой вектор k в решении (17) постоянен. Можно, однако, рассматривать приближенные решения вида

$$\psi(z, t) = \exp[i\phi(z, t)] u_{k=d\phi/dz}(z), \quad (44)$$

где фаза $\phi(z, t)$ медленно меняется на расстояниях порядка периода решетке d . Сверхтекучая скорость тогда будет зависеть от координат и времени и формула (43) примет вид

$$v_s = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial z} \phi. \quad (45)$$

Уравнения для плотности ρ и сверхтекучей скорости можно получить аналогично уравнениям Ландау [11] гидродинамики сверхтекучей жидкости, если учесть, что в нашем случае энтропия и скорость нормальной части равны нулю.

Уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s v_s)}{\partial z} = 0. \quad (46)$$

Уравнение движения мы запишем, предполагая, что кроме периодического имеется еще медленно меняющийся потенциал $U_{\text{ext}}(z)$. Тогда

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{m}{m^*} \frac{v_s^2}{2} + \mu_0(n) + U_{\text{ext}}(z) \right] = 0, \quad (47)$$

где мы пренебрегли членами более высокого порядка, чем v_s^2 .

Рассмотрим с помощью этих уравнений исследованные в [18] колебания конденсата в периодической решетке при наличии гармонического потенциала $U_{\text{ext}}(z) = m\omega_z^2 z^2/2$. Мы предположим, что эффективная масса m^* не зависит от плотности газа и, следовательно, от координат и времени. (В условиях эксперимента эта зависимость действительно несущественна.) Тогда, как легко проверить, линеаризованная система уравнений (46), (47) имеет решение вида $\rho(z, t) = \rho_0[z - z_0(t)]$, описывающее колебания конденсата как целого со скоростью dz_0/dt . Здесь $\rho_0(z)$ — равновесная плотность конденсата, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mu_0[\rho_0(z)] + U_{\text{ext}}(z)) = 0.$$

Уравнения дают тогда

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{m}{m^*} v_s, \quad \frac{dv_s}{dt} = -m\omega_z^2 z_0. \quad (48)$$

Первое из этих уравнений показывает, что конденсат движется с групповой скоростью $(m/m^*)v_s = v_g$, а не со сверхтекучей скоростью v_s . Частота этих "дипольных" колебаний равна согласно (48) [18]

$$\omega_d = \sqrt{\frac{m}{m^*}} \omega_z. \quad (49)$$

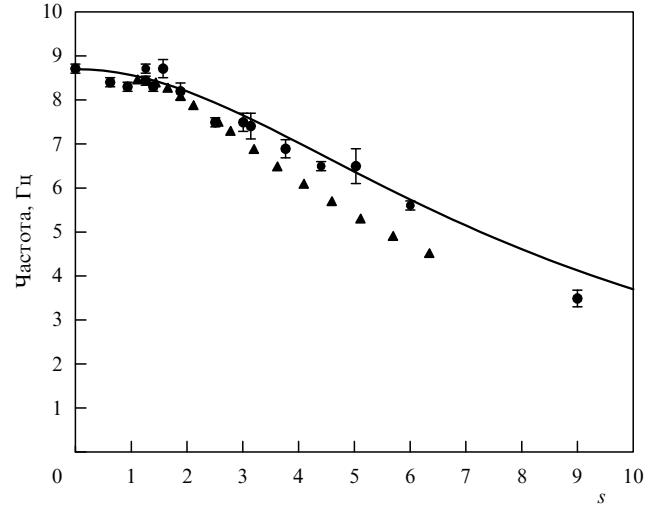


Рис. 5. Зависимость частоты дипольных колебаний от амплитуды s периодического потенциала решетки. Заполненные кружки и треугольники показывают соответственно экспериментальные данные и результаты вычислений [18]. Сплошная линия — более точная теория [19].

В эксперименте в некоторый момент времени решетка быстро смещалась от своего начального положения. Этим возбуждались колебания конденсата. После некоторого "времени задержки" решетка и удерживающий потенциал выключались, газ расширялся и регистрировалось распределение плотности. Потом эксперимент повторялся с выключением решетки с другой задержкой относительно начала колебаний.

На рисунке 5 показаны результаты измерений [18] зависимости частоты дипольных колебаний от амплитуды периодического потенциала s . Экспериментальные данные сравниваются с теоретической формулой (49). Значения эффективной массы были вычислены в работе [19] путем численного решения уравнения (14). При этом ввиду разреженности газа взаимодействие между атомами и, следовательно, нелинейный член в этом уравнении оказались фактически несущественными.

Заметим, что при максимальном достигнутом значении $s = 9$, отношение m/m^* оказывается примерно равным 6,3. В таких условиях атомы могут двигаться только путем туннелирования через потенциальные барьеры, разделяющие минимумы периодического потенциала. Таким образом в эксперименте наблюдается квантовое туннелирование макроскопического тела. Здесь существенна сверхтекучая природа течения конденсата. Облако тепловых атомов колебаться в этих условиях не может (рис. 6).

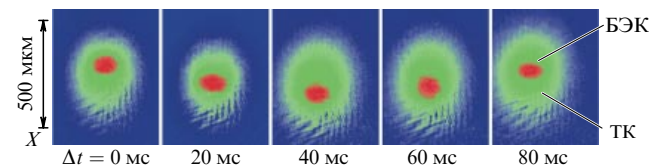


Рис. 6. Распределение плотности газа при дипольных колебаниях в различные моменты времени. Видно, что колеблется только конденсат (БЭК), а менее плотная тепловая компонента (ТК) остается на месте. (Рисунок предоставлен М. Ингушио.)

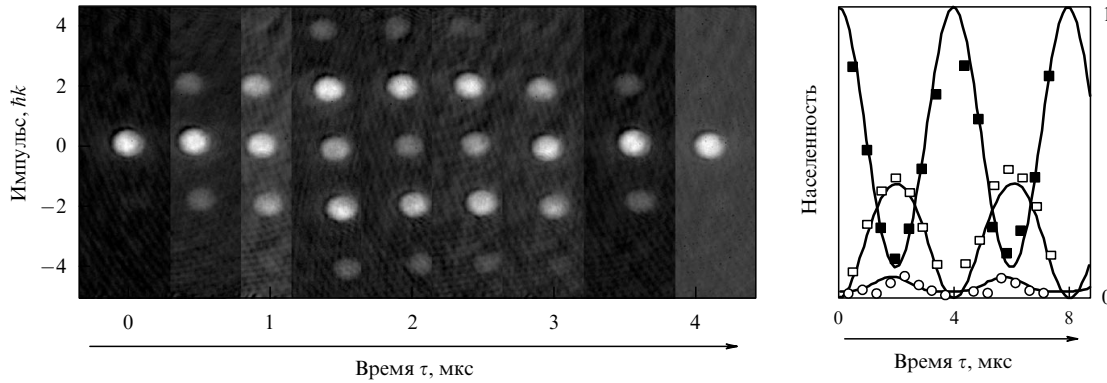


Рис. 7. В левой части рисунка показано распределение плотности конденсата после освобождения из решетки для различных значений времени τ . В эксперименте $s = 14$ и решетка была неподвижна ($k = 0$). В правой части показана зависимость от τ населенностей для значений импульса $p = 0, +2\hbar q$ и $+4\hbar q$, заполненные квадраты, пустые квадраты и кружки соответственно. Сплошные линии показывают результаты вычислений [21].

Волновую функцию (17) можно разложить по состояниям со значениями импульса $p(k, l) = \hbar(k + 2ql)$, $l = 0, \pm 1, \dots$. Аналогично (15) имеем:

$$\psi_{rk}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_{rk}^{(l)} \exp[i(k + l2q)z]. \quad (50)$$

Соответственно, разложение плоской волны по блоховским функциям имеет вид

$$\exp(ikz) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{rk}^{(0)*} \psi_{rk}(z). \quad (51)$$

Коэффициенты $\psi_{rk}^{(l)}$ нетрудно вычислить теоретически. Результаты вычислений были использованы для интерпретации результатов экспериментов [21]. В начале эксперимента периодический потенциал отсутствовал и конденсат двигался как целое с волновым вектором k . В момент времени $t = 0$ быстро ("adiaбатически") включался периодический потенциал. При таком включении волновая функция не успевает измениться и дается выражением (51). В эксперименте газ сильно разрежен и взаимодействие между атомами пренебрежимо мало, так что уравнение (14) сводится к обычному линейному уравнению Шрёдингера. Тогда разложение вида (51) справедливо и в дальнейшем, а временная зависимость сводится к появлению множителей вида $\exp[-i\mu_r(k)t/\hbar]$ в каждом члене:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{rk}^{(0)*} \psi_{rk}(z) \exp\left[-\frac{i\mu_r(k)t}{\hbar}\right], \quad (52)$$

где $\mu_r(k)$ — собственные значения линеаризованного уравнения (14), т.е. одностатичные уровни энергии. В момент времени $t = \tau$ удерживающий и периодический потенциалы выключались и конденсат свободно расширялся. Как и в эксперименте [6] это позволяло измерять коэффициенты разложения волновой функции (52) по состояниям с определенными значениями импульса. Разлагая блоховские функции в правой части (52) согласно (15), находим для коэффициентов разложения

$$\psi_{rk}^{(l)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \psi_{rk}^{(0)*} \psi_{rk}^{(l)} \exp\left[-\frac{i\mu_r(k)\tau}{\hbar}\right]. \quad (53)$$

Разумеется, на опыте измеряются не сами коэффициенты $\psi_{rk}^{(l)}$, а "населенности" $|\psi_{rk}^{(l)}(\tau)|^2$. Результаты измерений представлены на рис. 7.

Совершенно другая ситуация имела место, когда оптический потенциал включался адиабатически медленно. В этом случае конденсат, первоначально находившийся в стационарном состоянии свободной частицы, переходил в стационарное же блоховское состояние. При этом, если начальный импульс конденсата p (в системе отсчета решетки) был по модулю меньше $\hbar q$, конденсат оказывался в первой блоховской зоне с квазиимпульсом $\hbar k = p$. Если же, например, начальный импульс лежал в пределах $\hbar q < p < 2\hbar q$, то такое состояние, как легко понять, адиабатически переходило в состояние во второй блоховской зоне с квазиимпульсом $\hbar k = p - 2\hbar q$, так что адиабатическое включение решетки позволяло переводить конденсат в наперед заданное блоховское состояние².

Нетривиальность квантовой динамики конденсата в решетке хорошо видна в красивом эксперименте, описанном в той же работе [21]. Решетка с конденсатом в основном состоянии адиабатически ускорялась до сравнительно большой скорости v_{lat} , много большей, чем максимальное значение групповой скорости в первой зоне. Тогда в уравнении (25) первый член мал и импульс конденсата равен просто ρv_{lat} и возрастает по мере ускорения. Волновая функция в лабораторной системе дается уравнением (37). Но согласно уравнению (29) во время ускорения $\hbar k + mv_{\text{lat}} = 0$ и волновая функция остается периодической, так что все атомы находятся в состояниях с импульсами, кратными $2\hbar q$. Распределение по импульсам было измерено путем наблюдения свободного разлета конденсата, как это описано выше. Результаты измерений показаны на рис. 8. Из рисунка видно, что непрерывное возрастание полного импульса конденсата происходит за счет увеличения числа атомов с большими значениями "кратности" l .

Следует отметить, что эксперименты, в которых конденсат движется относительно решетки со значитель-

² Напомню, что включение сколь угодно слабого периодического потенциала, не меняя энергию частиц, меняет классификацию состояний. Например, состояния в интервале импульсов $q < |p| < 2q$ следует рассматривать как состояния во второй блоховской зоне с законом дисперсии $(|hk| - 2q)^2/2m$ (см. [20], задача 2 к § 55).

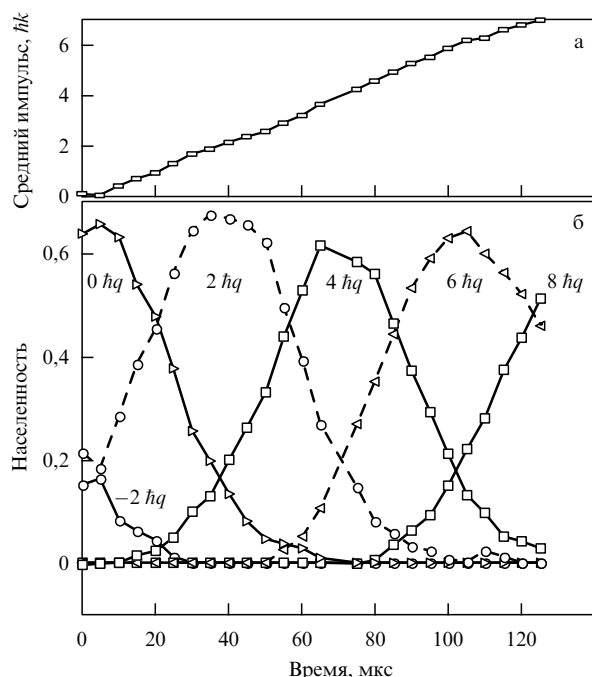


Рис. 8. В верхней части рисунка (а) показана зависимость среднего импульса конденсата в лабораторной системе координат от времени при постоянном ускорении решетки. В нижней части рисунка (б) показана зависимость от времени населенностей для различных значений импульса [21].

ной скоростью, возможны только, если взаимодействие между атомами достаточно слабое, т.е. газ достаточно разрежен. Дело в том, что при таких скоростях конденсат становится неустойчивым [22, 23]. Характерные времена развития этих неустойчивостей оказываются, однако, большими при слабом взаимодействии.

Введенную выше энергию $E_r(k)$, описывающую движение конденсата в решетке как целого, не следует путать с энергиями элементарных возбуждений конденсата. Для однородной периодической решетки эти энергии $\epsilon_r(k)$ также зависят от номера зоны r и квазиимпульса элементарного возбуждения k . В рамках приближения Боголюбова $\epsilon_r(k) = \hbar\omega_r(k)$, где $\omega_r(k)$ — частоты малых колебаний конденсата. Чтобы найти $\omega_r(k)$, следует представить волновую функцию конденсата в решетке в виде $\psi(z, t) = [\psi(z) + \psi'(z, t)] \exp(-i\mu t/\hbar)$, где $\psi(z)$ — волновая функция основного состояния, а $\psi'(z, t)$ — малая добавка, подставить $\psi(z, t)$ во временное уравнение (2) и линеаризовать уравнение относительно ψ' . Собственные частоты системы линейных уравнений для ψ' и ψ'^* определяют $\omega_r(k)$. Я не буду обсуждать этот вопрос подробно (см. [7, 24]).

В заключении этого раздела упомяну некоторые новые направления исследований, связанные с оптическими решетками, на которых я не имею возможности остановиться подробнее.

Две взаимно-перпендикулярные стоячие световые волны создают двумерную оптическую решетку. Если интенсивность поля достаточно велика, получается система практически независимых одномерных (точнее иглообразных) конденсатов [25]. В такой системе удалось впервые проверить некоторые предсказания теории одномерных бозе-газов [26, 27]. Эта теория, которая предсказывает весьма необычные свойства газов, была

построена много лет назад, но до сих пор не имела экспериментальных приложений.

Соответствующим образом подобранная совокупность лазерных пучков позволяет создать "решетку Кагоме" [28]. Атомы в такой решетке, при определенном числе атомов на узле, обладают особыми магнитными свойствами.

В работе [25] исследовались колебания газа, возбуждавшиеся периодической модуляцией глубины решетки. Теория такого возбуждения дана в [29]. Затухание таких колебаний при абсолютном нуле температур представляет собой трудную теоретическую проблему. Она была решена Ю.М. Каганом и Л.А. Максимовым [30].

6. Оптические ловушки

В течение первых нескольких лет эксперименты с БЭК производились над атомами, удерживаемыми вблизи минимума квадрупольного магнитного поля. Разумеется, таким образом можно удерживать лишь атомы, обладающие магнитным моментом, причем в состоянии, в котором магнитный момент направлен против поля. Сравнительно недавно, однако, удалось создать чисто оптические ловушки, где атом удерживается вблизи максимума интенсивности светового пучка [31]. Такой максимум создается путем фокусировки лазерного пучка линзой. Интенсивность света вблизи максимума быстро убывает при удалении от оси и гораздо медленнее вдоль оси. Поэтому конденсат в такой ловушке имеет сильно вытянутую "сигарообразную" форму.

Такой метод удержания конденсата открывает совершенно новые возможности. Оптические ловушки имеют гораздо меньшие размеры, чем магнитные, и их параметры можно легко менять за очень короткое время. Удастся, в частности, создать двойную потенциальную яму, позволяющую количественно исследовать динамику фазы конденсата. Для этого лазерный луч в работе [31] пропусклся через специальное устройство — *акусто-оптический модулятор* (АОМ). Это прозрачный диэлектрик, в котором возбуждаются две стоячие звуковые волны с близкими частотами. Лазерный луч испытывает брэгговское отражение на этих волнах и, благодаря разнице в их длинах волн, расщепляется на два почти параллельных пучка с близко расположенными фокусами, где и находятся конденсаты. При этом взаимное расположение фокусов можно регулировать, меняя разницу частот звуковых волн.

Схема установки показана на рис. 9. Существенно, что она позволяет измерять разность фаз между конденсатами. Для этого следует выключить лазерное поле и наблюдать картину интерференции между перекрывающимися в процессе расширения конденсатами, т.е. измерять пространственное распределение плотности. Если конденсаты раздвинуты достаточно далеко, взаимодействие между атомами практически несущественно и волновая функция равна просто сумме волновых функций конденсатов: $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Для определения фаз волновых функций заметим, что в момент времени t точку с радиусом-вектором $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ достигают атомы конденсата 1 со скоростью $\mathbf{v} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)/t$, где $\mathbf{r}_1$ — центр конденсата (предполагается, что расстояние $|\mathbf{r}|$ много больше начального размера конденсата). Соответственно, волновая функция ψ_1 приобретает дополнительную фазу $\Phi_1 = m \int \mathbf{v} d\mathbf{r}/\hbar = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2/2t\hbar$. Тогда, как

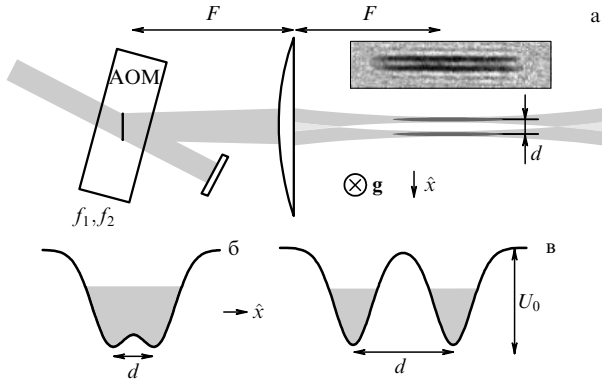


Рис. 9. (а) Схема экспериментальной установки для измерения разности фаз между конденсатами. Акусто-оптический модулятор АОМ помещен в фокальной плоскости линзы, которая собирает расщепленный лазерный пучок в другом фокусе, образуя две расположенные на расстоянии d ловушки. В верхнем правом углу рисунка показано теневое изображение конденсатов в ловушке. Поле зрения равно 70×300 мкм. (б) Потенциальная энергия в зависимости от координаты x для нерасщепленной ловушки при $d = 6$ мкм. (в) Потенциальная энергия в двойной потенциальной яме при $d = 13$ мкм. Параметры ловушек: энергия $U_0 = \hbar \times 5$ кГц в обоих случаях (б) и (в), потенциальный барьер в случае (в) равен $\hbar \times 4,7$ кГц, энергия взаимодействия атомов $\sim \hbar \times 3$ кГц [31].

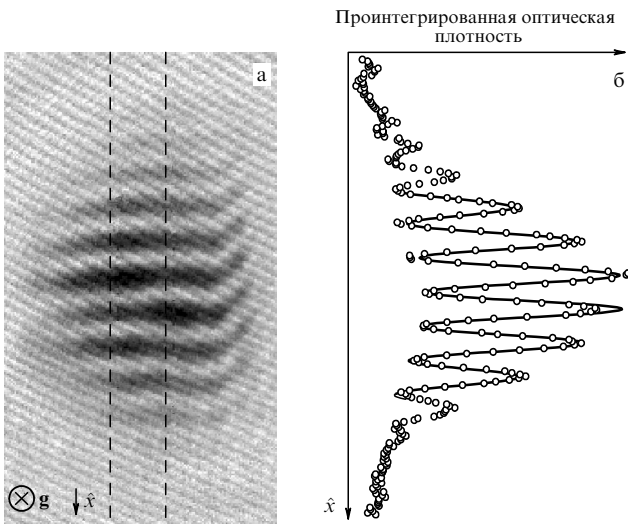


Рис. 10. (а) Теневое изображение интерференционной картины конденсатов после расширения из ловушки, показанной на рис. 9в. Поле зрения равно 600×350 мкм. (б) Распределение плотности, проинтегрированное по сечению конденсата [31].

легко показать, распределение плотности при интерференции конденсатов, раздвинутых на расстояние d вдоль оси x , равно

$$n(\mathbf{r}, t) = \left[n_1 + n_2 + 2\sqrt{n_1 n_2} \cos\left(\frac{md}{\hbar t} x + \Phi\right) \right], \quad (54)$$

где $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ — начальная разность фаз, которую, таким образом, можно определить по положению интерференционных полос. Пример интерференционной картины показан на рис. 10.

Этот метод был использован, чтобы продемонстрировать справедливость уравнения (4), определяющего эволюцию фазы конденсата. Из этого уравнения следует, что, если химические потенциалы двух конденса-

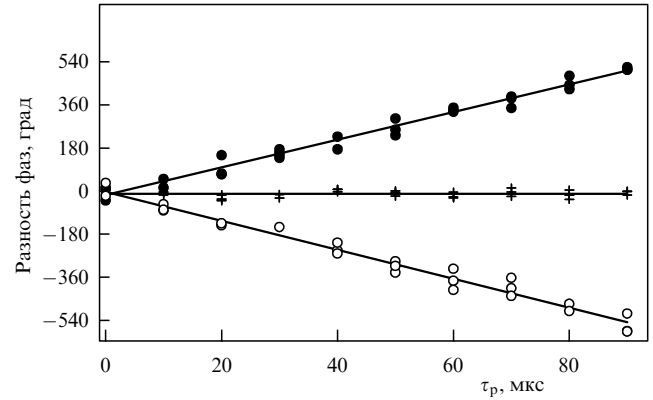


Рис. 11. Зависимость разности фаз конденсатов от продолжительности времени выключения τ_p для случаев, когда выключалась одна или другая ловушка (заполненные и пустые кружки) или обе ловушки одновременно (крестики).

тов различны, они приобретают за время τ разность фаз

$$\Phi = -\frac{i\tau(\mu_1 - \mu_2)}{\hbar}. \quad (55)$$

В эксперименте [31] лазерный луч, создающий одну из потенциальных ям, выключался на короткое время τ_p . Это создавало разность химических потенциалов, равную усредненной по конденсату потенциальной энергии, пропорциональной глубине потенциальной ямы. За время τ_p конденсат не успевал сколько-нибудь заметно расшириться, но конденсаты приобретали разность фаз согласно (55). После этого выключалась и вторая ловушка и измерялась разность фаз по интерференционной картине. Результаты измерений представлены на рис. 11.

Описанный метод измерения разности фаз имеет существенный недостаток. Он "деструктивен". Конденсаты теряются после измерения фазы и, чтобы получить каждую точку на рис. 11, приходилось производить отдельное измерение.

Существует, однако, возможность и непрерывного измерения разности фаз. Такой метод был предложен Стрингари и автором в работе [32] и основан на явлении, названном *интерференцией в импульсном пространстве*. Суть дела состоит в том, что импульсное распределение двух конденсатов, рассматриваемых как единая квантово-механическая система, зависит от их относительной фазы. Например, для двух одинаковых потенциальных ям

$$n(\mathbf{p}) = |\psi_1(\mathbf{p}) + \psi_2(\mathbf{p})|^2 = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{p_z d}{\hbar} + \Phi\right) \right] n_1(\mathbf{p}). \quad (56)$$

Выражение (56) предсказывает характерные осцилляции по переменной p_z , фаза которых зависит от относительной фазы конденсатов.

Важно, что импульсное распределение может быть измерено, причем, в принципе, не деструктивно. Измерение производится путем наблюдения *двухфотонного брэгговского рассеяния света*. Конденсат освещается двумя лазерными пучками с небольшой разностью частот $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ и разностью волновых векторов $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ (обычно используются пучки, распространяющиеся в противоположных направлениях, так что $\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$). Процесс рассеяния можно рассматривать как

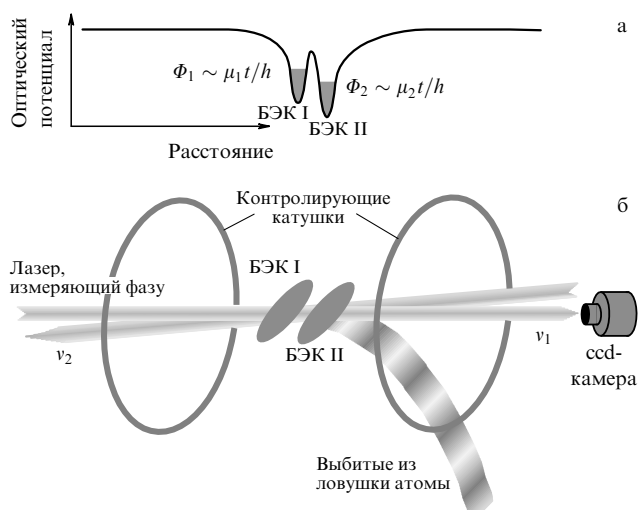


Рис. 12. Непрерывное измерение разности фаз конденсатов. (а) Зависимость потенциальной энергии ловушек от координаты. Параметры ловушек: радиальные частоты колебаний атомов $\simeq 325$ кГц, аксиальные — $\simeq 10$ кГц, глубина ловушек $\simeq \hbar \times 5$ кГц. (б) Схема экспериментальной установки. Два лазерных пучка v_1 и v_2 освещают конденсат и выбивают атомы из ловушек. Вероятность процесса измеряется регистрацией числа "выбитых" из ловушки атомов или регистрацией увеличения числа фотонов в одном из пучков камерой ссс. Контролирующие катушки создают градиент магнитного поля и позволяют менять разность химических потенциалов [34].

поглощение атомом фотона первого пучка и вынужденное испускание фотона второго пучка. При этом атом приобретает энергию $\hbar\Omega$ и импульс $\hbar\mathbf{q}$. Если частота Ω достаточно велика, взаимодействие между атомами не влияет на процесс рассеяния и вероятность рассеяния, т.е. число фотонов, поглощенных из одного пучка, оказывается пропорциональной величине

$$S(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{m}{\hbar q} n_z(Y), \quad (57)$$

где $n_z(p_z) = \int n(\mathbf{p}) dp_x dp_y$, а переменная Y равна

$$Y = \frac{m(\Omega - \hbar q^2/2m)}{q}. \quad (58)$$

Меняя разность частот Ω и измеряя S , можно определить импульсное распределение и, согласно (56), разность фаз конденсатов. Впервые этот метод был применен в работе [33] для измерения импульсного распределения атомов конденсата, связанного с неоднородностью конденсата в магнитной ловушке.

В недавно опубликованной работе [34] двухфотонное брэгговское рассеяние было применено для непрерывного измерения разности фаз конденсатов. Схема установки представлена на рис. 12.

Как и в предыдущем эксперименте [31], конденсаты удерживаются в оптических ловушках вблизи фокусов двух параллельных лазерных пучков. Как объяснено выше, наблюдается рассеяние атомов на двух лазерных пучках v_1 и v_2 с близкими частотами, распространяющихся в противоположных направлениях. Число актов рассеяния измерялось как путем регистрации числа рассеянных и потому "выбитых" из ловушек атомов, так и путем регистрации изменения разницы в числе фотонов в измеряющих световых пучках. Дополнительные контролирующие катушки создавали магнитное поле, которое позволяло менять разность химических потенциалов конденсатов и, согласно уравнению (4), зависимость разности фаз от времени. Согласно уравнениям (56), (57) это приводит к колебаниям интенсивности рассеяния с частотой $\omega_J = (\mu_2 - \mu_1)/\hbar$.

На рисунке 13 показаны результаты измерений зависимости частоты колебаний от разности значений химических потенциалов конденсатов. Заметим, что этот эксперимент открывает возможность измерения действующих на атомы малых сил с использованием БЭК.

В той же работе [34] авторы дали экспериментальную проверку ответа на давно поставленный вопрос: "Могут ли интерферировать изначально независимые конденсаты?" Вопрос не вполне тривиальный. Действительно, пусть два конденсата были созданы независимо, на большом расстоянии друг от друга и не взаимодействовали. Тогда, как легко понять, основное состояние системы соответствует заданным числам атомов в каждом из конденсатов, а значение их разности фаз как квантовомеханической переменной не определено, т.е. состояние системы не является собственной функцией оператора разности фаз. Пусть теперь конденсатам позволено

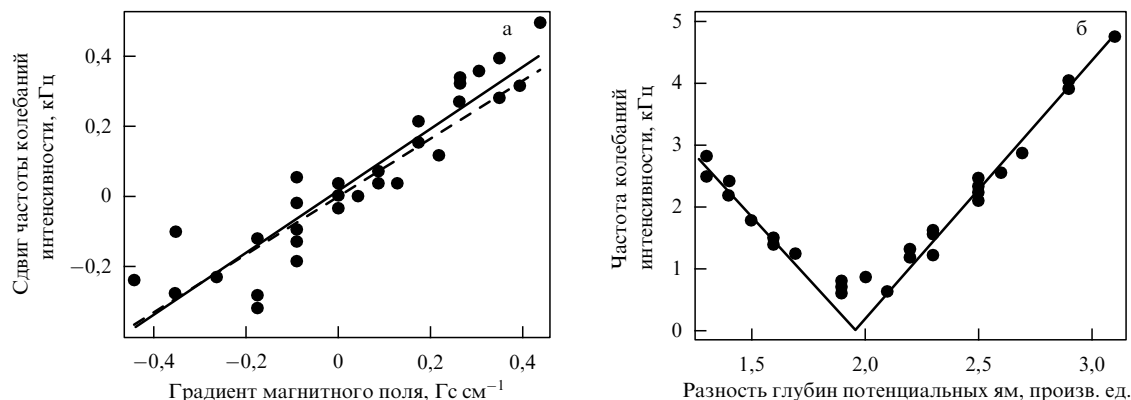


Рис. 13. Непрерывное измерение разности фаз конденсатов. (а) Зависимость частоты колебаний интенсивности рассеяния от градиента магнитного поля. Разность химических потенциалов в отсутствие такого градиента равнялась $\simeq \hbar \times 0,53$ кГц. Сплошная линия дает линейную интерполяцию экспериментальных данных, а штриховая — теоретическую зависимость $\delta\omega = \mu_B B' d/\hbar$, где B' — градиент магнитного поля, d — расстояние между ловушками, μ_B — магнетон Бора. (б) Зависимость частоты колебаний от разности химических потенциалов для случая, когда такая разность образовывалась из-за неравных интенсивностей световых пучков, создающих ловушки [34].

перекрыться. Будет ли видна картина интерференции? Правильный ответ: "Да, будет" [35]. Дело в том, что наблюдение интерференционной картины означает квантово-механическое измерение разности фаз. В результате этого измерения система переходит в состояние с определенной разностью фаз. Тот факт, что эта разность была неопределенной в начальном состоянии, будет проявляться в том, что измерения над одинаковым образом приготовленными системами будут давать каждый раз разные значения фазы³.

Интерференция независимых конденсатов была исследована в работе [34]. В начале эксперимента оптические ловушки были разнесены на большое расстояние (порядка 14 мкм). В таких условиях созданные в ловушках конденсаты были независимы и не обладали определенной разностью фаз. В некоторый момент включались лазерные пучки v_1 и v_2 и производилось измерение относительной фазы, которое давало значение Φ_1 . После измерения разность фаз менялась со временем согласно уравнению (55). При этом разность химических потенциалов определялась разностью глубин оптических ловушек и градиентом магнитного поля, создаваемого контролирующими катушками. Через некоторое время измерение разности фаз производилось снова и давало значение Φ_2 . Измерения повторялись несколько раз над одинаково приготовленными конденсатами. Как и ожидалось, значения разностей фаз Φ_1 и Φ_2 были распределены для разных повторений эксперимента хаотически. Однако измеренные значения $\Phi_1 - \Phi_2$ соответствовали уравнению (55).

В описанных экспериментах туннелирование атомов конденсата между ловушками было несущественно. Динамика конденсатов при наличии такого туннелирования была исследована недавно в экспериментах [37]. Однако, прежде чем описать эти эксперименты, я изложу некоторые теоретические соображения.

7. Туннельная динамика конденсата в двойной потенциальной яме

Рассмотрим два конденсата, разделенные высоким, но не бесконечным, потенциальным барьером. Волновая функция мала, но конечна внутри барьера, и атомы могут туннелировать между конденсатами. Если вероятность туннелирования достаточно мала, конденсаты

внутри каждой ловушки будут находиться в равновесии и система будет описываться заданием всего трех переменных — числами атомов в ловушках N_1 и N_2 и разностью фаз Φ волновых функций конденсатов.

При наличии туннелирования разность фаз между конденсатами означает, что атомы "перетекают" из одного конденсата в другой. Заметим прежде всего, что, несмотря на нелинейность уравнения (2), волновую функцию системы можно записать как $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — решения (2), локализованные соответственно в первой и второй ловушках. Дело в том, что в области барьера, где ψ_1 и ψ_2 перекрываются, волновые функции малы и нелинейность уравнения несущественна. Таким образом, волновую функцию можно записать в виде

$$\psi(x, t) = \sqrt{n_1(x, t)} \exp[i\Phi_1(t)] + \sqrt{n_2(x, t)} \exp[i\Phi_2(t)]. \quad (59)$$

Найдем теперь с помощью уравнения (20) плотность тока в точке $x = 0$ в середине барьера. Простое вычисление дает

$$j = -I_J \sin \Phi, \quad (60)$$

где

$$I_J = \frac{\hbar}{m} [\sqrt{n_1} \partial_x(\sqrt{n_2}) - \sqrt{n_2} \partial_x(\sqrt{n_1})]_{x=0}, \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2.$$

По определению тока, уравнение (60) определяет временную зависимость чисел частиц в конденсатах: $j = \partial N_1 / \partial t = -\partial N_2 / \partial t$.

Уравнение для фазы можно получить путем обобщения уравнения Джозефсона (4). Последнее было записано в предположении, что химические потенциалы не зависят от времени. Если они являются достаточно медленными функциями времени, вместо (4) справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar}(\mu_1 - \mu_2). \quad (61)$$

Мы будем в дальнейшем предполагать для простоты, что числа атомов в конденсатах мало отличаются, $|N_1 - N_2| \ll N_1, N_2$. В этом случае можно считать коэффициент I_J в (60) постоянным и разложить правую часть (61) по $N_1 - N_2$, после чего это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{E_C}{\hbar} k, \quad (62)$$

где $E_C = [2d\mu_1/dN_1]_{N_1=N_2}$ и введена удобная переменная

$$k = \frac{N_1 - N_2}{2}, \quad (63)$$

характеризующая разность населенностей потенциальных ям. Аналогично, уравнение (60) можно переписать как

$$\frac{\partial k}{\partial t} = I_J \sin \Phi. \quad (64)$$

Уравнения (62) и (64) образуют систему уравнений туннельной или джозефсоновской динамики конденсата в двойной потенциальной яме. Если Φ и k достаточно малы, уравнение (64) можно линеаризовать, положив $\sin \Phi \approx \Phi$. Тогда система описывает гармонические коле-

³ Я изложил здесь точку зрения на эту интересную проблему, которой, как мне кажется, придерживается большинство специалистов. По моему мнению, однако, классический характер волновой функции конденсата ψ позволяет прийти к тому же правильному заключению без привлечения квантовой теории измерений. С этой точки зрения можно считать, что волновая функция ψ , будучи классической величиной, обладает определенной фазой и до измерения и измерение только выявляет существовавшее значение разности фаз. Поэтому говорить о том, что измеренное значение относительной фазы создается в процессе измерения, имеет не многим больше смысла, чем говорить, что положение припаркованного автомобиля создается выглянувшим из окошка наблюдателем. Дело тут не только в словах. Утверждение, что волновая функция обладала фазой до измерения не приводит, ввиду ее классического характера, в этом случае к каким-либо противоречиям. Напротив, хорошо известно, что предположение, что такая "истинно квантовая" величина, как проекция спина частицы со спином $1/2$, имела измеренное значение и до измерения, приводит к противоречию. Из такого предположения следуют *неравенства Белла*, противоречащие квантовой механике и опыту (см. [36], Ch. 6).

бания с частотой

$$\omega_J = \frac{\sqrt{E_C E_J}}{\hbar}, \quad (65)$$

где введена величина размерности энергии $E_J = \hbar I_J$. Заметим, что рассматриваемая теория верна только если вероятность туннелирования достаточно мала. Количественно это условие можно сформулировать как неравенство $\hbar\omega_J \ll \varepsilon_{ex}$, где ε_{ex} — разность энергий основного и первого возбужденного состояния атома в потенциальной яме.

Существенно, что систему (62), (64) можно переписать в форме уравнений Гамильтона для канонически сопряженных величин Φ и $\hbar k$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial H_J}{\partial(\hbar k)} \quad (66)$$

и

$$\frac{\partial(\hbar k)}{\partial t} = -\frac{\partial H_J}{\partial \Phi} \quad (67)$$

с гамильтонианом

$$H_J = \frac{E_C k^2}{2} - E_J(\cos \Phi - 1) \quad (68)$$

(см., например, [38]). Решения уравнений имеют качественно различный характер при различных начальных условиях. Предположим, что в начальный момент конденсаты имеют одинаковые фазы, $\Phi = 0$, а $k = k_0 > 0$. Тогда, если $k_0 < k_c \equiv \sqrt{2E_J/E_C}$, изменение как фазы, так и величины k носят колебательный характер. В силу постоянства во времени гамильтониана H_J , величина k колеблется в пределах $-k_0 < k < k_0$, а $\cos \Phi$ — между единицей и $1 - E_C k_0^2/2E_J$.

Напротив, если начальное значение $k_0 > k_c$, фаза неограниченно возрастает со временем, а k колеблется вблизи значения k_0 , не меняя знака:

$$\sqrt{k_0^2 - \frac{4E_J}{E_C}} < k < k_0.$$

Таким образом, в этом случае населенность потенциальных ям не выравнивается несмотря на туннелирование. Имеет место так называемый *самозахват* [39, 40].

Это явление имеет простую механическую аналогию. Гамильтониан (68) эквивалентен гамильтониану физического маятника, причем Φ играет роль угла отклонения, а k — угловой скорости. Если начальная угловая скорость достаточно велика, маятник не качается, а вращается вокруг точки опоры.

Эти интересные явления были исследованы в работе [37]. Авторы использовали оптическую ловушку, образованную сфокусированным лазерным пучком. Однако, в отличие от предыдущей экспериментальной работы, двойная ловушка была создана путем наложения стоячей световой волны, направленной вдоль сфокусированного пучка. При этом был создан потенциал, показанный схематически на рис. 14. Он имеет несколько минимумов. Конденсат захвачен в два самых глубоких. Высоту барьера можно регулировать, меняя амплитуду стоячей волны. Чтобы создать разность населенностей потенциальных ям в начальный момент, стоячая волна несколько смещалась относительно точки фокуса. При этом одна

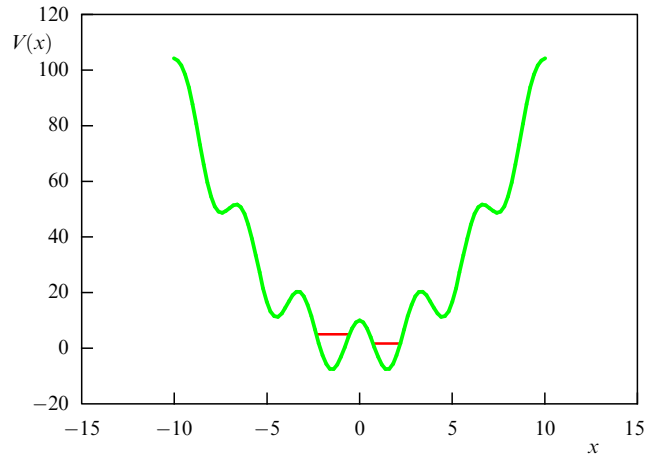


Рис. 14. Схематический график зависимости потенциальной энергии от координаты вдоль пучка для оптической ловушки [37].

яма становилась более глубокой, чем другая и, когда равновесие устанавливалось, в ней оказывалось больше атомов. После этого ямы быстро перемещались в симметричное относительно фокуса положение и начиналось туннельное движение конденсата. В некоторый момент лазерное поле выключалось и наблюдалось расширение конденсата. При этом удавалось измерять количество атомов в ловушках и, по интерференционной картине, разность фаз. Результаты измерений представлены на рис. 15, где даны примеры осцилляторного режима и режима самозахвата.

Я хочу снова привлечь внимание читателя к тому, что на представленных фотографиях мы можем видеть практически невооруженным глазом квантовое туннелирование макроскопического тела.

Описанное экспериментальное устройство является весьма многообещающим. Например, с его помощью можно количественно исследовать квантовые и классические флуктуации волновой функции конденсата (см. раздел 8). Можно проверить неожиданное предсказание Кагана, Коврижина и Максимова об отсутствии отражения от потенциального барьера возбужденных в конденсате фононов [41].

8. Нарушение когерентности квантовыми флуктуациями и переход Мотта

Описанные до сих пор явления имеют, конечно, квантовую природу. Они, однако, могут быть хорошо описаны в приближении классических волн де Бройля, которое сводится к теории Гросса–Питаевского. Следует подчеркнуть, в частности, что параметр I_J , описывающий туннелирование, можно вычислить, решая уравнение (2). Однако, если вероятность туннелирования достаточно мала, исследования описанных выше систем представляют особый интерес, так как они позволяют обнаружить отклонения от теории среднего поля.

В однородном газе такие отклонения описываются поправочными членами теории Боголюбова, которые можно рассматривать как проявление квантовых флуктуаций волновой функции ψ . Эти поправки, вообще говоря, имеют относительный порядок $(na^3)^{1/2}$, где n — число атомов в единице объема газа. По порядку

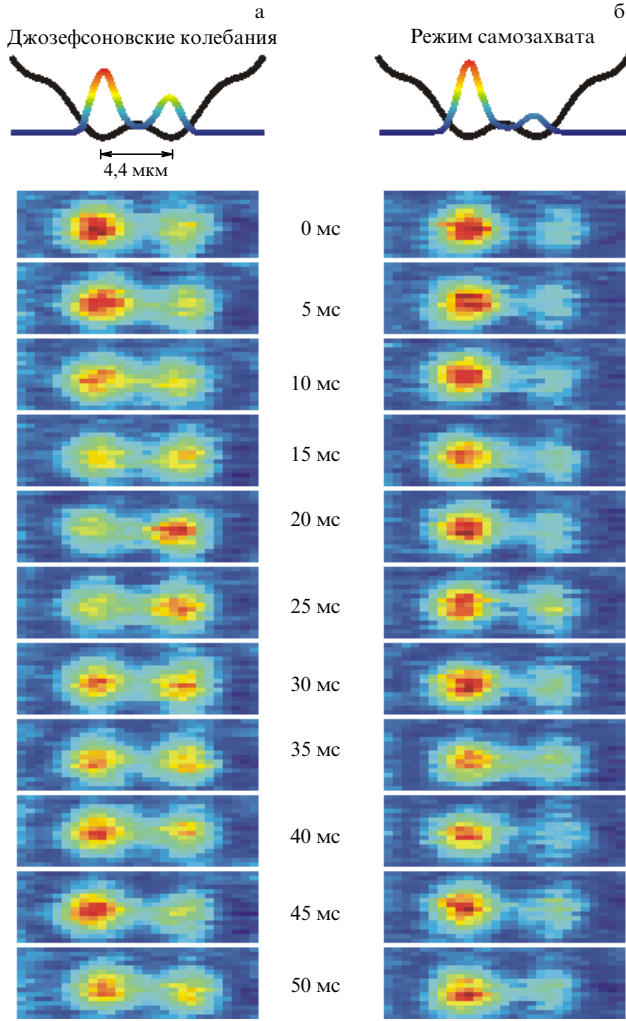


Рис. 15. Туннельная динамика конденсата в симметричной двойной ловушке. Временная зависимость плотности конденсата непосредственно видна на теневых изображениях. Поле зрения равно $19,4 \times 9,2$ мкм. На рисунке (а) показана эволюция конденсата в режиме джозефсоновских колебаний, когда $k < k_c$. Рисунок (б) соответствует режиму самозахвата $k > k_c$. Для получения изображения конденсаты раздвигались на расстояние 6,7 мкм [37].

величины эта формула применима и для конденсата в ловушке, если понимать под n плотность газа в ее центре. Предполагая, что потенциал ловушки гармонический, нетрудно проверить, что поправки к теории среднего поля имеют относительный порядок

$$\frac{1}{N} \left[\frac{Na}{a_H} \right]^{6/5},$$

где

$$a_H = \left(\frac{\hbar}{m\omega_H} \right)^{1/2},$$

ω_H — частота колебаний атома в ловушке. Безразмерный параметр Na/a_H имеет важное значение в физике БЭК. Если, как это обычно бывает, этот параметр велик, в теории можно использовать так называемое приближение Томаса – Ферми (см. [1]).

Наиболее обещающей представляется возможность измерения отклонений собственных частот колебаний

конденсата в ловушке от результатов теории среднего поля. Соответствующие поправки, которые увеличивают частоту колебаний, были вычислены в работах [42, 43]. Несмотря на большое значение параметра Томаса – Ферми, поправки, благодаря наличию малого множителя $1/N$, в типичных условиях эксперимента оказываются малыми и их до сих пор не удалось надежно измерить. Они, по-видимому, были замечены в сдвиге частоты осцилляций сильно вытянутого конденсата в работе [44].

В этом отношении многообещающей является ситуация вблизи так называемых *резонансов Фейшбаха*, где длина рассеяния зависит от магнитного поля и может принимать очень большие значения [54]. Это явление будет обсуждаться в разделе 9.

Отклонения от теории среднего поля приводят, однако, к значительным наблюдаемым эффектам для слабосвязанных, т.е. разделенных высокими потенциальными барьерами, конденсатов. Речь при этом идет о конденсатах как в оптических решетках, так и в двойных потенциальных ямах. Взаимодействие между атомами приводит к квантовым флуктуациям фаз конденсатов, которые могут быть измерены в чувствительных интерференционных экспериментах.

Самый простой способ описания квантовых флуктуаций разности фаз конденсатов в двойной потенциальной яме основан на квантовании классических уравнений туннельной динамики (66), (67). Для этого нужно заменить канонически сопряженные переменные Φ и k на операторы с перестановочными соотношениями

$$[\hat{\Phi}, \hat{k}] = i. \quad (69)$$

При этом удобно работать в " Φ -представлении", в котором оператор

$$\hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial \Phi} \quad (70)$$

действует на волновую функцию, которая должна быть периодической функцией Φ с периодом 2π . Соответственно оператор Гамильтона является квантовым обобщением гамильтониана (68):

$$\hat{H}_J = \frac{E_C}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} - E_J (\cos \Phi - 1). \quad (71)$$

Гамильтониан (71) достаточно прост и с его помощью можно дать полное описание флуктуаций фазы. Рассмотрим, прежде всего, случай, когда эти флуктуации малы. Тогда можно приближенно положить $1 - \cos \Phi \approx \Phi^2/2$. Гамильтониан (71) сводится тогда к гамильтониану гармонического осциллятора. Используя известные результаты, мы находим тогда, что в основном состоянии нашей системы разность фаз имеет флуктуации:

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}}. \quad (72)$$

Сделанное нами предположение о малости флуктуаций требует, таким образом, выполнения неравенства

$$\frac{E_C}{E_J} \ll 1, \quad (73)$$

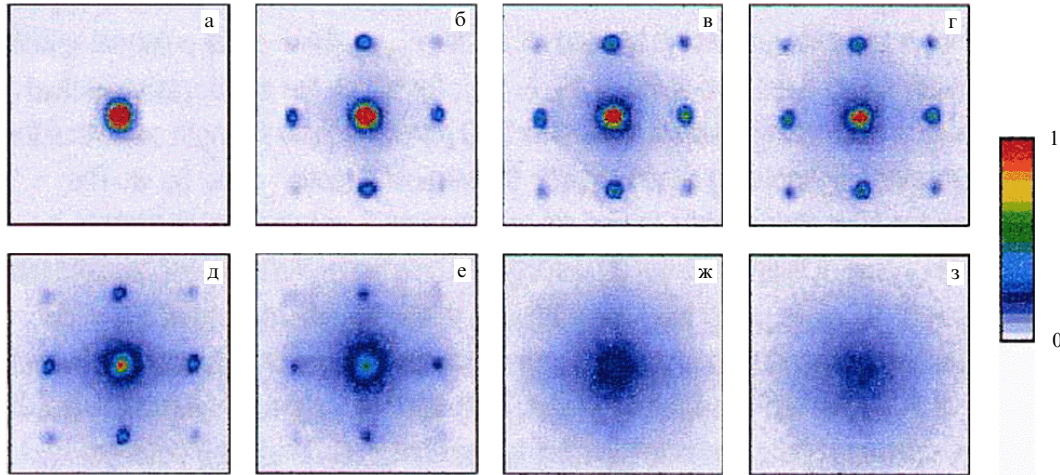


Рис. 16. Интерференционная картина после расширения бозе-газа из трехмерной оптической решетки для различных значений параметра s : (а) $s = 0$, (б) 3, (в) 7, (г) 10, (д) 13, (е) 14, (ж) 16, (з) 20. Исчезновение дифракционных пятен при $s > 13$ означает переход Мотта в диэлектрическую фазу [48].

которое означает, что взаимодействие достаточно слабое (E_C мало), а коэффициент туннелирования E_J достаточен велик. В отсутствии взаимодействия, когда $E_C = 0$, флуктуации фазы, как это и должно быть, отсутствуют. Все атомы сконденсированы в одном состоянии с определенной фазой⁴.

Величина E_J , вообще говоря, пропорциональна числу атомов конденсата N . Однако, поскольку она экспоненциально убывает с увеличением высоты барьера, неравенство (73) может быть нарушено даже при большом N .

Флуктуации фазы приводят к тому, что интерференционная картина, показанная на рис. 10, оказывается размытой *после усреднения по результатам многих измерений*. Действительно, каждое измерение даст распределение плотности согласно (54), но с различными значениями фаз в разных реализациях эксперимента. Усреднение полученного распределения плотности по разным измерениям даст тогда (для случая одинаковых конденсатов с $n_2 = n_1$)

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle &= 2n_1 \left[1 + \left\langle \cos \left(\frac{md}{\hbar t} x + \Phi \right) \right\rangle \right] = \\ &= 2n_1 \left[1 + \cos \left(\frac{md}{\hbar t} x \right) \langle \cos \Phi \rangle \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Таким образом, резкость интерференционной картины определяется *фактором когерентности*

$$\alpha \equiv \langle \cos \Phi \rangle \approx 1 - \frac{\langle \Phi^2 \rangle}{2}. \quad (75)$$

В частности, отношение минимальной и максимальной интенсивностей оказывается равной

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \approx \frac{\langle \Phi^2 \rangle}{4}.$$

⁴ В действительности переход к случаю невзаимодействующих частиц не столь уж тривиален. Это видно уже из того, что в том же, что и (72), приближении, когда $E_C \rightarrow 0$, флуктуация разности населенностей $\langle (\Delta k)^2 \rangle = \sqrt{(E_J/E_C)} \rightarrow \infty$, что невозможно. Подробное обсуждение этого вопроса см. в [45], § 15.7.

Подчеркнем еще раз, что размытие интерференционной картины происходит после усреднения по различным реализациям эксперимента. Каждый отдельный эксперимент дает интерференционную картину с определенной фазой Φ .

В обратном предельном случае слабого туннелирования ($E_J/E_C \ll 1$) малыми оказываются флуктуации разности населенностей $\langle (\Delta k)^2 \rangle = 2(E_J/E_C)^2$. Конденсаты в этом случае находятся в состояниях с фиксированными числами частиц (их называют *состояниями Фока*). Резкость усредненной интерференционной картины в этом случае мала: $\alpha = \langle \cos \Phi \rangle = 2E_J/E_C$.

До настоящего времени флуктуации фазы конденсата в двойной потенциальной яме исследованы не были (напомним, что само туннелирование в этой системе наблюдалось совсем недавно [37]). Более благоприятные возможности для наблюдений этих флуктуаций имеются в оптических решетках. Здесь наличие флуктуаций означает, что конденсаты в различных узлах решетки имеют различные фазы. Это приводит к смазыванию интерференционной картины уже в каждом отдельном измерении в эксперименте типа показанного на рис. 1.

Первые эксперименты такого рода были произведены в работах [46, 47]. В этих работах наблюдались блоховские осцилляции конденсата в одномерной оптической решетке под влиянием силы тяжести. Как и в других экспериментах, в некоторый момент решетка выключалась и регистрировалась интерференционная картина. В работе [47] было обнаружено, что интерференционная картина, резкая в решетке малой интенсивности, исчезает с увеличением высоты барьеров. Следует, однако, иметь в виду, что интерпретация этих результатов не вполне однозначна. Возможно, что играла роль также упомянутая выше неустойчивость движущегося в решетке конденсата.

Важные результаты были получены при исследовании конденсатов в трехмерной оптической решетке с потенциалом вида (13) в работе [48]. В отличие от предыдущих экспериментальных работ, обсуждавшихся выше, в этой работе число атомов в каждом узле решетки было мало — порядка 1–3. Благодаря этому отклонения от теории среднего поля оказывались большими.

Авторы наблюдали интерференционную картину после выключения внешнего поля. Результаты для различных значений параметра s представлены на рис. 16. Малые значения параметра s означают, что потенциал решетки мал. В этом случае конденсат почти однороден и боковые максимумы интерференционной картины слабы, как это видно на рис. 16а. По мере увеличения s интенсивность этих максимумов увеличивается. Однако одновременно проявляется некогерентный фон, связанный с флуктуациями фазы. При значениях $s > 13$ дискретные интерференционные максимумы "поглощаются" фоном и исчезают вовсе. При этом значении s система испытывает фазовый переход в новое состояние. В отличие от сверхтекучей фазы конденсата при малых значениях s , эту фазу называют диэлектрической, так как газ теперь не может течь по решетке. Отсутствие интерференционных максимумов означает отсутствие недиагонального дальнего порядка, т.е. отсутствие БЭК.

Критическое значение s находится в согласии с теоретическими предсказаниями работы [49] (см. также [50]). Диэлектрическая фаза характеризуется наличием щели в энергетическом спектре. Щель имеет простой физический смысл. Эта энергия необходима для того, чтобы переместить атом из одного узла решетки в соседний. Ввиду отталкивания между атомами такой процесс требует энергии. Величина щели была измерена путем наложения неоднородного внешнего потенциала. Когда разность потенциала между соседними узлами достигала щели, начиналось движение атомов, которое приводило к необратимому нагреву системы. Если после этого параметр s снова уменьшался, система не возвращалась в сверхтекучее состояние, что проявлялось в отсутствии интерференционной картины.

Переход такого типа был предсказан Моттом для электронов в металле и его принято называть *переходом Мотта*.

Отклонения от теории среднего поля, в условиях, когда они не слишком малы, были количественно исследованы в недавней работе [51]. Целью работы являлось измерение числа "надконденсатных" атомов. В приближении среднего поля при $T = 0$ все атомы находятся в конденсате. Флуктуации волновой функции приводят к появлению атомов вне конденсата. Теория Боголюбова предсказывает, что для однородного конденсата при $T = 0$ отношение η числа атомов вне конденсата к полному числу атомов равно $\eta = 1,5(na^3)^{1/2}$ (в англоязычной литературе это отношение называют "quantum depletion"). Прямое обобщение теории Боголюбова для конденсатов в решетке дает для указанного отношения выражение $\eta = \int v_k^2 dk / n$, где $\mathbf{k}$ — квазиимпульс и v_k^2 — параметр, аналогичный v -параметру преобразования Боголюбова и выражающийся через спектр элементарных возбуждений в решетке $\epsilon(\mathbf{k})$ согласно [52]

$$v_k^2 = \frac{\epsilon(\mathbf{k}) + gn_0 - [2\epsilon(\mathbf{k})gn_0 + \epsilon^2(\mathbf{k})]^{1/2}}{2[2\epsilon(\mathbf{k})gn_0 + \epsilon^2(\mathbf{k})]^{1/2}}. \quad (76)$$

Нетрудно показать, что увеличение амплитуды потенциала решетки s увеличивает отношение η , так что надконденсатные атомы становятся наблюдаемыми.

Принципиальная схема эксперимента была аналогична эксперименту [48], который обсуждался выше. Конденсат, содержащий до 5×10^5 атомов ^{23}Na , был

помещен в оптическую ловушку, образованную в окрестности пересекающихся фокусов двух инфракрасных лазерных пучков с длиной волны 1064 нм (более подробное описание экспериментальной установки см. в [53]). Собственные частоты атомов в ловушке были равны $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times 60, 60, 85$ Гц, а радиус конденсата был порядка 12 мкм для $1,7 \times 10^5$ атомов. Чтобы образовать трехмерную оптическую решетку, на конденсат были наложены три взаимно-перпендикулярные стоячие лазерные волны. Можно было также создавать одномерную и двумерную решетки, используя одну или две такие волны. Число атомов на узел решетки было равно примерно 7, т.е. заметно больше, чем в работе [48]. Эксперимент производился вплоть до значений параметра $s = 22$.

Чтобы измерить число надконденсатных атомов, потенциалы ловушки и решетки быстро (за время меньше 1 мкс) выключались и конденсат свободно расширялся в течение 10 мс. После этого получалось теневое изображение конденсата, т.е. измерялось пространственное распределение плотности. Как уже говорилось (см. примечание¹), это распределение воспроизводит начальное импульсное распределение. В данном эксперименте атомы конденсата давали резкие интерференционные пики, а надконденсатные атомы создавали диффузный фон. В эксперименте пики затенялись и число атомов фона подсчитывалось. Таким образом находилось число надконденсатных атомов. Следует иметь в виду, что при обработке результатов этого очень трудного эксперимента встречалось много подводных камней. При значениях $s > 16$ часть конденсата в центре ловушки претерпевала переход Мотта в диэлектрическую фазу. Неоднородность системы создавала проблемы для применения теории. Тем не менее результаты измерений оказались в разумном согласии с теорией как для трехмерных, так и для двумерных, и одномерных решеток.

9. Резонанс Фешбаха

Мы уже упоминали, что богатые экспериментальные возможности открывает наличие *резонансов Фешбаха*, вблизи которых длина рассеяния велика и зависит от магнитного поля. Прежде чем описать некоторые эксперименты с ультрахолодными газами вблизи резонансов Фешбаха, мы вкратце напомним основные положения теории рассеяния медленных частиц в условиях, когда система двух атомов имеет связанное состояние с отрицательной энергией ϵ , близкой к нулю (см. [13], § 133). Термин "близкий к нулю" означает здесь, что характерное расстояние между связанными атомами $\hbar/\sqrt{m|\epsilon|}$ велико по сравнению с радиусом действия межатомного потенциала r_0 :

$$\frac{\hbar}{\sqrt{m|\epsilon|}} \gg r_0. \quad (77)$$

В этом случае для квантово-механического описания взаимодействия атомов не требуется знания конкретных свойств потенциала. Достаточно рассмотреть свободное движение атомов, но наложить на волновую функцию s -состояния граничное условие при $r \rightarrow 0$:

$$\left[\frac{d(r\psi)}{dr} \right]_{r=0} = -\frac{1}{a}(r\psi), \quad (78)$$

где a — постоянная, удовлетворяющая условию $a \gg r_0$. Если $a > 0$, уравнение Шрёдингера для относительного движения двух атомов имеет решение вида

$$\psi = \text{const} \cdot \frac{\exp(-r/a)}{r},$$

описывающее связанное состояние с энергией

$$\epsilon = -\frac{\hbar^2}{ma^2}. \quad (79)$$

Если a отрицательно, связанное состояние отсутствует. В этом случае говорят о "виртуальном уровне" в отличие от "реального" уровня (79). Однако независимо от знака a , решение с положительной энергией E имеет вид $\psi = \text{const} \cdot \sin(kr + \delta_0)/r$, где $k = p/\hbar = \sqrt{mE}/\hbar$. Фаза s -рассеяния определяется с помощью уравнения (78), что приводит к формуле $\tan \delta_0 = -ka$. Амплитуда рассеяния равна

$$f = \frac{1}{k(\cot \delta_0 - i)} = -\frac{1}{1/a + ik}. \quad (80)$$

Таким образом, постоянная $a = -(f)_{k \rightarrow 0}$ есть не что иное, как длина рассеяния. Если $\epsilon \rightarrow 0$, длина $a \rightarrow \infty$. Тогда амплитуда рассеяния стремится к своему "универсальному пределу":

$$f \rightarrow \frac{i}{k}. \quad (81)$$

Заметим, что условие положительности a , обеспечивающее устойчивость конденсата, означает при больших значениях a наличие в системе двух атомов реального уровня с малой отрицательной энергией. Можно подумать, что наличие такого уровня является маловероятной случайностью. Дело, однако, в том, что щелочноземельные атомы имеют уровни, положение которых сильно зависит от магнитного поля. Будем рассматривать систему двух атомов как двухатомную молекулу. Электронные термы, т.е. кривые потенциальных энергий взаимодействия атомов, определяются их электронными состояниями. Существенно при этом, что магнитные моменты атомов в различных электронных состояниях различны. Поэтому относительное расположение термов зависит от внешнего магнитного поля. Рассмотрим два терма — верхний и нижний, соответствующий основному состоянию. Меняя магнитное поле, можно сделать энергию одного из связанных состояний верхнего терма близкой к нулю. Это и есть резонанс Фешбаха [54]. В отсутствие переходов между термами наличие такого уровня не влияет на рассеяние в основном состоянии. Однако малые члены в гамильтониане, описывающие взаимодействие ядерного движения с электронным, приводят к таким переходам. Поэтому наличие уровня верхнего терма проявляется в рассеянии атома в основном состоянии согласно формулам (79), (80). Слабость же взаимодействия между термами проявляется в том, что эти формулы справедливы лишь при весьма малых энергиях, тем меньших, чем слабее взаимодействие.

Постоянная $1/a$, входящая в граничное условие (78), является регулярной функцией индукции магнитного поля B и ее можно разложить вблизи значения B_0 , при котором уровень достигает нуля: $1/a \approx (B - B_0)/b$. Если постоянная b достаточно мала, имеет смысл учитывать и следующий член разложения. Окончательно длину рас-

сеяния вблизи резонанса Фешбаха можно записать в виде

$$a = a_g + \frac{b}{B - B_0}. \quad (82)$$

Использование резонанса Фешбаха открывает совершенно новые экспериментальные возможности, позволяя регулировать интенсивность взаимодействия. По мере приближения к B_0 амплитуда рассеяния возрастает, так что удастся получить достаточно большие значения газового параметра при малой плотности газа. С другой стороны, при значениях магнитного поля вблизи значений $B \approx B^* = B_0 - b/a_g$ взаимодействие становится очень малым, что позволяет исследовать свойства практически идеального бозе-газа. Заметим, что в таких условиях имеет смысл учитывать в уравнении (2) и член пятого порядка, т.е. описывать газ уравнением вида

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + v(B - B^*)|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + g_3|\psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (83)$$

Постоянная g_3 описывает трехчастичное взаимодействие между атомами.

Целый круг интересных явлений возникает, если магнитное поле быстро меняется со временем. Мы уже упоминали, что конденсат вблизи резонанса устойчив, только если система двух атомов имеет связанное состояние с малой энергией связи. В стационарных условиях образование таких молекул происходит путем трехчастичной рекомбинации, вероятность которой мала в разреженном газе. Однако в переменном магнитном поле атомы связываются в молекулы и при двухчастичном взаимодействии. В результате, наряду с атомным, появляется и конденсат молекул [55]. Молекулярный конденсат описывается своей волновой функцией. Интерференция между двумя конденсатами проявляется в характерных биениях — периодических изменениях плотности атомного конденсата с частотой $\hbar|\epsilon|$, где ϵ — энергия связи молекул (79).

Возможность регулировать величину длины рассеяния позволяет кардинально изменять свойства взаимодействия двух бозонов, помещенных в цилиндрическую гармоническую ловушку. Если частота поперечных колебаний в ловушке $\omega_{\perp}$ достаточно велика, движение атомов можно рассматривать как одномерное. Взаимодействие двух медленных атомов можно описывать тогда с помощью одномерного эффективного потенциала вида

$$U_{1D}(z - z') = g_{1D} \delta(z - z'). \quad (84)$$

Постоянную взаимодействия g_{1D} удастся выразить через "трехмерную" длину рассеяния a атомов в свободном пространстве [56]:

$$g_{1D} = \frac{4\hbar^2}{ma_{\perp}} \frac{a}{1 - C(a/a_{\perp})}, \quad (85)$$

где $a_{\perp} = (2\hbar/m\omega_{\perp})$ и $C = 0,56$. Из (85) видно, что меняя магнитное поле и, следовательно, длину рассеяния a , можно сильно увеличивать постоянную одномерного взаимодействия и менять ее знак. Заметим, что приве-

денные формулы справедливы и для взаимодействия медленных фермионов с антипараллельными спинами.

Экспериментальные исследования БЭК в непосредственной близости к резонансу Фешбаха затруднено малым временем жизни конденсата. Увеличение длины рассеяния приводит к увеличению вероятности трехчастичной рекомбинации. Существуют, однако, системы, свободные от этого ограничения. Речь идет о двухатомных молекулах, образованных из фермионов с противоположными спинами. (Медленные фермионы с параллельными спинами взаимодействуют очень слабо, так как длина s -рассеяния фермионов с параллельными спинами равна нулю.) Такие молекулы, очевидно, подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна и способны к конденсации. Однако их свойства вблизи резонанса Фешбаха совершенно отличны от свойств атомарных бозонов. Эти свойства были выяснены в важной работе Петрова, Саломона и Шляпникова, результаты которой мы здесь обсудим [57].

Прежде всего удастся выразить длину рассеяния молекулы на молекуле a_m через длину рассеяния атомов с противоположными спинами. Задача допускает красивое решение, которое дает результат

$$a_m = 0,6a, \quad (86)$$

справедливый вблизи резонанса, т.е. в пределе $a \rightarrow \infty$. Заметим, что фермиевская статистика атомов существенна. Для молекул из двух бозонов молекулярную длину рассеяния выразить через атомарную невозможно. В работе [57] результат был получен путем решения уравнения Шрёдингера в координатном пространстве. Диаграммный подход к проблеме был развит в [58]. В работе [57] были также исследованы переходы молекул на глубокие молекулярные уровни при столкновении двух молекул. Оказалось, что вероятность такого процесса релаксации α_{rel} , приводящего к потерям молекул из конденсата, убывает с увеличением длины рассеяния:

$$\alpha_{\text{rel}} \propto a^{-2,55}. \quad (87)$$

Это означает, что время жизни конденсата молекул, состоящих из фермиевских атомов, быстро увеличивается при приближении к резонансу Фешбаха. (В экспериментах [59] наблюдалась степенная зависимость скорости релаксации с показателем экспоненты $-2,3$, близким к (87).) Подчеркну, что этот эффект связан именно с фермиевской природой атомов. Вероятность релаксации молекул, состоящих из бозонов, возрастает вблизи резонанса пропорционально a^4 . В настоящее время ферми-газам вблизи резонанса Фешбаха посвящено много как экспериментальных, так и теоретических работ, обсуждение которых выходит за рамки настоящего обзора. Я ограничусь здесь лишь краткими замечаниями.

Важно, что система оказывается стабильной при всех значениях длины рассеяния a как положительных, так и отрицательных. При положительных a мы имеем дело с молекулярными бозонами с положительной, согласно (86), длиной рассеяния. Система описывается тогда уравнением (2) с заменой массы на $2m$ и длины рассеяния на $0,6a$. Отрицательные a означают отсутствие связанного состояния и мы имеем дело с фермиевским газом, стабильность которого обеспечивается статистическими свойствами фермионов.

Особенно интересная ситуация имеет место в непосредственной близости к резонансу Фешбаха, когда формально вычисленная длина рассеяния a становится много большей среднего расстояния между атомами:

$$a \gg n^{-1/3}. \quad (88)$$

Существенно, что при этом газ остается разреженным в том смысле, что размер атома много меньше межатомных расстояний

$$r_0 \ll n^{-1/3}. \quad (89)$$

Тогда свойства системы должны определяться параметрами двухчастичной амплитуды рассеяния. В газе плотности n большинство атомов имеет импульсы порядка $\bar{p} \sim \hbar n^{1/3} \gg \hbar/a$. Для таких импульсов амплитуда рассеяния достигает унитарного предела (81) и не зависит от a . В такой ситуации в нашем распоряжении не остается никаких параметров, характеризующих систему, кроме плотности.

Простые соображения размерности показывают, что уравнение состояния имеет тот же вид, что и уравнение состояния идеального ферми-газа. Например, при $T = 0$ энергия, отнесенная к одному атому E_0/N , должна иметь вид

$$\frac{E_0}{N} = \frac{\xi p_F^2}{2m} = \xi \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{2m}, \quad (90)$$

с универсальным, т.е. не зависящим от рода газа, коэффициентом ξ . Коэффициент ξ , разумеется, нельзя вычислить аналитически, так как теория в унитарной области не содержит малого параметра. Однако численные расчеты методом Монте-Карло дают довольно надежно значение $\xi = 0,44$ [60, 61] в хорошем согласии с экспериментальными данными [62, 63]. Замечу, что химический потенциал в унитарной области связан при $T = 0$ с энергией тем же соотношением, что и в идеальном газе: $\mu = (5/3)E_0/N$. При конечных температурах кривая $E(T)$ также должна быть универсальной.

Есть все основания полагать, что ферми-газ вблизи резонанса является при $T = 0$ сверхтекучим при всех значениях длины рассеяния. Действительно, при относительно малых положительных значениях a мы имеем разреженный газ бозевских молекул (БЭК область). При малых отрицательных значениях a мы имеем ферми-газ со слабым притяжением между атомами. Согласно теории Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова в этом случае в газе образуются куперовские пары и состояние газа оказывается аналогичным состоянию электронов в сверхпроводящем металле. Вычисление щели в спектре и температуры перехода является, однако, трудной задачей, которая была решена Горьковым и Мелик-Бархударовым [64]. Отмечу, что переход между двумя указанными режимами является непрерывным, без фазового перехода.

В унитарном режиме вблизи резонанса сверхпроводящая щель при $T = 0$ должна быть порядка $p_F^2/2m$, т.е. $\Delta(0) = \gamma p_F^2/2m$ с универсальным коэффициентом γ . Вычисления [60] дают значение $\gamma \approx 0,88$. Температура перехода также должна быть порядка $p_F^2/2m$. Недавние вычисления методом диаграммного Монте-Карло [67] дают значение [68]

$$T_c = (0,152 \pm 0,003) \frac{p_F^2}{2m}. \quad (91)$$

Прямым доказательством сверхтекучести является существование квантованных вихрей, которые наблюдались в экспериментах [65]. Замечу, что такие вихри в ферми-газе имеют циркуляцию скорости $\pi\hbar/m$ — в два раза меньшую, чем в бозевской сверхтекучей жидкости. Циркуляцию можно определить, подсчитывая число вихрей на единицу площади при данной скорости вращения.

Как уже говорилось, при достаточно малых a система представляет собой бозе-газ молекул. Уравнение состояния этого газа в первом приближении можно записать как $\mu = (2\pi\hbar^2/m)(0,6an)$. Принципиально важным является вопрос о том, можно ли вычислить с помощью теории Боголюбова–Ли–Янга–Хуанга и следующую поправку, которая в этой теории имеет относительный порядок $(na^3)^{1/2}$ (см. начало предыдущего раздела). Это не очевидно, так как фермиевские свойства атомов, составляющих молекулу, существенны, но порядок величины поправок, связанных со статистикой, трудно оценить. Я однако уверен, что $(na^3)^{1/2}$ -поправка является главной. Это означает, что частота коллективных осцилляций газа в ловушке должна в БЭК районе увеличиваться с ростом a . В то же время частота осцилляций в унитарном пределе должна быть меньше, чем в БЭК области. Действительно, для "политропного" уравнения состояния вида $\mu = n^s$ частоты уменьшаются с уменьшением s притом, что $s = 1$ в БЭК области и $s = 2/3$ в унитарной. Таким образом, частоты колебаний должны иметь максимум как функции от a [66]. Экспериментальные данные по этому вопросу противоречивы, однако недавние эксперименты [69], как кажется, подтвердили наличие этого максимума.

10. Заключение

Исследования с использованием оптических ловушек и оптических решеток играют все большую роль в физике БЭК. Фактически в большинстве новых экспериментов используется именно такая техника. Впрочем, техника магнитных ловушек тоже не стоит на месте. Все большее развитие получают "микротовушки", в которых магнитное поле создается токами, текущими по тонким электродам, нанесенным на диэлектрическую подложку, вблизи которой и удерживаются атомы. (См., например, работу [70] и ссылки в ней.)

В заключение отмечу, что работы с БЭК и вообще с ультрахолодными газами вступили теперь в новую фазу. Если вначале изучались удивительные свойства самих конденсатов, то теперь они используются для исследования различных проблем физики, которые не удается исследовать другими методами. Сюда относится изучение квантовых фазовых переходов, примером которых является обсуждавшийся выше переход Мотта. Упомяну также измерение силы молекулярного притяжения между атомом и твердой поверхностью по наблюдению колебаний конденсата вблизи поверхности [71]. Однако по-настоящему необъятная область применения этих систем открывается в связи с их возможным использованием для квантовой обработки информации и создания квантовых компьютеров. Ультрахолодные газы в оптических и микротовушках являются наиболее обещающими кандидатами на элементы таких компьютеров, хотя мысль о газообразном, хотя бы частично, компьютере и кажется странной. На этом пути имеется уже

немало достижений и, хотя задача является очень трудной, я лично думаю, что нынешнее поколение населения Земли будет жить при квантовых компьютерах. Эта тема, несомненно, заслуживает подробного обзора на страницах *УФН*.

В заключение я благодарю С. Джорджини, М. Ингушио, Ю. Кагана, Э. Корнелла, Э. Либа, Е. Никитина, М. Обертхалера, Н. Прокофьева, А. Смерци, С. Стрингари и Г. Шляпникова за обсуждение затронутых в обзоре вопросов.

Список литературы

1. Питаевский Л П *УФН* **168** 641 (1998)
2. Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **11** 77 (1947)
3. Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)
4. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961)
5. Lieb E H, Seiringer R, Yngvason J *Phys. Rev. A* **61** 043602 (2000)
6. Pedri P, Pitaevskii L, Stringari S, Fort C, Burger S, Cataliotti F S, Maddaloni P, Minardi F, Inguscio M *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401 (2001)
7. Krämer M, Menotti C, Pitaevskii L, Stringari S, *cond-mat/0305300; Eur. Phys. J. D* **27** 247 (2003)
8. Roati G et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 230402 (2004)
9. Carusotto I, Pitaevskii L, Stringari S, Modugno G, Inguscio M *Phys. Rev. Lett.* **95** 093202 (2005)
10. Morsch O et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 140402 (2001)
11. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **11** 592 (1941); Landau L D *J. Phys. USSR* **5** 71 (1941)
12. Bishop D J, Reppy J D *Phys. Rev. B* **22** 5171 (1980)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2001)
14. Eggington A J. *Low Temp. Phys.* **28** 1 (1977)
15. Ambegaokar V et al. *Phys. Rev. B* **21** 1806 (1980)
16. Rapsch S, Schollwöck U, Zwerger W *Europhys. Lett.* **46** 559 (1999)
17. Roth R, Burnett K *Phys. Rev. A* **67** 031602(R) (2003)
18. Cataliotti F S et al. *Science* **293** 843 (2001)
19. Krämer M, Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **88** 180404 (2002)
20. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2* (М.: Физматлит, 2001)
21. Denschlag J H et al. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 3095 (2002)
22. Wu B, Niu Q *Phys. Rev. A* **64** 061603 (2001)
23. Smerzi A et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 170402 (2002)
24. Menotti C, Krämer M, Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. A* **67** 053609 (2003)
25. Stöferle T et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 130403 (2004)
26. Girardeau M J. *Math. Phys.* **1** 516 (1960)
27. Lieb E H, Lininger W *Phys. Rev.* **130** 1605 (1963)
28. Damski B et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 060403 (2005)
29. Krämer M, Tozzo C, Dalfovo F *Phys. Rev. A* **71** 061602(R) (2005)
30. Kagan Yu, Maksimov L A *Phys. Rev. A* **64** 053610 (2001)
31. Shin Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 050405 (2004)
32. Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **83** 4237 (1999)
33. Stenger J et al. *Phys. Rev. Lett.* **82** 4569 (1999)
34. Saba M et al. *Science* **307** 1945 (2005)
35. Anderson P W, in *The Lesson of Quantum Theory* (Eds J de Boer, E Dal, O Ulfbeck) (Amsterdam: North-Holland, 1986)
36. Peres A *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Dordrecht: Kluwer Acad., 1993)
37. Albiez M et al., *cond-mat/0411757; Phys. Rev. Lett.* **95** 010402 (2005)
38. Zapata I, Sols F, Leggett A J *Phys. Rev. A* **57** R28 (1998)
39. Milburn G J et al. *Phys. Rev. A* **55** 4318 (1997)
40. Smerzi A et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950 (1997)
41. Kagan Yu, Kovrizhin D L, Maksimov L A *Phys. Rev. Lett.* **90** 130402 (2003)
42. Pitaevskii L, Stringari S *Phys. Rev. Lett.* **81** 4541 (1998)
43. Braaten E, Pearson J *Phys. Rev. Lett.* **82** 255 (1999)
44. Chevy F et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 250402 (2002)

45. Pitaevskii L, Stringari S *Bose–Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
46. Anderson B P, Kasevich M A *Science* **282** 1686 (1998)
47. Orzel C et al. *Science* **291** 2386 (2001)
48. Greiner M et al. *Nature* **415** 39 (2002)
49. Fisher M P A et al. *Phys. Rev. B* **40** 546 (1989)
50. Jaksch D et al. *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108 (1998)
51. Xu K et al., cond-mat/0601184
52. van Oosten D, van der Straten P, Stoof H T C *Phys. Rev. A* **63** 053601 (2001)
53. Xu K et al. *Phys. Rev. A* **72** 043604 (2005)
54. Feshbach H *Ann. Phys.* (New York) **5** 357 (1958); **19** 287 (1962)
55. Donley E A et al. *Nature* **417** 529 (2002)
56. Olshanii M *Phys. Rev. Lett.* **81** 938 (1998)
57. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. Lett.* **93** 090404 (2004)
58. Brodsky I V et al. *Письма в ЖЭТФ* **82** 306 (2005); cond-mat/0507240
59. Regal C A, Greiner M, Jin D S *Phys. Rev. Lett.* **92** 083201 (2004)
60. Carlson J et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 050401 (2003)
61. Astrakharchik G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 200404 (2004)
62. Bourdel T et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 020402 (2003)
63. Bartenstein M et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401 (2004)
64. Горьков Л П, Мелик-Бархударов Т К *ЖЭТФ* **40** 1452 (1961)
65. Zwierlein M W et al. *Nature* **435** 1047 (2005)
66. Stringari S *Europhys. Lett.* **65** 749 (2004)
67. Prokof'ev N, Svistunov B V *Phys. Rev. Lett.* **81** 2514 (1998)
68. Burovski E et al., in *Report on ESF Research Conf. on Bose–Einstein Condensation, San-Feliu de Guixols, Spain, September 2005*; cond-mat/0602224
69. Grimm R, in *Report on ESF Research Conf. on Bose–Einstein Condensation, San-Feliu de Guixols, Spain, September 2005*
70. Treutlein Ph et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 203005 (2004)
71. Harber D M et al. *Phys. Rev. A* **72** 033610 (2005)

Bose – Einstein condensates in a laser field

L.P. Pitaevskii

*P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation
Dipartimento di Fisica, Università di Trento,
CNR-INFM BEC Center, I-38050 Povo, Trento, Italy
E-mail: lev@science.unitn.it*

Properties of Bose – Einstein condensates in an external laser field are reviewed for "optical lattices" created by standing laser waves and "optical traps" near the focus of a propagating laser wave. Observations of the Mott transition in a periodic lattice are discussed, as are Feshbach resonance experiments and those on condensate tunneling dynamics in double-wells.

PACS numbers: **03.75. – b**, 05.30.Jp, 32.80.Pj

Bibliography — 71 references

Received 13 December 2005, revised 23 January 2006

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (4) 345 – 364 (2006)

Physics – Uspekhi **49** (4) (2006)